

KAPITEL IX

Quantenelektrodynamik

IX.1	Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik	73
IX.2	Grundlegende Prozesse	74
IX.2.1	Prozess erster Ordnung	74
IX.2.2	Elastische Prozesse zweiter Ordnung	75
IX.2.3	Inelastische Prozesse zweiter Ordnung	77
IX.2.4	Wichtige Prozesse dritter Ordnung	79
IX.3	Wirkungsquerschnitt für elastische Elektron–Myon-Streuung	80
IX.3.1	Unpolarisiertes Amplitudenbetragsquadrat	80
IX.3.2	Mott- und Rutherford-Formel	82
IX.3.3	Wirkungsquerschnitt bei großem Energieübertrag	83

Dieses Kapitel befasst sich mit einer ersten Wechselwirkung, welcher die experimentell bewiesenen Elementarteilchen unterliegen, und zwar mit der Quantenelektrodynamik (QED), die das quantenfeldtheoretische Pendant zum Elektromagnetismus darstellt.

Historisch wurde die QED auch als erste entwickelt, und zwar in den Jahren 1946–1951 durch Richard Feynman, Julian Schwinger^(af) und Shin-Ichirō Tomonaga^(ag), die dafür den Nobelpreis erhalten haben, sowie F. Dyson, der die Äquivalenz der Theorien der drei ersteren gezeigt hat. Manche der wichtigen historischen Artikel werden in [14] gesammelt.

Dabei handelt es sich um die am genauesten verifizierte Theorie der Physik, dank einerseits experimentellen Messungen mit sehr geringen Messfehlern und andererseits hochpräzisen Berechnungen. Das Musterbeispiel dafür ist das magnetische Dipolmoment des Elektrons μ_e — genauer, dessen Betrag —, gemessen in Einheiten des Bohr’schen^(ah) Magnetons $\mu_B = e\hbar/2m_e$ (in SI-Einheiten). Definiert man $a_e \equiv |\mu_e|/\mu_B$, so findet man experimentell [15]⁽³²⁾

$$a_e^{\text{exp}} = 1,001\,159\,652\,180\,91(26)$$

und in störungsrechnerischen Berechnungen bis zur 10. Potenz der Kopplungskonstante [17]⁽³³⁾

$$a_e^{\text{th}} = 1,001\,159\,652\,181\,643(764).$$

Somit stimmen Experiment und Theorie bis zur 12. Stelle nach dem Komma überein.⁽³⁴⁾

⁽³²⁾Dieser Mittelwert über verschiedene Experimente spiegelt meistens die Ergebnisse von [16] wider.

⁽³³⁾Zur Ordnung $\mathcal{O}(e^{10})$ tragen 12672 unterschiedliche quantenelektrodynamische Feynman-Diagramme bei. Zum Vergleich gilt zur 8. Ordnung $a_e^{\text{th}} = 1,001\,159\,652\,182\,79(771)$ [18], mit „nur“ 891 Diagrammen der Ordnung $\mathcal{O}(e^8)$.

⁽³⁴⁾Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist im Fall des magnetischen Dipolmoments des Myons nicht so beeindruckend: $a_\mu^{\text{exp}} = 1,001\,165\,920\,89(63)$ einerseits [15], $a_\mu^{\text{th}} = 1,001\,165\,918\,40(59)$ andererseits [19]. Der letztere Wert enthält aber, neben dem bis zur Ordnung $\mathcal{O}(e^{10})$ berechneten QED-Beitrag, auch einen weniger kontrollierten Beitrag aus der hadronischen Physik, der die Diskrepanz teilweise erklären könnte — und ist viel kleiner bei a_e^{th} .

^(af)J. SCHWINGER, 1918–1994 ^(ag)S.-I. TOMONAGA, 1906–1979 ^(ah)N. BOHR, 1885–1962

In Abschn. IX.1 wird der Term für die Wechselwirkung von elektrisch geladenen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit Photonen eingeführt. Die wichtigsten daraus folgenden quantenelektrodynamischen Prozesse niedriger Ordnung werden in Abschn. IX.2 anhand deren Feynman-Diagramme vorgestellt. Dann wird in Abschn. IX.3 der totale Wirkungsquerschnitt für den einfachsten jener Prozesse berechnet.

IX.1 Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik

Die Quantenelektrodynamik beschreibt die Wechselwirkung elektrisch geladener Teilchen bzw. der damit assoziierten Feldoperatoren mit einem masselosen Vektorfeldoperator $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$. Dabei entspricht der Letztere dem Viererpotential des klassischen elektromagnetischen Feldes, und wird als Feldoperator für *Photonen* (mit Spin 1 und Masse 0) interpretiert. Im Rahmen der Elementarteilchenphysik haben alle elektrisch geladenen Teilchen — bis auf die elektroschwachen Bosonen W^\pm — den Spin $\frac{1}{2}$ und werden daher durch Dirac-Spinoren $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ beschrieben. Deshalb wird hiernach nur auf die Wechselwirkung zwischen Spinoren und Photonen eingegangen.

Betrachte zunächst nur ein Elektron oder allgemeiner ein einziges geladenes Lepton, das durch einen Dirac-Spinor-Feldoperator $\hat{\psi}_\ell(\mathbf{x})$ beschrieben wird. Dessen Wechselwirkung mit dem Vektorpotential wird durch den folgenden Term in der Lagrange-Dichte gegeben:

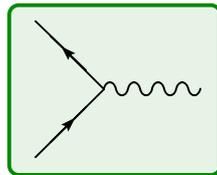
$$\hat{\mathcal{L}}_I = e\hat{\psi}_\ell(\mathbf{x})\gamma^\mu\hat{A}_\mu(\mathbf{x})\hat{\psi}_\ell(\mathbf{x}). \quad (\text{IX.1})$$

Dabei ist die Kopplungskonstante gleich der *Elementarladung* e , entsprechend dem Betrag der Elektronenladung. Statt der Letzteren benutzt man oft die *Feinstrukturkonstante* α_{em} , definiert durch

$$\alpha_{\text{em}} \equiv \frac{e^2}{4\pi}. \quad (\text{IX.2})$$

Im SI-Einheitensystem gilt $\alpha_{\text{em}} = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$. Der 2014 von CODATA empfohlene Wert, der in Prozessen mit kleinen Energieüberträgen gilt, beträgt $\alpha_{\text{em}}^{-1} \approx 137,035\,999$ [15].

In Übereinstimmung mit der in Kap. VIII eingeführten Feynman-Regel ② entspricht der Wechselwirkungsterm (IX.1) einem einzigen Drei-Teilchen-Vertex, wo sich eine Spin-1- und zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Linien treffen:



(IX.3)

Einem solchen Vertex wird in einer Amplitude ein Faktor $ie\gamma^\mu$ zugeordnet.

Hier sollten die Feynman-Regeln in Anwesenheit von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen präzisiert werden. Hat man in einem Feynman-Diagramm solche (Anti)Teilchen, so gibt es zwei Möglichkeiten: bei der Linie handelt es sich entweder um eine Linie, die zwei externe Linien miteinander verbindet, oder um eine innere Schleife.

Im ersten Falle muss man für die Berechnung des Beitrags zur Teilamplitude von dem Endpunkt der Linie, der ein einlaufendes Teilchen bzw. ein auslaufendes Antiteilchen darstellt, anfangen, und den entsprechenden Beitrag $u(\vec{p}, \sigma)$ bzw. $v(\vec{p}, \sigma)$ ganz rechts schreiben. Folgt man dann der Linie in die mit einem Pfeil gekennzeichnete Richtung des Ladungsstroms weiter, so trifft man aufeinander folgende Vertices und innere Linien: die zugehörigen Vertexfaktoren (IX.3) (im Falle von QED-Vertices) und Propagatoren (VIII.2b) müssen von rechts nach links geschrieben werden. Schlussendlich kommt ganz links der Beitrag für den zweiten Endpunkt der Linie, d.h. für ein auslaufendes Teilchen bzw. ein einlaufendes Antiteilchen, entsprechend einem Faktor $\bar{u}(\vec{p}', \sigma')$ bzw. $\bar{v}(\vec{p}', \sigma')$.

Im Falle einer inneren Fermion-Schleife kann man von einem beliebigen Vertex anfangen, dann entgegen der Pfeilrichtung für den Ladungsstrom die sukzessiven Vertexfaktoren und Propagatoren von links nach rechts schreiben. Am Ende bildet man die Spur (vgl. Regel ©), deren Zyklizität die freie Wahl des Anfangsvertex ermöglicht.

Bisher wurde nur die Wechselwirkung zwischen einer einzigen Art von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und dem Photon betrachtet. Sei jetzt eine Theorie mit mehreren elektrisch geladenen Fermionen, die hiernach mit einem Index j gekennzeichnet werden, mit jeweiligen elektrischen Ladungen Q_j (in Einheiten von e) und Feldoperatoren $\hat{\psi}_j(x)$. Dann lautet der QED-Wechselwirkungsterm in der Lagrange-Dichte

$$\hat{\mathcal{L}}_I = - \sum_j Q_j e \hat{\psi}_j(x) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(x) \hat{\psi}_j(x). \quad (\text{IX.4})$$

Im Fall $Q_j = -1$, wie z.B. für das Elektron oder das Myon, findet man den Term (IX.1) wieder.

Entsprechend jedem Summanden in Gl. (IX.4) kann man für jede Teilchenart j einen Drei-Teilchen-Vertex des Typs (IX.3) zeichnen, dem der Vertexfaktor $-iQ_j e \gamma^\mu$ zugeordnet ist.

Bemerkungen:

* Der Wechselwirkungsterm $\hat{\mathcal{L}}_I$ in Gl. (IX.1) oder (IX.4) ist ein Lorentz-invariantes komplexwertiges Funktional der Feldoperatoren, auch wenn die Letzteren nicht Lorentz-invariant sind.

Man kann nämlich zeigen, dass sich die vier Komponenten $\mu = 0, 1, 2, 3$ des Produkts $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ für einen beliebigen Dirac-Spinor ψ unter Lorentz-Transformationen verhalten, wie solche eines (kontravarianten) Vierervektors.

* An einem quantenelektrodynamischen Vertex bleibt die Art des beteiligten Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens unverändert. Dies wird bei der schwachen Wechselwirkung nicht mehr der Fall sein.

* In der skalaren Elektrodynamik, die die Wechselwirkung zwischen Photonen und elektrisch geladenen Spin-0-Teilchen (wie z.B. Pionen π^\pm) beschreibt, gibt es zwei Vertices, statt nur einen.

IX.2 Grundlegende Prozesse

Die ganzen Prozesse der Quantenelektrodynamik beruhen auf dem einfachen Term (IX.4) bzw. auf dem elementaren Vertex (IX.3), wobei das propagierende Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen eines der Elementarteilchen des Standard-Modells ist. In diesem Abschnitt werden die Feynman-Diagramme für die einfachsten dieser Prozesse dargestellt.

IX.2.1 Prozess erster Ordnung

Die Wechselwirkung zwischen einem Photon, das einem magnetischen Feld entspricht, und einem Elektron, hängt vom magnetischen Dipolmoment des Elektrons ab. Zur niedrigsten Ordnung wird der Prozess durch das Feynman-Diagramm der Abb. IX.1 beschrieben.

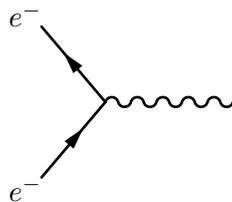


Abbildung IX.1 – Feynman-Diagramm für das magnetische Dipolmoment zur Ordnung $\mathcal{O}(e)$.

Zu dieser Ordnung gilt $|\mu_e| = \mu_B \propto e$.

IX.2.2 Elastische Prozesse zweiter Ordnung

Mit zwei Vertices findet man mehr Prozesse, insbesondere verschiedene elastische Streuprozesse.

IX.2.2a Elektron–Myon-Streuung

Das einfachste Beispiel davon ist der Streuprozess $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ mit zwei verschiedenen Teilchenarten im Anfangszustand — und folglich im Endzustand. Der Klarheit halber wird hier das Myon mit einer doppelten Linien bezeichnet, um den Unterschied mit dem Elektron zu betonen.

Das einzige mögliche Feynman-Diagramm in der QED mit einem Elektron und einem Myon im Anfangs- und im Endzustand und nur zwei Vertizes wird in Abb. IX.2 dargestellt. Es besteht aus zwei elementaren Vertizes, und zwar einem für die Elektron-Photon-Wechselwirkung und einem für die Myon-Photon-Wechselwirkung.

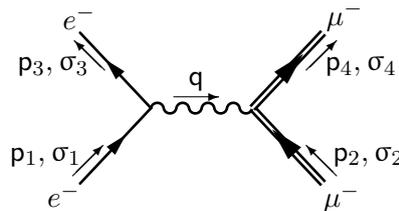


Abbildung IX.2 – Feynman-Diagramm für Elektron–Myon-Streuung zur führenden Ordnung.

Die Amplitude, die diesem Diagramm entspricht, wird in Abschn. IX.3 gegeben [Gl. (IX.6)] und dort benutzt, um den zugehörigen Wirkungsquerschnitt zu berechnen.

In diesem Prozess kann das Myon durch irgendein anderes elektrisch geladenes Teilchen j bis auf ein Elektron ersetzt werden. In allen Fällen gilt dann $m_j > m_e$. Im Grenzfall $m_j \rightarrow \infty$, was physikalisch für $m_j \gg m_e$ relevant ist, wird der Prozess als *Mott^(ai)-Streuung* bezeichnet — und der differentielle Wirkungsquerschnitt wird unabhängig von der Masse des schweren Teilchens.

Hat das einfallende Elektron dazu eine geringe relative Geschwindigkeit $v_e \rightarrow 0$, so spricht man von *Rutherford^(aj)-Streuung* in Anlehnung am ursprünglichen Rutherford-Streuexperiment⁽³⁵⁾ an schwere Atomkerne.

IX.2.2b Elektron–Elektron-Streuung

Wenn die zwei Teilchen im Anfangszustand identisch sind, als z.B. im Falle des Streuprozesses $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, spricht man von *Møller-Streuung*. Aufgrund der Ununterscheidbarkeit der auslaufenden Teilchen sollen dann zwei Diagramme betrachtet werden.

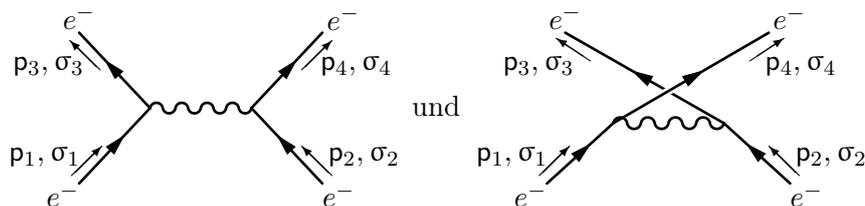


Abbildung IX.3 – Feynman-Diagramme für Møller-Streuung zur führenden Ordnung.

Dabei unterscheiden sich die Diagramme daran, dass in dem einen das einlaufende Elektron mit Viererimpuls p_1 nach der Streuung den Viererimpuls p_3 hat (links), während es im anderen Fall mit dem Viererimpuls p_4 ausläuft (rechts). Somit folgt die Teilamplitude für das Diagramm rechts aus der Amplitude für das linke Diagramm nach Austausch von p_3 und σ_3 gegen p_4 und σ_4 . Aufgrund

⁽³⁵⁾ ... eigentlich durchgeführt durch Geiger^(ak) & Marsden^(al) mit Spin-0-Projektileilchen (α -Teilchen), statt Spin- $\frac{1}{2}$ wie hier. ...

^(ai) N. F. MOTT, 1905–1996 ^(aj) E. RUTHERFORD, 1871–1937 ^(al) H. GEIGER, 1882–1945 ^(ak) E. MARSDEN, 1889–1970

der Regel ⑧ muss eine der Teilamplituden mit (-1) multipliziert werden, bevor die beiden addiert werden.

IX.2.2c Elektron–Positron–Streuung

Der letzte elastische Streuprozess zwischen zwei Fermionen ist die Streuung eines Teilchens mit dem zugehörigen Antiteilchen, z.B. die *Bhabha*^(am)-Streuung $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$. Zur Ordnung e^2 tragen die zwei in Abb. IX.4 dargestellten Feynman-Diagramme bei.

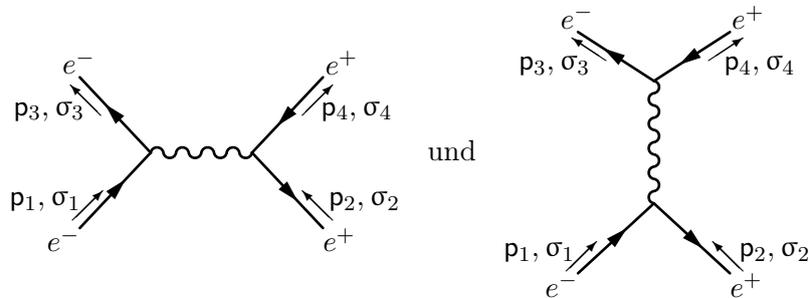


Abbildung IX.4 – Feynman-Diagramme für Bhabha-Streuung zur führenden Ordnung.

Betrachtet man diese zwei Diagramme, so sieht man, dass das zweite sich aus dem ersten erhalten lässt durch den Austausch des mit 3 gekennzeichneten auslaufenden Elektrons mit dem mit 2 gekennzeichneten einlaufenden Positron. Somit soll hier auch eine der Teilamplituden von der anderen subtrahiert werden.

IX.2.2d Elektron–Photon–Streuung

Schließlich bleibt noch ein elastischer Prozess der Ordnung e^2 übrig, und zwar die *Compton*^(an)-Streuung $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$. es gibt wieder zwei mögliche Feynman-Diagramme, die in Abb. IX.5 dargestellt werden.

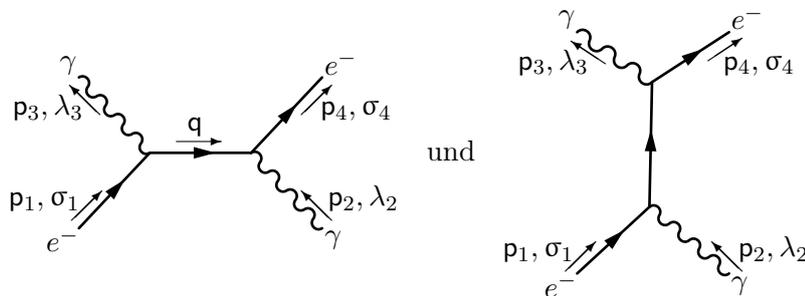


Abbildung IX.5 – Feynman-Diagramme für Compton-Streuung zur führenden Ordnung.

Für die zugehörigen Amplituden spielt die oben angegebene Regel für die Anordnung der Vertices und Propagatoren entlang einer Fermion-Linie eine Rolle. Beispielsweise lautet die Amplitude des linken Diagramms

$$\mathcal{M} = i \varepsilon_{(\lambda_2)}^\mu(\vec{p}_2) \bar{u}(\vec{p}_4, \sigma_4) (i e \gamma_\mu) \frac{i(\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_e)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 - m_e^2} (i e \gamma_\nu) u(\vec{p}_1, \sigma_1) \varepsilon_{(\lambda_3)}^\nu(\vec{p}_3)$$

wobei der Viererimpuls $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ getragen durch die innere Elektron-Linie — mit der Masse m_e im Propagator — aus der Viererimpulserhaltung (Regel ④) folgt. Unter Verwendung der kürzeren Notationen $u(i) \equiv u(\vec{p}_i, \sigma_i)$, $\varepsilon^\mu(j) \equiv \varepsilon_{(\lambda_j)}^\mu(\vec{p}_j)$ lässt sich diese Teilamplitude schreiben als

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(4) \not{\varepsilon}(2) \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_e}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 - m_e^2} \not{\varepsilon}(3) u(1).$$

Die Teilamplitude für das Diagramm rechts erfolgt durch Ersetzen von $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ durch $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ und Austauschen von $\not{\varepsilon}(2)$ mit $\not{\varepsilon}(3)$.

^(am)H. J. BHABHA, 1909–1966 ^(an)A. COMPTON, 1892–1962