

KAPITEL II

Grundlagen der Quantenmechanik

II.1 Einleitung: Experimente mit einem Spin- $\frac{1}{2}$ -System

Einige wichtigen Merkmale des quantenmechanischen Verhaltens lassen sich am Beispiel des 1922 durch Gerlach^(j) und Stern^(k) durchgeführten Versuchs (Abschn. II.1.1) sowie weiterführender verwandter Experimente (Abschn. II.1.2) illustrieren.

II.1.1 Stern–Gerlach-Versuch

Im originellen Versuch von Gerlach und Stern [2, 3, 4] durchqueren Silber-Atome aus einem Ofen erstens einen Kollimator, an dessen Ausgang sie sich alle in die gleiche Richtung bewegen, und dann einen Raumbereich, in dem sich ein inhomogenes magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$ befindet. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Komponenten des Feldes und dessen Gradienten entlang einer Richtung — hiernach der z -Achse — viel größer ist als die dazu senkrechten Komponenten.

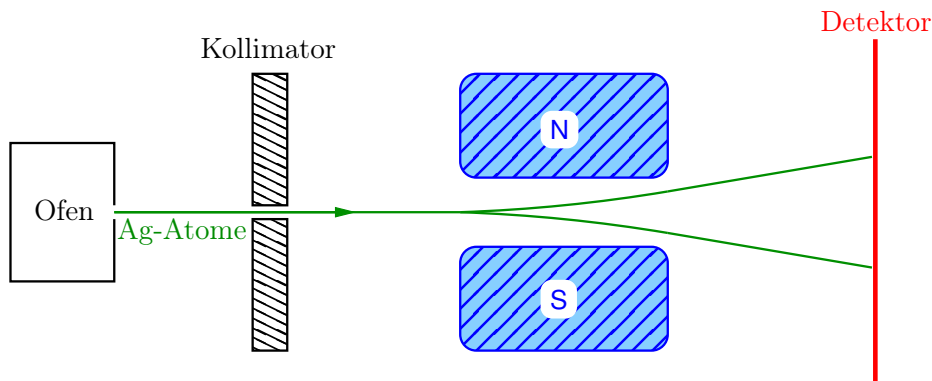


Abbildung II.1 – Schematische Darstellung des Stern–Gerlach-Versuchs.

Im inhomogenen magnetischen Feld erfährt jedes Silber-Atom eine Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \simeq \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

wobei $\vec{\mu}$ das magnetische Dipolmoment des Atoms und μ_z dessen z -Komponente ist.

Im Nachhinein wurde vorgeschlagen, dass das magnetische Dipolmoment mit einer anderen Eigenschaft der Atome, deren Spin \vec{S} , zusammenhängt:

$$\vec{\mu} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \tag{II.1}$$

mit

- dem Landé^(l)-Faktor g , der hier ungefähr gleich 2 ist;
- dem reduzierten Planckschen^(m) Wirkungsquantum $\hbar \simeq 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;

^(j)W. GERLACH, 1889–1979 ^(k)O. STERN, 1888–1969 ^(l)A. LANDÉ, 1888–1976 ^(m)M. PLANCK, 1858–1947

- und dem *Bohrschen*⁽ⁿ⁾ *Magneton* $\mu_B \simeq 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$.

In der Tat ist der Spin eines Silber-Atoms gleich der Summe aus den Spins seiner 47 Elektronen. Dabei heben sich eigentlich die Spins von 46 der Elektronen auf, so dass der Spin des Silber-Atoms gleich dem Spin eines einzelnen Elektrons ist. Die Kopplung von Spins wird im Kapitel ?? behandelt.

Insgesamt ist die Kraft auf ein Atom annähernd proportional zur z -Komponente des Spins:

$$\vec{F} \propto S_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z \tag{II.2}$$

Wegen dieser Kraft wird jedes Atom ausgelenkt in z -Richtung, mit einer Ablenkung proportional zu S_z , so dass eine Messung der Ablenkung auf den Wert der Spin-Komponente rückschließen lässt.

Klassisch würde man sagen, dass die Orientierung der Spins der Atome am Ausgang des Ofens beliebig ist — keine Raumrichtung wird bevorzugt. Dementsprechend sollte die z -Komponente des Spin-Vektors einen beliebigen Wert in einem kontinuierlichen Intervall $-S_{\max} \leq S_z \leq S_{\max}$ annehmen, d.h. man erwartet ein kontinuierliches Ablenkungsspektrum.

Dieses „klassische“ Szenario wird experimentell *nicht* bestätigt. Stattdessen werden in einem Experiment mit Silber-Atomen nur zwei Flecke beobachtet, die den Werten

$$S_z = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad S_z = -\frac{\hbar}{2}$$

der Spin-Komponente entsprechen. Somit wird im Stern–Gerlach-Versuch die *Quantisierung des Spins* — oder genauer des Werts der Komponente des Spins entlang einer (beliebigen) Richtung — nachgewiesen.

Da der maximale mögliche Wert der Spin-Komponente, gemessen in Einheiten von \hbar , $s = \frac{1}{2}$ beträgt, werden die Silber-Atome als *Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen* bezeichnet.

Im nächsten Paragraph wird die schematische Darstellung des Versuchs noch weiter vereinfacht: der Stern–Gerlach-Apparat wird als ein mit SGA(\star) gekennzeichnetes Gatter mit einem Input und zwei Outputs, die die zwei möglichen Werte $\pm\hbar/2$ der Spin-Komponente entlang der \star -Richtung symbolisieren, s. Abb II.2. Dabei wird die S_\star -Komponente mit positivem bzw. negativem Spin-Wert der Kurze halber als S_\star^+ bzw. S_\star^- geschrieben.

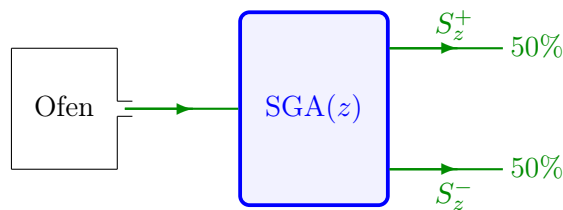


Abbildung II.2 – Symbolische Darstellung des Versuchs der Abb. II.1 mit einem entlang der z -Richtung gerichteten „Stern–Gerlach-Apparat“.

II.1.2 Reihenschaltung von Stern–Gerlach-Versuchen

In diesem Paragraph werden Experimente mit zwei oder mehr hintereinander geschalteten Stern–Gerlach-Apparaten und deren Ergebnisse vorgestellt. Dabei wird der erste Apparat immer entlang der z -Richtung gerichtet sein. Somit dient er dazu, zwei Strahlen aus Atomen mit jeweils nur der Spin-Komponente $S_z = +\hbar/2$ bzw. $S_z = -\hbar/2$ zu vorbereiten: jeder Strahl besteht aus sog. *gleich-präparierten S_z -Zuständen* des Spin- $\frac{1}{2}$ -Systems.

Dagegen sind die Spins am Ausgang des Ofens, vor dem ersten Stern–Gerlach-Apparat, nicht alle im gleichen S_z -Zustand.

⁽ⁿ⁾N. BOHR, 1885–1962

II.1.2a Anordnung mit zwei gleich-gerichteten Apparaten

In einem ersten Versuch werden die gleichpräparierten Zustände mit positiver S_z -Komponente S_z^+ in einen zweiten Stern–Gerlach-Apparat geschickt, der ebenfalls entlang der z -Richtung gerichtet ist (Abb. II.3).

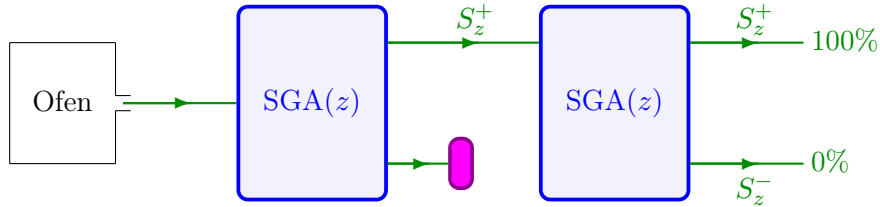


Abbildung II.3 – Reihenschaltung von zwei Stern–Gerlach-Versuchen mit Apparaten entlang der z -Richtung.

Am Ausgang des zweiten Apparats findet man, dass alle dadurch geflogenen Spins weiter eine Komponente $S_z = +\hbar/2$ haben. Somit dient der zweite, gleich-gerichtete Apparat zur Bestätigung der Ergebnisse am Ausgang des ersten: die Messung des Werts der z -Komponente des Spins ist reproduzierbar — was zu erwarten war.

Bemerkung: Man kann noch den mit $\langle S_z \rangle$ bezeichneten *Erwartungswert* der S_z -Komponente am Ausgang des zweiten Stern–Gerlach-Apparats berechnen, d.h. den „mittleren“ Wert — im Sinne einer arithmetischen Mittelung — der Messergebnisse. Da hier nur der Wert $S_z = +\hbar/2$ vorkommt, ist dieser Erwartungswert trivial $\langle S_z \rangle = +\hbar/2$.

II.1.2b Anordnung mit zwei senkrechten Apparaten

Im zweiten Experiment kommen die gleichpräparierten S_z^+ -Zustände auf einen Stern–Gerlach-Apparat, der entlang einer auf z senkrechten Richtung gerichtet ist — z.B. entlang der x -Richtung. Somit misst der zweite Apparat die x -Komponente des Spins (Abb. II.4).

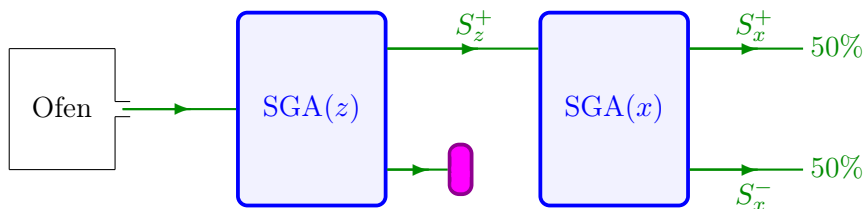


Abbildung II.4 – Reihenschaltung von zwei Stern–Gerlach-Versuchen mit dem ersten bzw. zweiten Apparat entlang der z - bzw. x -Richtung.

Am Ausgang des zweiten Apparats beobachtet man 50% von Spins mit einer x -Komponente $S_x = +\hbar/2$ und ebenso 50% mit einer x -Komponente $S_x = -\hbar/2$.

Die „klassisch-physikalische“ Deutung dieses Resultats wäre, dass der Strahl am Eingang des SG(x)-Messapparats zwar aus gleichpräparierten S_z^+ -Zuständen bestand, dass die Hälfte der Atome aber $S_z = +\hbar/2$ und $S_x = +\hbar/2$ hatte, die andere Hälfte $S_z = +\hbar/2$ und $S_x = -\hbar/2$. Wir werden in § II.1.2d sehen, dass sich diese Interpretation durch eine erneute Messung von S_z widersprechen lässt, und somit ungültig ist.

Bemerkung: In diesem Versuch ist der Erwartungswert der zuletzt gemessenen Größe

$$\langle S_x \rangle = 0,5 \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + 0,5 \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = 0 \quad \text{wenn} \quad S_z = +\frac{\hbar}{2}, \quad (\text{II.3})$$

wobei wir spezifiziert haben, dass vor der Messung von S_x die Spin-Komponente S_z bekannt war und $S_z = +\hbar/2$ betrug.

II.1.2c Anordnung mit zwei Apparaten entlang unterschiedlicher Richtungen

Jetzt betrachten wir den Fall, wo ein Strahl von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit positiver S_z -Komponente auf einen Stern-Gerlach-Apparat fällt, der längs einer Richtung liegt, die einen Winkel θ mit der z -Achse macht. Sei S_θ die Komponente des Spins entlang dieser Achse.

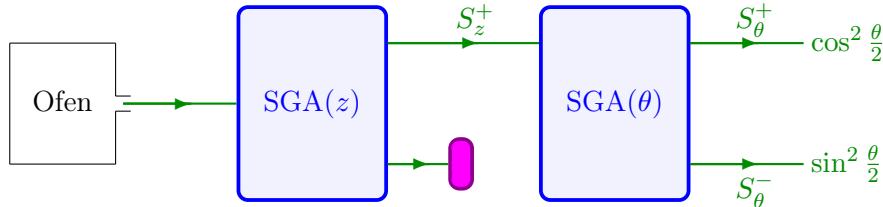
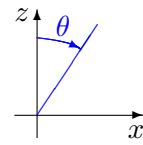


Abbildung II.5 – Reihenschaltung von zwei Stern-Gerlach-Versuchen mit Apparaten entlang unterschiedlicher Richtungen.

Am Ausgang findet man wieder nur zwei mögliche Messwerte für die Spin-Komponente, und zwar $S_\theta = +\hbar/2$, die mit der Wahrscheinlichkeit $p_\theta^+ = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ vorkommt, und $S_\theta = -\hbar/2$ mit Wahrscheinlichkeit $p_\theta^- = \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - p_\theta^+$.

Daraus folgert man den Erwartungswert von S_θ :

$$\langle S_\theta \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(+\frac{\hbar}{2} \right) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} \cos \theta \quad \text{wenn } S_z = +\frac{\hbar}{2}, \quad (\text{II.4})$$

wobei die Vorkenntnisse über die Spin-Komponente S_z spezifiziert wurde.

Bemerkung: Für $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi/2$ liegt der zweite Stern-Gerlach-Apparat entlang der z - bzw. x -Richtung, und man findet das Ergebnis aus § II.1.2 a bzw. § II.1.2 b wieder.

II.1.2d Anordnung mit drei Apparaten entlang alternierender Richtungen

Ein Experiment, das die vorgeschlagene Interpretation des Versuchs des § II.1.2 b eindeutig widerspricht, besteht im Hinzufügen eines dritten Stern-Gerlach-Apparats, der die Spin-Komponente entlang der z -Richtung in einem der Strahlen mit bekannter S_x -Komponente misst (Abb. II.6).

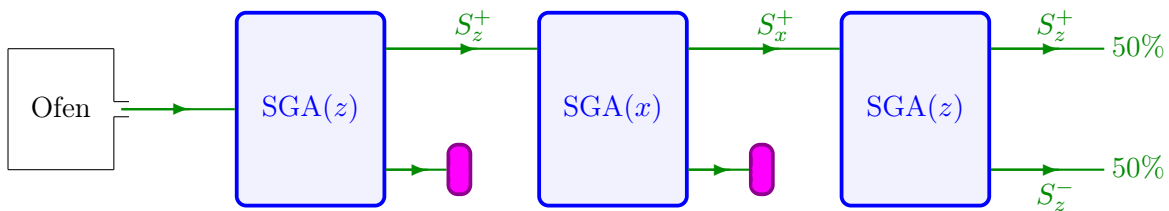


Abbildung II.6 – Reihenschaltung von zwei Stern-Gerlach-Versuchen mit dem ersten bzw. zweiten Apparat entlang der z - bzw. x -Richtung.

Am Ausgang des dritten Apparats werden nämlich sowohl Spins mit positiver als mit negativer z -Komponente beobachtet, obwohl es am Eingang des zweiten, entlang x ausgerichteten Apparats nur gleichpräparierte S_x^+ -Zustände gab.

Um dieses Resultat nachzuvollziehen, muss man akzeptieren, dass die Messung der x -Komponente des Spins den vorher präparierten S_z^+ -Zustand zerstört hat, d.h. dass die Messung nicht harmlos für das System ist.