Kapitel II

Relativistische Punktmechanik

Der Formalismus des vorigen Kapitels wird nun angewandt, um die charakteristischen Größen und Funktionen zur Beschreibung der Bewegung eines freien relativistischen Massenpunktes auszudrücken (Abschn. II.1). Dann wird die relativistische Verallgemeinerung des zweiten newtonschen Gesetzes vorgestellt (Abschn. II.2).

II.1 Bewegung eines freien relativistischen Teilchens

II.1.1 Lagrange-Funktion und Wirkung eines freien Teilchens

Die Wirkung S eines physikalischen Systems, insbesondere eines freien Teilchens, ist eine reelle Zahl. Sie hängt von Größen — Positionen, Geschwindigkeiten — ab, die vom Bezugssystem abhängen. Die physikalisch realisierte Bewegung, die sich über die Extrema der Wirkung finden lässt, sollte aber bezugssystemsunabhängig sein Um sicherzustellen, dass die Wirkung immer für die gleichen physikalischen Trajektorien extremal ist, fordert man an, dass die Wirkung ein Lorentz-Skalar ist, d.h. den gleichen Zahlenwert in allen Inertialsystemen annimmt.

Betrachte nun einen einzelnen, wechselwirkungsfreien Massenpunkt mit Masse m. Wegen der Homogenität der Raumzeit — d.h. die Invarianz der Physik unter zeitlichen und räumlichen Translationen — kann seine Lagrange-Funktion $L(t, \vec{x}, \vec{v})$ weder von der Zeit noch vom seiner Position abhängen; d.h. sie ist nur Funktion von der Geschwindigkeit $\vec{v}$. Die letztere ist zwar nicht Lorentz-invariant, jedoch die Lagrange-Funktion L selbst ist auch nicht Lorentz-invariant: nur das Produkt $L\,\mathrm{d}t$, das zwischen zwei Zeitpunkten integriert wird, soll Lorentz-invariant sein, damit S ein Lorentz-Skalar ist.

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir eine „einfache" Größe, proportional zum Zeitintervallelement $\mathrm{d}t$ und dazu Funktion der Geschwindigkeit, die Lorentz-invariant ist, und zwar das infinitesimale Eigenzeitintervall $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\vec{v}^{\,2}/c^2}\;\mathrm{d}t$, vgl. Gl. (I.25). Somit lautet ein möglicher Ansatz für die Wirkung zwischen zwei Ereignissen A, B der Raumzeit

$$S = \alpha \int_A^B \mathrm{d}\tau \tag{II.1}$$

mit einer reellen Zahl α. Diese Wirkung lässt sich noch als

$$S = \alpha \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\;\mathrm{d}t$$

umschreiben; daher entspricht der Ansatz der Lagrange-Funktion

$$L = \alpha\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}. \tag{II.2}$$

Die Taylor-Entwicklung dieser Abhängigkeit für den nicht-relativistischen Limes $|\vec{v}|/c \ll 1$ lautet

$$L = \alpha\left[1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{2c^2}+\mathcal{O}\!\left(\frac{\vec{v}^{\,4}}{c^4}\right)\right].$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammer kommt zuerst eine Konstante (α), die keine Rolle bei den Bewegungsgleichungen spielt. Der nächste Term ist $-\alpha\vec{v}^{\,2}/2c^2$: damit er mit der Lagrange-Funktion eines nicht-relativistischen freien Teilchens $\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$ übereinstimmt, soll α gleich $-mc^2$ sein. Somit lautet die Lagrange-Funktion bzw. die Wirkung eines freien relativistischen Massenpunktes

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} \tag{II.3a}$$

bzw.

$$\boxed{S = -mc^2\int_A^B \mathrm{d}\tau.} \tag{II.3b}$$

Erfahrung zeigt, dass der Ansatz (II.3a) die richtige Physik wiedergibt, insbesondere den richtigen Impuls und die richtige Energie, wie sie im nächsten Paragraphen eingeführt werden.

II.1.2 Impuls und Energie eines freien Teilchens

II.1.2 a Impuls

Gemäß der traditionellen Definition ist die i-te Komponente des konjugierten Impulses des Massenpunktes mit Lagrange-Funktion (II.3a) durch

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

gegeben, wobei hier die Komponente mit einem kovarianten Index geschrieben wurde, im Einklang mit der Division durch eine kontravariante Komponente im rechten Glied. Eine einfache Berechnung gibt dann

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} = \gamma m\vec{v}} \tag{II.4}$$

wobei γ der Lorentz-Faktor entsprechend der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist.

II.1.2 b Energie

Ausgehend von der Lagrange-Funktion lässt sich die Energie des freien relativistischen Massenpunktes als

$$E = \sum_{i=1}^{3} p_i v^i - L$$

bestimmen, d.h.

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \gamma mc^2.} \tag{II.5}$$

In Fall eines ruhenden Massenpunktes ergibt sich $E_0 = mc^2$, entsprechend der *Massenenergie* oder *Ruheenergie*. Wiederum ist die Differenz $E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$ die kinetische Energie des bewegten Massenpunktes.

Bemerkungen:

∗ Vergleicht man die Gl. (II.4) und (II.5), so findet man, dass sich die Geschwindigkeit als

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E} \tag{II.6}$$

schreiben lässt. Somit ist der nicht-relativistische Limes $|\vec{v}| \ll c$ äquivalent zu $|\vec{p}|c \ll E$.

$*$ Im Grenzwert $|\vec{v}| \to c$ geht für eine Masse $m \neq 0$ die Energie (II.5) gegen unendlich, so dass ein massives Teilchen niemals die Vakuumlichtgeschwindigkeit erreichen kann — dafür bräuche man eine unendlich große Energie, um es zu beschleunigen. In diesem Sinne ist c eine „maximale Geschwindigkeit".

II.1.2 c Viererimpuls

Definiert man $p^0 \equiv E/c$, so bilden p^0, p^1, p^2, p^3 ein 4-Tupel von Zahlen, die laut den Gl. (II.4) und (II.5) gleich m mal den Komponenten u^0, u^1, u^2, u^3 der Vierergeschwindigkeit (I.33) sind. Da die Masse m ein Lorentz-Skalar ist, sind die p^μ die Komponenten eines Vierervektors p:

$$p^\mu = m u^\mu \tag{II.7a}$$

bzw.

$$\mathsf{p} = m\mathsf{u} \tag{II.7b}$$

mit

$$\mathsf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \tag{II.8}$$

Dieser Vierervektor heißt *Viererimpuls*.

Bemerkung: Die obige Aussage „die Masse ist ein Lorentz-Skalar" ist eine eindeutige Ablehnung des Begriffs der sog. „relativistischen Masse" — wobei die letztere als das Produkt aus Lorentz-Faktor und „Ruhemasse" definiert ist.

Unter Verwendung der Definition (I.46) und der Gl. (II.4) und (II.5) beträgt das Lorentz-Quadrat p^2 des Viererimpulses (II.8)

$$\mathsf{p}^2 \equiv -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^{\,2} = -m^2c^2. \tag{II.9}$$

Dies folgt auch sofort aus der Beziehung (II.7b), die zu $\mathsf{p}^2 = m^2\,\mathsf{u}^2$ führt, oder aus einer Berechnung im Ruhesystem des Massenpunktes.

Dieses Ergebnis wird auch oft in der Form

$$E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \tag{II.10}$$

geschrieben. Ist der erste Term auf der rechten Seite viel kleiner als der zweite, d.h. $|\vec{p}| \ll mc$ — was wiederum äquivalent zu $|\vec{p}| \ll E/c$ ist, entsprechend dem nicht-relativistischen Limes —, gibt eine Taylor-Entwicklung

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2}} = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2} - \left(\frac{1}{8}\frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

d.h.

$$E = mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{p}^{\,2})^2}{8m^3c^2} + \cdots \tag{II.11}$$

Dabei erkennt man als ersten, führenden Term die Massenenergie, dann als nächsten Term die nicht-relativistische kinetische Energie, während der dritte Term (und die nächsten) eine relativistische Korrektur darstellt. Insbesondere ist im nicht-relativistischen Fall die kinetische Energie viel kleiner als die Massenenergie — die im nicht-relativistischen Rahmen aber nie ins Betracht gezogen wird, weil sie nur eine additive Konstante darstellt!

Viererimpulserhaltung

Aus der Invarianz der Wirkung (II.3b) unter zeitlichen und räumlichen Translationen folgt, dass die Energie und der Impuls Konstanten der Bewegung sind. Folglich ist der Viererimpuls (II.8) eine

Erhaltungsgröße, wie sich auch direkt aus der Invarianz der Wirkung (II.3b) unter den Raumzeittranslationen $x^\mu \to x^\mu + b^\mu$ herleiten lässt.

Mathematisch kann man die Viererimpulserhaltung als

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathsf{p}}{\mathrm{d}\tau} = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0} \tag{II.12}$$

ausdrücken: dabei wird die Ableitung nach der Eigenzeit betrachtet, um auf der linken Seite der Gleichung einen Lorentz-Vektor bzw. dessen Komponenten zu erhalten. Somit ergibt sich eine Gleichung, die in jedem Inertialsystem die gleiche Form annimmt, wie gemäß dem ersten einsteinschen Postulat (I.3) der Fall sein soll.

II.2 Kovariante Formulierung des Grundgesetzes der Mechanik

Wir haben gerade gesehen, dass der Viererimpuls eines freien Massenpunktes erhalten ist, was sich „relativistisch kovariant" als Gl. (II.12) schreiben lässt.

Unterliegt der Massenpunkt Kräften, so sollte diese Gleichung modifiziert werden: sie ändert sich nämlich im nicht-relativistischen Fall, der als Grenzwert in den relativistischen Gleichungen enthalten ist. Um die newtonsche Mechanik zu verallgemeinern, wird somit ein Vierervektor f eingeführt, die *Viererkraft*, mit Komponenten f^μ. Im Einklang mit dem nicht-relativistischen Fall sollte eine solche Viererkraft nur von der Raumzeit-Position x und der Vierergeschwindigkeit u des Massenpunktes abhängen:

$$\mathsf{f}(\mathsf{x},\mathsf{u}) \quad \text{bzw.} \quad f^\mu(x^\nu, u^\nu). \tag{II.13}$$

Beispielsweise wird in nächsten Kapitel die Form der relativistisch kovarianten Formulierung der Lorentz-Kraft angegeben.

Unter Angabe einer solchen Viererkraft — oder der Resultierenden solcher Viererkräfte —, die natürliche relativistisch kovariante Verallgemeinerung des zweiten newtonschen Gesetzes ist

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathsf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \mathsf{f}} \tag{II.14a}$$

oder äquivalent, komponentenweise

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = f^\mu.} \tag{II.14b}$$

In Abwesenheit von (Vierer)Kraft vereinfacht sich dieses Gesetz zur Viererimpulserhaltung (II.12).

Unter Einführung der *Viererbeschleunigung* des Massenpunktes

$$\mathsf{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathsf{u}}{\mathrm{d}\tau} \quad \text{bzw.} \quad a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{II.15}$$

lässt sich Gl. (II.14a) bzw. (II.14b) als

$$m\mathsf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathsf{u}}{\mathrm{d}\tau} = \mathsf{f} \quad \text{bzw.} \quad ma^\mu = m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = f^\mu \tag{II.16}$$

umschreiben.

Bemerkungen:

∗ Die oben eingeführte Viererkraft wird auch *Minkowski-Kraft* genannt.

$*$ Damit die Beziehungen (II.14), (II.16) erfüllt werden können, dürfen die Komponenten einer Viererkraft nicht beliebig sein. In der Tat folgt aus der Konstanz des Lorentz-Quadrats u^2 der Vierergeschwindigkeit, dass diese senkrecht zur Viererbeschleunigung ist: $\mathsf{u} \cdot \mathsf{a} = u_\mu a^\mu = 0$. Somit soll $\mathsf{u} \cdot \mathsf{f} = u_\mu f^\mu = 0$ gelten, d.h. nur drei Komponenten der Viererkraft sind unabhängig voneinander — z.B. die drei räumlichen Komponenten, die im nicht-relativistischen Limes die (newtonsche) Dreierkraft $\vec{F}$ wiedergeben müssen. Eigentlich findet man einfach $f^i = \gamma F^i$.

$*$ Während die Vierergeschwindigkeit zeitartig ist, ist die Viererbeschleunigung raumartig: $\mathsf{a}^2 > 0$.

II.3 Mehrteilchensysteme

Viererimpulserhaltung!