V.3 Poisson-Mechanik

V.3.1 Phasenraum-Funktionen

Die verallgemeinerten Koordinaten $\{q^\alpha\}$ und die dazu konjugierten Impulse $\{p_\alpha\}$ bestimmen den Bewegungszustand eines mechanischen Systems vollständig. Somit lässt sich jede mögliche Größe, die diesen Zustand charakterisiert — wie z.B. die Position, der Drehimpuls oder die gesamte Energie —, durch die Phasenraumkoordinaten des Systems ausdrücken.

Dementsprechend ist es sinnvoll, Funktionen von der Zeit t und den $2s$ Phasenraumkoordinaten $\{q^\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$ mit $\alpha = 1, \ldots, s$ zu betrachten. Im Rest dieses Kapitels werden solche Funktionen der Kürze halber „Phasenraum-Funktionen“ oder „Funktionen auf dem Phasenraum“ genannt, auch wenn die Zeit auch Argument der Funktion ist. Dazu wird angenommen, dass sie beliebig differenzierbar sind, ohne dass das jedes Mal erwähnt wird.

Bemerkung: Wenn die Funktion einer messbaren physikalischen Größe entspricht, anstatt nur ein mathematisches Konstrukt zu sein, wird sie auch *Observable* genannt.

V.3.2 Poisson-Klammer

V.3.2 a Definition

Definition: Seien f und g zwei Funktionen von der Zeit t und den $2s$ Phasenraumkoordinaten $\{q^\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$ mit $\alpha = 1, \ldots, s$. Ihre *Poisson*[(t)]*-Klammer* ist ebenfalls eine Phasenraum-Funktion derselben Variablen, definiert durch

$$\boxed{\{f,g\} \equiv \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha} \right),} \tag{V.19}$$

wobei die $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$-Abhängigkeit aller Funktionen nicht geschrieben wurde.

Bemerkungen:

∗ In der Literatur sind die Poisson-Klammern manchmal mit einem globalen Minus-Vorzeichen vor der rechten Seite definiert. Um nur internationale Standardreferenzen zu nennen ist die hier verwendete Konvention die gleiche wie bei Arnold [1] oder Goldstein [4, 5], während Landau & Lifschitz [13, 26] die alternative Konvention benutzen.

Auf ähnlicher Weise ist die Notation nicht universell: somit benutzen viele Autoren rechteckige Klammern $[\cdot\,,\cdot]$ — z.B. Arnold, Goldstein oder Landau & Lifschitz — um die formelle Analogie mit dem Kommutator der Quantenmechanik zu betonen.

∗ Hiernach wird die Poisson-Klammer (V.19) manchmal auch mit $\big\{f,g\big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ bezeichnet, d.h. mit expliziter Angabe der relevanten Phasenraumkoordinaten.

Für die spätere Diskussion über kanonische Transformationen in § V.3.5 ist es günstig, die Poisson-Klammer in einer Matrixform zu schreiben. Dafür führt man die s-dimensionalen Spaltenvektoren

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{q}} f \equiv \begin{pmatrix} \partial f/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial q_s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f \equiv \begin{pmatrix} \partial f/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial p_s \end{pmatrix} \tag{V.20}$$

ein. Diese können wiederum in einen Spaltenvektor mit insgesamt $2s$ Komponenten kombiniert

[(t)] S. Poisson, 1781–1740

werden. Dann ist die Poisson-Klammer von f und g durch

$$\{f,g\} = \left((\nabla_{\mathbf{q}} f)^{\mathsf{T}} \quad (\nabla_{\mathbf{p}} f)^{\mathsf{T}}\right) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_s \\ -\mathbb{1}_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} g \\ \nabla_{\mathbf{p}} g \end{pmatrix} \tag{V.21}$$

gegeben, wobei $(\nabla_{\mathbf{q}} f)^{\mathsf{T}}$ und $(\nabla_{\mathbf{p}} f)^{\mathsf{T}}$ die zu den Spaltenvektoren (V.20) transponierten Zeilenvektoren sind, während $\mathbb{1}_s$ die $s \times s$-Einheitsmatrix bezeichnet.

V.3.2 b Eigenschaften

Die Poisson-Klammer besitzt einige mathematische Eigenschaften, die sich generell problemlos beweisen lassen und deshalb hiernach nur aufgelistet werden. Der Kürze halber wird die Abhängigkeit der verschiedener Funktionen von ihren Variablen $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ nicht geschrieben.

Bilinearität Seien f, g_1, g_2 bzw. f_1, f_2, g drei Funktionen auf dem Phasenraum und $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Dann gelten

$$\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\} = \lambda_1\{f_1, g\} + \lambda_2\{f_2, g\}, \tag{V.22a}$$

$$\{f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\} = \lambda_1\{f, g_1\} + \lambda_2\{f, g_2\}. \tag{V.22b}$$

Antisymmetrie / Antikommutativität Für jedes Paar (f, g) von Funktionen auf dem Phasenraum gilt

$$\{f,g\} = -\{g,f\}. \tag{V.23}$$

Daraus folgt trivial $\{f,f\} = 0$.

Nullelemente Sei K eine Zahl; die Funktion auf dem Phasenraum, die identisch konstant gleich K ist, ist ein Nullelement, d.h. ihre Poisson-Klammer mit jeder Funktion f auf dem Phasenraum verschwindet

$$\{f,K\} = 0. \tag{V.24}$$

Produktregel Für jedes Triplett (f, g, h) von Funktionen auf dem Phasenraum gelten

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\} \tag{V.25}$$

sowie die

Jacobi[(u)]-Identität

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0. \tag{V.26}$$

Im Gegensatz zu den anderen Eigenschaften, die sich in einer Zeile nachprüfen lassen, ist der Beweis dieser Identität mühsam. Jeder der drei Terme ist eine Summe über zwei Freiheitsgrade-Indizes von 8 Beiträgen, die selbst Produkte von zwei Ableitungen und einer doppelten Ableitung sind. Das Spiel besteht darin, Indizes zu umbenennen und die Vertauschung der Ordnung der Ableitungen zu benutzen, um das gesuchte Ergebnis zu finden.

Bemerkungen:

∗ Für die dritte Eigenschaft ist eigentlich nur die Unabhängigkeit der Funktion K von den Phasenraumkoordinaten nötig: die „Konstante“ kann noch von der Zeit abhängen — entsprechend einer auf dem Phasenraum gleichförmigen Funktion —, ohne den Nullwert deren Poisson-Klammer mit jeder anderen Funktion zu ändern.

∗ Versehen mit der Addition und der Poisson-Klammer bildet die Menge der Funktionen auf dem Phasenraum eines Systems eine Algebra.

[(u)] C. G. Jacobi, 1804–1851

V.3.2 c Fundamentale Poisson-Klammern

Seien $\{q^\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,s}$ verallgemeinerte Koordinaten und $\{p_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,s}$ die zugehörigen konjugierten Impulse. Aus der Definition der Poisson-Klammer zweier Funktionen (V.19) und der Tatsache, dass die Phasenraumkoordinaten unabhängig voneinander sind, folgen die *fundamentalen Poisson-Klammern*

$$\boxed{\begin{gathered}\{q^\alpha, q^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \\ \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta\end{gathered}} \tag{V.27}$$

Bemerkung: Da die Poisson-Klammer zweier Funktionen selbst eine Funktion von der Zeit und der Phasenraumkoordinaten ist, bedeutet δ^α_β hier eine Funktion, die für $\alpha \neq \beta$ identisch Null, für $\alpha = \beta$ identisch gleich 1 ist.

Der Beweis der Beziehungen (V.27) ist trivial. Beispielsweise gilt

$$\{q^\alpha, p_\beta\} = \sum_{\gamma=1}^{s}\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial q^\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial q^\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial q^\gamma}\right) = \sum_{\gamma=1}^{s}\delta^\alpha_\gamma\delta^\gamma_\beta,$$

wobei die zweite Gleichung die Unabhängigkeit der Koordinaten ausdrückt und zu $\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$ führt.

Definition: Wenn Phasenraumkoordinaten $\{q^\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$ die Gleichungen (V.27) erfüllen, so heißen sie *kanonische Variablen*.

V.3.3 Poisson-Klammer und Zeitentwicklung

Mit Hilfe der Poisson-Klammer lässt sich die Zeitentwicklung einer Phasenraumfunktion elegant umschreiben.

V.3.3 a Zeitentwicklung einer Phasenraumfunktion

Sei jetzt f eine beliebige Funktion auf dem Phasenraum eines physikalischen Systems, dessen Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ als bekannt angenommen wird. Die Anwendung der Kettenregel gibt für die totale Ableitung von f nach der Zeit

$$\frac{\mathrm{d}f\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big)}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha(t) + \sum_{a=1}^{s}\frac{\partial f\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big)}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha(t).$$

Dabei können die Zeitableitungen $\dot{q}^\alpha(t)$, $\dot{p}_\alpha(t)$ der Koordinatenfunktionen mithilfe der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (V.4) umgeschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}\right),$$

wobei alle Funktionen im gleichen Punkt $\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big)$ auszuwerten sind. Unter Verwendung der Definition (V.19) der Poisson-Klammer lautet diese Zeitableitung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}.} \tag{V.28}$$

Insbesondere werden die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (V.4) zu

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} &= \{q^\alpha, \mathcal{H}\} \\ \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} &= \{p_\alpha, \mathcal{H}\}\end{aligned} \qquad \text{für } \alpha = 1, \ldots, s,} \tag{V.29}$$

weil die Projektionen $q^\alpha\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big) = q^\alpha$, $p_\alpha\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\big) = p_\alpha$ auf die Koordinatenachsen der Position im Phasenraum trotz ihrer Notation keine explizite Funktion der Zeit sind.

Bemerkung: Wegen der Bilinearität der Poisson-Klammer ist die Abbildung $f \mapsto \big\{f,\mathcal{H}\big\}$ bei gegebener Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ eine lineare Abbildung in f, s. Gl. (V.22a).

V.3.3 b Integrale der Bewegung

In Übereinstimmung mit Definition (II.9) ist eine Funktion $\mathcal{K}$ der Zeit t und der Phasenraumkoordinaten eine Konstante der Bewegung, auch *Integral der Bewegung* genannt, wenn sie konstant entlang der Trajektorie eines System im Phasenraum bleibt, d.h. wenn $\mathrm{d}\mathcal{K}/\mathrm{d}t = 0$. Laut Gl. (V.29) ist diese Anforderung äquivalent zu

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial t} + \big\{\mathcal{K},\mathcal{H}\big\} = 0,$$

d.h. unter Verwendung der Antikommutativität (V.23) der Poisson-Klammer

$$\mathcal{K}\big(t,\mathbf{q},\mathbf{p}\big) \text{ Integral der Bewegung} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial t} = \big\{\mathcal{H},\mathcal{K}\big\}. \tag{V.30}$$

Mithilfe der Poisson-Klammer können auch — zumindest prinzipiell — neue Integrale der Bewegung gefunden werden, und zwar dank dem

Theorem (Satz von Poisson): Seien $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zwei Konstanten der Bewegung. Dann ist ihre Poisson-Klammer $\big\{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\big\}$ auch eine Erhaltungsgröße.

Beweis: die Jacobi-Identität (V.26) mit $f = \mathcal{K}_1$, $g = \mathcal{K}_2$, $h = \mathcal{H}$ gibt

$$\big\{\mathcal{H},\{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\}\big\} = \big\{\{\mathcal{K}_2,\mathcal{H}\},\mathcal{K}_1\big\} + \big\{\{\mathcal{H},\mathcal{K}_1\},\mathcal{K}_2\big\}$$

d.h. nach Verwendung der Beziehung (V.30) für beide Konstanten der Bewegung

$$\big\{\mathcal{H},\{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\}\big\} = \bigg\{\mathcal{K}_1,\frac{\partial\mathcal{K}_2}{\partial t}\bigg\} + \bigg\{\frac{\partial\mathcal{K}_1}{\partial t},\mathcal{K}_2\bigg\} = \frac{\partial}{\partial t}\big\{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\big\},$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Austauschen von partiellen Ableitung nach der Zeit und nach Phasenraumkoordinaten folgt. Somit ist $\big\{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\big\}$ laut Gl. (V.30) erhalten. □

Bemerkung: In der Praxis ist dieser Satz nicht immer nützlich, denn seine Anwendung führt schnell entweder zur Nullfunktion, oder zu einem Integral der Bewegung, das abhängig von den schon bekannten Integralen ist, und somit nicht „neu“ ist.

Eigentlich kann ein System mit s Freiheitsgraden maximal $2s-1$ unabhängige Konstanten der Bewegung haben.