KAPITEL VII

Elektrostatik

```
VII.1 | Skalarpotential | 138 | 138 | 138 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 139 | 141 | 139 | 141 | 139 | 141 | 139 | 141 | 139 | 141 | 139 | 141 | 139 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141 | 141
```

Die Elektrostatik beschäftigt sich mit den elektrischen Feldern, die von statischen Ladungen bzw. einer stationären Ladungsverteilung $\rho_{\rm el.}(\vec{r})$ herrühren [57] Die angenommene Zeitunabhängigkeit der Konfiguration führt auch dazu, dass das elektrische und das magnetische Feld ebenfalls zeitlich konstant sind, d.h. nur vom Ort abhängen: $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$. Unter diesen Bedingungen vereinfachen sich die Maxwell–Gauß- und die Maxwell–Faraday-Gleichung [VI.1a], (VI.1c) zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{el}}(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}.$$
(VII.1a)
(VII.1b)

Somit hängt die Rotation der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ nicht mehr vom Magnetfeld ab.

Die zwei Gleichungen (VII.1) sind die Grundgleichungen der Elektrostatik, aus denen sich das elektrische Feld für eine gegebene Ladungsverteilung berechnen lässt. Aus diesen Gleichungen folgt die Existenz eines elektrischen Potentials, aus dem das elektrische Feld abgeleitet werden kann, und das einer relativ einfachen partiellen Differentialgleichung genügt (Abschn. VII.1). Methoden zur Lösung dieser Differentialgleichung, die auch in anderen Gebieten der Physik — insbesondere in der in Kap. VIII behandelten Magnetostatik — auftaucht, werden in Abschn. VII.2 dargelegt. Schließlich befasst sich Abschn. VII.3 mit einer systematischen Entwicklung des elektrostatischen Potentials bzw. Feldes in sukzessiven, immer kleiner werdenden Termen, die in großen Abständen von der Quelle des Feldes gilt.

Wegen der Zeitunabhängigkeit entkoppeln die zwei Gleichungen (VII.1) von den zwei anderen Maxwell-Gleichungen; sie besagen aber nichts über das Magnetfeld.

⁽⁵⁷⁾ Natürlich kann die Forderung der Abwesenheit von Bewegung nur in einem Bezugssystem gelten.

138 Elektrostatik

Dank der angenommenen Abwesenheit von bewegten Ladungen gibt es keinen elektrischen Ladungsstrom, $\vec{j}_{\rm el.} = \vec{0}$. Somit wird die Maxwell–Ampère-Gleichung (VI.1d) zu $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$: diese Gleichung und die Maxwell–Thomson-Gleichung (VI.1b), $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, führen dazu, dass das Magnetfeld \vec{B} nicht nur zeitunabhängig, sondern auch gleichförmig ist. Da dieses Feld keine Kraft auf statische Ladungen übt, wie aus dem Ausdruck der Lorentz-Kraftdichte (VI.2) folgt, kann es einfach vergessen werden.

VII.1 Elektrostatisches Potential

In diesem Abschnitt wird erstens das elektrostatische Potential (§ VII.1.1) mit der dadurch erfüllten Differentialgleichung (§ VII.1.2) eingeführt. Dann wird das elektrische Feld für verschiedene einfache Ladungsverteilungen berechnet und eine Formel für das von einer beliebigen Ladungsverteilung herrührende elektrostatische Potential hergeleitet (§ VII.1.3). Schließlich wird die Coulomb-Kraft zwischen zwei statischen Punktladungen aus den vorigen Ergebnissen wiedergefunden, und die potentielle Energie einer elektrischen Ladungsverteilung diskutiert (§ VII.1.4).

VII.1.1 Skalarpotential

Betrachte ein einfach zusammenhängendes Gebiet des Raums. Aus der stationären Maxwell-Faraday-Gleichung VII.1b folgt die Existenz einer differenzierbaren skalaren Funktion $\Phi(\vec{r})$ derart, dass die Beziehung

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$$
 (VII.2)

in jedem Punkt \vec{r} des Gebiets erfüllt wird. Nach Angabe eines beliebigen Punktes \vec{r}_0 kann man nämlich Φ durch

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$
 (VII.3)

definieren, wobei das Wegintegral dank dem Satz von Stokes unabhängig vom Weg ist. Somit ist $\Phi(\vec{r})$ eindeutig festgelegt, abgesehen von der beliebigen Wahl des Zahlenwerts für $\Phi(\vec{r}_0)$.

 Φ wird als *elektrostatisches Potential* oder *Skalarpotential* bezeichnet. Die zugehörige SI-Einheit ist das *Volt* (V) mit physikalischer Dimension $[\Phi] = M L^2 T^{-3} I^{-1}$.

Bemerkungen:

- * Offensichtlich ist das elektrostatische Potential Φ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, entsprechend der Wahl von $\Phi(\vec{r}_0)$ in Gl. (VII.3).
- * Wie wir im Kap. IX sehen werden, gilt Gl. (VII.2) nicht mehr im nicht-stationären Fall.

VII.1.2 Poisson-Gleichung

Das Ausdrücken des elektrostatischen Feldes in der Maxwell-Gauß-Gleichung (VII.1a) durch das Skalarpotential gemäß Gl. (VII.2) führt zur *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_{\rm el.}(\vec{r})}{\epsilon_0}$$
 (VII.4)

mit dem Laplace-Operator \triangle .

Insbesondere ergibt sich im Vakuum, d.h. in Abwesenheit von Ladungen, die Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = 0, \tag{VII.5}$$

deren Lösungen die sog. harmonischen Funktionen sind.

Die Poisson-Gleichung (VII.4) mit $\rho_{el.} \neq 0$ ist eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung; die Laplace-Gleichung (VII.5) ist die assoziierte homogene Differentialgleichung. Die Bestimmung einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung wird in Abschn. VII.2 diskutiert.

Gaußsches Gesetz

Sei $\partial \mathcal{V}$ eine geschlossene Fläche, die ein zusammenhängendes Raumvolumen \mathcal{V} einschließt. Der elektrische Fluss durch die Oberfläche $\partial \mathcal{V}$ wird als

$$\Phi_E \equiv \oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} \tag{VII.6}$$

definiert. Dabei ist $d^2\vec{S} = d^2S \ \vec{e}_n(\vec{r})$ das vektorielle Flächenelement, wobei $\vec{e}_n(\vec{r})$ den nach außen gerichteten Normaleinheitsvektor zu d^2S im Punkt \vec{r} bezeichnet.

Unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß ist das Oberflächenintegral auf der rechten Seite gleich dem Volumenintegral der Divergenz des Integranden, d.h.

$$\oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3 \vec{r}.$$

Unter Betrachtung der Maxwell-Gauß-Gleichung (VII.1a) lässt sich $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ ersetzen

$$\Phi_E = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r})}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}^3 \vec{r}.$$

Daher ergibt sich das Gaußsche Gesetz

$$\Phi_E = \frac{Q_{\nu}}{\epsilon_0},\tag{VII.7}$$

wobei $Q_{\mathcal{V}}$ die Gesamtladung im Volumen \mathcal{V} bezeichnet. Dieses Resultat stellt die globale Formulierung der lokalen Maxwell-Gauß-Gleichung (VII.1a) dar.

VII.1.3 Elektrisches Feld und Potential von Ladungen

VII.1.3 a Elektrisches Feld und Potential einer Punktladung

Eine Punktladung q befinde sich im Punkt \vec{r}_0 , während im Rest des Raums Vakuum herrscht. Dann ist die Situation kugelsymmetrisch um \vec{r}_0 . Insbesondere sollte das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in konstantem Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ von der Punktladung einen konstanten Betrag $E(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$ haben. Für die Richtung des elektrischen Feldes, die am meistens symmetrische Möglichkeit ist, das es in jedem Punkt entlang der Radialrichtung mit Einheitsvektor $(\vec{r} - \vec{r}_0)/|\vec{r} - \vec{r}_0|$ zeigt. Somit ist ein plausibler Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}.$$
 (VII.8)

Betrachte man jetzt eine in \vec{r}_0 zentrierte Kugel \mathcal{K} mit Radius R. In jedem Punkt der Kugeloberfläche $\partial \mathcal{K}$ ist das elektrische Feld normal, d.h. parallel zur Radialrichtung $\vec{r} - \vec{r}_0$, so dass

$$\oint_{\partial \mathcal{K}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} = \oint_{\partial \mathcal{K}} E(|\vec{r} - \vec{r}_0|) d^2 \mathcal{S}$$

gilt. Dabei ist $\partial \mathcal{K}$ definitionsgemäß die Menge der Punkte mit $|\vec{r} - \vec{r}_0| = R$, d.h. im Integranden kann $E(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$ durch E(R) ersetzt werden. Da dieser Term konstant über $\partial \mathcal{V}$ bleibt, kann er aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\oint_{\partial \mathcal{K}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} = E(R) \oint_{\partial \mathcal{K}} d^2 \mathcal{S} = 4\pi R^2 E(R).$$

140 Elektrostatik

Dabei wurde benutzt, dass das Oberflächenintegral im mittleren Glied genau den Flächeninhalt der Kugel mit Radius R gibt.

Dank dem Gaußschen Gesetz (VII.7) ist die linke Seite auch mit der Gesamtladung innerhalb des durch $\partial \mathcal{K}$ abgeschlossenen Volumens verknüpft. Hier ist diese Gesamtladung einfach gleich der Ladung q, die im Zentrum der Kugel liegt:

$$\oint_{\partial \mathcal{K}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$\frac{q}{\epsilon_0} = 4\pi R^2 E(R)$$
 bzw. $E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

Nach Einsetzen dieses Resultats in den Ansatz (VII.8) ergibt sich schließlich für das elektrische Feld einer Punktladung q im Punkt \vec{r}_0

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{r}_0.$$
 (VII.9a)

Man prüft problemlos nach, dass das zugehörige Skalarpotential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{r}_0$$
 (VII.9b)

lautet, wobei hier $\Phi(\vec{r}) = 0$ im Unendlichen gewählt wurde.

VII.1.3 b Elektrisches Feld und Potential mehrerer Punktladungen

Betrachte man jetzt N Punktladungen q_1, \ldots, q_N , die sich jeweils in $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ befinden, in Abwesenheit weiterer Ladungen im ganzen Raum.

Zur Bestimmung des entsprechenden elektrischen Feldes bzw. Skalarpotentials soll man nur darauf beachten, dass die Grundgleichungen der Elektrostatik — sowohl die stationären Maxwell-Gleichungen (VII.1) als äquivalent die Beziehung (VII.2) und die Poisson-Gleichung (VII.4) — linear sind. Demzufolge gilt ein Superpositionsprinzip für die Lösungen der Gleichungen: wenn $(\rho_{\text{el.,1}}(\vec{r}), \Phi_1(\vec{r}))$ und $(\rho_{\text{el.,2}}(\vec{r}), \Phi_2(\vec{r}))$ die Poisson-Gleichung (VII.4) auf \mathbb{R}^3 erfüllen, dann genügen die Funktionen $(\rho_{\text{el.,1}}(\vec{r}) + \rho_{\text{el.,2}}(\vec{r}), \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}))$ ebenfalls der Poisson-Gleichung auf \mathbb{R}^3 .

Dementsprechend lautet das Skalarpotential für die N Punktladungen

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad \text{für } \vec{r} \notin \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\},$$
(VII.10a)

wieder mit der Wahl $\Phi(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$. Das zugehörige elektrische Feld ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3} \quad \text{für } \vec{r} \notin \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\},$$
(VII.10b)

wie sich entweder aus der Gradientbildung des Skalarpotentials (VII.10a) oder aus der Superposition der elektrischen Felder (VII.9b) der individuellen Punktladungen folgern lässt.

VII.1.3 c Elektrisches Feld und Potential einer Ladungsverteilung

Ähnlich dem Übergang (IV.17) von einer diskreten Massenverteilung $\{m_a\}$, entsprechend einer endlichen Anzahl von Massenpunkten, zu einer durch eine Massendichte $\rho(\vec{r})$ beschriebenen kon-

tinuierlichen Verteilung, kann man von einer endlichen Anzahl von Punktladungen $\{q_a\}$ zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho_{\rm el.}$ übergehen, indem man das Rezept

$$\sum_{a} q_a f(\vec{r}_a) \to \int_{\mathcal{V}} f(\vec{r}) \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 \vec{r}$$
 (VII.11)

für jede Funktion f der Positionen der Punktladungen anwendet, wobei \mathcal{V} das durch die Ladungsverteilung besetzte Raumvolumen bezeichnet.

Demzufolge lautet das elektrostatische Potential bzw. Feld für eine beliebige elektrische Ladungsverteilung $\rho_{\rm el.}(\vec{r})$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \, d^3 \vec{r}', \qquad (VII.12a)$$

bzw.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\nu} \frac{\rho_{\text{el}}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \,d^3\vec{r}'.$$
 (VII.12b)

Bemerkungen:

- * Der Vorsicht halber sollte der Punkt \vec{r} außerhalb des Volumens \mathcal{V} sein, um unangenehme Divisionen durch 0 zu vermeiden.
- * Hiernach wird das Potential (VII.12a) auf eine alternative Weise hergeleitet (§ VII.2.2).
- * Setzt man in die Gl. (VII.12a) (VII.12b) die Ladungsverteilung (VI.6a) für eine Menge von Punktladungen ein, so findet man natürlich Gl. (VII.10a) und (VII.10b) wieder.

VII.1.4 Elektrostatische potentielle Energie

VII.1.4 a Coulomb-Kraft

Betrachte wieder N Punktladungen q_1, \ldots, q_N , die sich jeweils in $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ befinden. Da die Punktladung q_a ruht, lautet die darauf wirkende Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_a(\vec{r}_a) = q_a \vec{E}_a(\vec{r}_a) \tag{VII.13a}$$

wobei $\vec{E}_a(\vec{r}_a)$ das elektrische Feld bezeichnet, das die anderen Ladungen q_b mit $b \neq a$ im Punkt \vec{r}_a erzeugen. Unter Verwendung der Gl. (VII.10b) für dieses Feld folgt

$$\vec{F}_a(\vec{r}_a) = q_a \sum_{\substack{b=1\\b \neq a}}^{N} \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}.$$
 (VII.13b)

Falls es nur zwei Punktladungen q_1 , q_2 in den Punkten \vec{r}_1 , \vec{r}_2 gibt, lautet die Kraft, welche q_2 auf q_1 ausübt

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$
 (VII.14a)

Dies ist die bekannte Coulomb-Kraft, die sich aus der potentiellen Energie

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$
(VII.14b)

gemäß $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ableiten lässt, wobei $\vec{\nabla}_1$ den Gradienten bezüglich des Ortsvektors \vec{r}_1 bezeichnet.

142 Elektrostatik

Bemerkungen:

* Der Ausdruck der Coulomb-Kraft (VII.14a) einer elektrischen Punktladung auf eine andere ist antisymmetrisch unter dem Austausch der zwei Ladungen: $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$, in Übereinstimmung mit dem dritten newtonschen Gesetz (I.19).

* Wenn die Punktladungen sich relativ zu einander bewegen, ist die Kraft zwischen ihnen nicht mehr die Coulomb-Kraft (VII.14a).

VII.1.4 b Potentielle Energie

Sei $\vec{\nabla}_a$ der Gradient bezüglich des Ortsvektors \vec{r}_a der a-ten Punktladung eines Systems von N Ladungen. Wie im vorigen Paragraphen bezeichnen \vec{E}_a bzw. \vec{F}_a das elektrische Feld bzw. die Kraft der anderen Ladungen q_b mit $b \neq a$. Aus der Maxwell-Thomson-Gleichung $\vec{\nabla}_a \times \vec{E}_a = \vec{0}$ und der Gl. (VII.13a) folgt $\vec{\nabla}_a \times \vec{F}_a = \vec{0}$: laut der Behauptung vom § I.1.3 c ist die Kraft \vec{F}_a konservativ. Genauer gilt

$$\vec{F}_a(\vec{r}_a) = -\vec{\nabla}_a V(\{\vec{r}_b\}) \tag{VII.15a}$$

mit einer potentiellen Energie V, die durch (58)

$$V(\{\vec{r}_b\}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d=1\\c \neq d}}^{N} \frac{q_c q_d}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_c - \vec{r}_d|}$$
(VII.15b)

gegeben ist. Alternativ gilt

$$V(\{\vec{r}_b\}) = \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{N} q_c \Phi_c(\vec{r}_c), \qquad (VII.15c)$$

wobei Φ_c durch Gl. (VII.10a) mit $\vec{r} = \vec{r}_c$ und Summierung über die Punktladungen q_d mit $d \neq c$ gegeben wird.

Beweis: Mit dem Potential (VII.15b) gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{split} -\vec{\nabla}_{a}V &= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d=1\\c\neq d}}^{N}\frac{q_{c}q_{d}}{4\pi\epsilon_{0}}\vec{\nabla}_{a}\bigg(\frac{1}{|\vec{r}_{c}-\vec{r}_{d}|}\bigg) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d=1\\c\neq d}}^{N}\frac{q_{c}q_{d}}{4\pi\epsilon_{0}}\bigg(-\delta_{ca}\frac{\vec{r}_{c}-\vec{r}_{d}}{|\vec{r}_{c}-\vec{r}_{d}|^{3}} + \delta_{da}\frac{\vec{r}_{c}-\vec{r}_{d}}{|\vec{r}_{c}-\vec{r}_{d}|^{3}}\bigg) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{d\neq a}\frac{q_{a}q_{d}}{4\pi\epsilon_{0}}\frac{\vec{r}_{a}-\vec{r}_{d}}{|\vec{r}_{a}-\vec{r}_{d}|^{3}} - \frac{1}{2}\sum_{c\neq a}\frac{q_{a}q_{c}}{4\pi\epsilon_{0}}\frac{\vec{r}_{c}-\vec{r}_{a}}{|\vec{r}_{c}-\vec{r}_{a}|^{3}}. \end{split}$$

Ersetzt man d bzw. c durch b in der ersten bzw. zweiten Summe der zweiten Zeile, so sind beide Summanden gleich und man findet genau das gesuchte Ergebnis (VII.13b).

Im Limes einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho_{\rm el.}$ wird die potentielle Energie (VII.15c) zu

$$V = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \, d^3 \vec{r}$$
(VII.16)

mit dem Raumvolumen $\mathcal V$, das die Ladungsverteilung besetzt; eigentlich kann $\mathcal V$ durch $\mathbb R^3$ ersetzt werden

Bemerkung: Die letztere Gleichung könnte auf erster Sicht verwirrend sein, denn das elektrostatische Potential Φ im Integral wird in einem Punkt betrachtet, wo sich Ladungen befinden. Das heißt, dass

⁽⁵⁸⁾ Dieser Ausdruck stimmt natürlich mit der durch Gl. II.18 — hier ohne äußeres Potential — definierten gesamten potentiellen Energie eines Mehrteilchensystems überein.

dies nicht dem Gültigkeitsbereich der Gl. (VII.12a) entspricht, für die der Punkt \vec{r} außerhalb der Ladungsverteilung sein soll. Dies bedeutet nur, dass $\Phi(\vec{r})$ nicht durch Gl. (VII.12a) gegeben ist.

VII.1.4 c Energie des elektrostatischen Feldes

Die potentielle Energie (VII.16) einer Ladungsverteilung $\rho_{el.}$ lässt sich auch durch das elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$, das die Verteilung erzeugt, ausdrücken.

In der Tat gilt

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})^2}{2} \, \mathrm{d}^3 \vec{r},$$
 (VII.17a)

wobei das Integrand als die *elektrische Energiedichte* $e_{\rm el.}(\vec{r})$ des Feldes im Punkt \vec{r} interpretiert werden kann:

$$e_{\rm el.}(\vec{r}) \equiv \frac{\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})^2}{2}.$$
 (VII.17b)

Zum Beweis dieses Ergebnisses kann man das Integral auf der rechten Seite der Gl. (VII.16) zuerst über das Volumen einer Kugel mit Radius R berechnen, und am Ende den Grenzwert $R \to \infty$ betrachten. Dank der Maxwell–Gauß-Gleichung (VII.1a) gilt

$$\frac{1}{2} \int_{|\vec{r}| < R} \rho_{\mathrm{el.}}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 \vec{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{|\vec{r}| < R} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right] \Phi(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 \vec{r}.$$

Dabei lässt sich das Integrand mithilfe der Identität

$$[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})] \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot [\Phi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot [\Phi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] + \vec{E}(\vec{r})^2$$

umschreiben:

$$\frac{1}{2} \int_{|\vec{r}| \leq R} \rho_{\mathrm{el.}}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3 \vec{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{|\vec{r}| \leq R} \vec{\nabla} \cdot \left[\Phi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] \mathrm{d}^3 \vec{r} + \int_{|\vec{r}| \leq R} \frac{\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})^2}{2} \,\mathrm{d}^3 \vec{r}.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite gibt das gesuchte Ergebnis im Limes $R \to \infty$, so dass man nun beweisen soll, dass der erste Term in diesem Limes verschwindet. Tatsächlich kann das erste Volumenintegral auf der rechten Seite mit dem Gaußschen Integralsatz in ein Oberflächenintegral über die Kugeloberfläche transformiert werden:

$$\int_{|\vec{r}| \le R} \vec{\nabla} \cdot \left[\Phi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right] d^3 \vec{r} = \oint_{|\vec{r}| = R} \Phi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}.$$

Wenn R groß genug ist, befinden sich alle Ladungen innerhalb der Kugel $|\vec{r}| \leq R$. Dann nehmen das elektrostatische Potential und das Feld mit R ab, gemäß (59)

$$\Phi(R) \propto \frac{1}{R}, \quad |\vec{E}(R)| \propto \frac{1}{R^2}.$$

Dagegen gilt $d^2 S = R^2 d^2 \Omega$ mit dem Raumwinkelelement $d^2 \Omega$. Insgesamt kommt

$$\oint_{|\vec{r}|=R} \Phi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} \propto 4\pi R^2 \frac{1}{R} \frac{1}{R^2} \propto \frac{1}{R},$$

so dass dieser Term im Grenzwert $R \to \infty$ Null wird.

⁽⁵⁹⁾ Dies folgt aus dem Gaußschen Gesetz (VII.7), unter Verwendung des gleichen Arguments wie in § VII.1.3 a