V.3 Lösung der freien Dirac-Gleichung

Dieser Abschnitt geht auf die Lösungen der Gleichung (V.6) und einige deren Eigenschaften ein, beginnend mit ebenen Wellen (§ V.3.1). Dann wird die zweite Quantisierung dieser Lösungen in § V.3.2 kurz dargestellt. Schließlich befasst sich § V.3.3 mit zwei Größen, die eine Lösung charakterisieren.

V.3.1 Wellenlösungen

Da die Dirac-Gleichung eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist, sucht man nach Lösungen in Form von ebenen Wellen.

Sei also

$$\psi(\mathsf{x}) = u(\vec{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}, \tag{V.20}$$

wobei der Dirac-Spinor $u(\vec{p})$ ortsunabhängig ist. Dieser spielt die gleiche Rolle, wie der Polarisationsvektor bei den Lösungen der Maxwell-Gleichungen [vgl. Abschn. IV.2].

Setzt man diesen Ansatz in die Dirac-Gleichung (V.6a) ein, so kommt dank der Beziehung $\mathrm{i}\hbar\partial_\mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar} = p_\mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ die Gleichung

$$\big(\gamma^\mu p_\mu - mc\big)u(\vec{p}) = \big(\not{p} - mc\big)u(\vec{p}) = 0. \tag{V.21a}$$

Diese Gleichung bedeutet, dass $u(\vec{p})$ Eigenvektor der Matrix $\not{p}$ mit dem Eigenwert mc ist. In der Standard-Darstellung (V.3) der Dirac-Matrizen lautet dies

$$\begin{pmatrix} (p^0 - mc)\mathbb{1}_2 & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & (-p^0 - mc)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A(\vec{p}) \\ u_B(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{V.21b}$$

mit einspaltigen zweikomponentigen Vektoren $u_A(\vec{p})$ und $u_B(\vec{p})$, während $\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \equiv p^j\sigma_j$ mit den Pauli-Matrizen σ_j. Diese Matrixgleichung gibt sofort

$$\begin{pmatrix} (p^0 - mc)u_A(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_B(\vec{p}) \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_A(\vec{p}) - (p^0 + mc)u_B(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$u_A(\vec{p}) = \frac{1}{p^0 - mc}\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_B(\vec{p}), \qquad u_B(\vec{p}) = \frac{1}{p^0 + mc}\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,u_A(\vec{p}).$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so ergibt sich

$$u_A(\vec{p}) = \frac{1}{(p^0)^2 - m^2c^2}\big(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\big)^2 u_A(\vec{p}) = \frac{1}{(p^0)^2 - m^2c^2} p^i\sigma_i\,p^j\sigma_j\,u_A(\vec{p}).$$

Unter Verwendung der Beziehung $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1}_2 + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\sigma_k$ findet man $p^i\sigma_i\,p^j\sigma_j = \vec{p}^{\,2}\,\mathbb{1}_2$, so dass die letztere Gleichung auch als

$$u_A(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{(p^0)^2 - m^2c^2}\,u_A(\vec{p})$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt, dass die Komponenten des Vierervektors p im Lösungsansatz (V.20) die Relation $\vec{p}^{\,2} = (p^0)^2 - m^2c^2$ erfüllen sollen, d.h.

$$p^0 c = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4} = \pm E_{\vec{p}}. \tag{V.22}$$

Somit hat die Dirac-Gleichung (V.6a), ähnlich wie die Klein–Gordon-Gleichung (III.4), zwei Arten von Lösungen, und zwar mit „positiver Energie“ ($p^0 > 0$) sowie mit „negativer Energie“ ($p^0 < 0$). Beide Wellenarten sind durch Viererimpulse p charakterisiert, die der relativistischen Energie–Impuls-Beziehung $(p^0)^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2c^2$ genügen.

Bemerkungen:

∗ Alternativ kann man ausgehend von der Matrixgleichung (V.21) sagen, dass diese nur dann nichttriviale Lösungen hat, wenn die Determinante der Matrix $\not{p} - mc\mathbb{1}_4$ verschwindet, was sofort zur Bedingung (V.22) führt.

∗ Natürlich ist es ziemlich bedeutsam, dass die Lösungen mit negativer Energie wieder vorkommen, obwohl eines der Ziele Diracs bei der Suche nach einer relativistischen Wellengleichung von erster Ordnung in der Zeit war, solche Lösungen zu vermeiden.

V.3.1 a Lösungen positiver oder negativer Energie

Multipliziert man die Gl. (V.21a) links mit γ^0, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relationen (V.2) $(p^0 - p^k\gamma^0\gamma^k - mc\gamma^0)u(\vec{p}) = 0$, d.h.

$$\big(mc\gamma^0 - p^k\gamma^0\gamma^k\big)u(\vec{p}) = p^0 u(\vec{p}).$$

Diese Gleichung stellt für jeden $\vec{p}$ eine Eigenwert-Gleichung für die Matrix $mc\gamma^0 - p^k\gamma^0\gamma^k$ dar. Nach Gl. (V.22) sind die möglichen Eigenwerte entweder $p^0 = +E_{\vec{p}}/c$ oder $p^0 = -E_{\vec{p}}/c$. Da die Matrix $mc\gamma^0 - p^k\gamma^0\gamma^k$ spurlos ist, soll jeder Eigenwert zweimal vorkommen.

Zunächst werden die Lösungen mit „positiver Energie" $p^0 > 0$ betrachtet und als $u(\vec{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ geschrieben, wobei $u(\vec{p})$ eine Lösung von Gl. (V.21a) ist. Dank der Beziehung

$$\big(\not{\mathsf{p}} - mc\,\mathbb{1}_4\big)\big(\not{\mathsf{p}} + mc\,\mathbb{1}_4\big) = \big(\mathsf{p}^2 - m^2c^2\big)\mathbb{1}_4$$

kann man für den Dirac-Spinor $u(\vec{p})$ die Form

$$u(\vec{p}) = \mathcal{N}_+(\vec{p})\big(\not{\mathsf{p}} + mc\big)u_0$$

annehmen, wobei $\mathcal{N}_+(\vec{p}) \in \mathbb{R}$ eine ($\vec{p}$-abhängige, vgl. § V.3.1 c) Normierungskonstante und u_0 ein $\vec{p}$-unabhängiger Dirac-Spinor sind.

Die zwei unabhängigen „Spinzustände", entsprechend der oben diskutierten zweifachen Entartung des Eigenwerts $p^0 = +E_{\vec{p}}/c$, werden als

$$u_0 = \begin{pmatrix} \xi_\pm \\ 0 \end{pmatrix}$$

gewählt, wobei die zweikomponentigen Spaltenvektoren $\xi_\pm$ durch

$$\xi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{V.23}$$

definiert sind. Unter Nutzung der Bezeichnung $\sigma \equiv \pm$ lautet die Lösung mit Impuls $\vec{p}$ und „positiver Energie" $p^0 > 0$

$$u(\vec{p},\sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})\big(\not{\mathsf{p}} + mc\big)\begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{V.24}$$

In der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen lautet diese Lösung

$$u(\vec{p},\sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})\begin{pmatrix} \big(E_{\vec{p}}/c + mc\big)\xi_\sigma \\ \big(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\big)\xi_\sigma \end{pmatrix}. \tag{V.25}$$

Sei $v(\vec{p})\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mathsf{p}\cdot\mathsf{x}/\hbar}$ eine Lösung „negativer Energie", wobei jetzt $p^0 = +E_{\vec{p}}/c$ (dank einer Umbenennung $p^\mu \to -p^\mu$ im Exponenten, vgl. § III.2.1). Man prüft schnell nach, dass $v(\vec{p})$ der Gleichung

$$\big(\gamma^\mu p_\mu + mc\big)v(\vec{p}) = \big(\not{\mathsf{p}} + mc\big)v(\vec{p}) = 0 \tag{V.26}$$

genügen soll. Als Lösungsansatz kann man die Form

$$v(\vec{p}) = \mathcal{N}_-(\vec{p})\big(\not{\mathsf{p}} - mc\big)v_0$$

mit einer Normierungskonstanten $\mathcal{N}_-(\vec{p})$ und einem Dirac-Spinor v_0 annehmen. Für den Letzteren sind zwei mögliche unabhängige Wahlen

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\mp \end{pmatrix},$$

wobei ξ_+ und ξ_- durch Gl. (V.23) gegeben sind. Somit gilt schließlich für die Lösungen mit Impuls $\vec{p}$ und „negativer Energie“

$$v(\vec{p},\sigma) = \mathcal{N}_-(\vec{p})\big(\not{p} - mc\big)\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-\sigma} \end{pmatrix}. \tag{V.27}$$

In der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen lautet dies

$$v(\vec{p},\sigma) = -\mathcal{N}_-(\vec{p})\begin{pmatrix} (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\,\xi_{-\sigma} \\ \big(E_{\vec{p}}/c + mc\big)\,\xi_{-\sigma} \end{pmatrix}. \tag{V.28}$$

Bemerkung: Die konventionelle Wahl des zweikomponentigen Basisvektors $\xi_{-\sigma}$ als Baustein in der Konstruktion des Dirac-Spinors $v(\vec{p},\sigma)$ wird in § V.3.3 a motiviert.

V.3.1 b Lösungen mit $\vec{p}=\vec{0}$

Für die Lösungen mit $\vec{p}=\vec{0}$ geben Gl. (V.24) und (V.27) unter Verwendung von $\not{p} = \gamma^0 p_0$ und $p_0 = p^0 = mc$ jeweils

$$u(\vec{0},\sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{0})\begin{pmatrix} (p^0+mc)\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (-p^0+mc)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} = 2mc\mathcal{N}_+(\vec{0})\begin{pmatrix} \xi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix},$$

und

$$v(\vec{0},\sigma) = \mathcal{N}_-(\vec{0})\begin{pmatrix} (p^0-mc)\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (-p^0-mc)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-\sigma} \end{pmatrix} = -2mc\mathcal{N}_-(\vec{0})\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Diese Ergebnisse erklären im Nachhinein die Stelle von $\xi_{\pm\sigma}$ in den Dirac-Spinoren $u(\vec{p},\sigma)$ (oben) und $v(\vec{p},\sigma)$ (unten).

V.3.1 c Normierung der Lösungen

Bisher wurden die Normierungskonstanten $\mathcal{N}_+(\vec{p})$ und $\mathcal{N}_-(\vec{p})$ in den Lösungen (V.24), (V.27) nicht spezifiziert. Eine im Folgenden nützliche Wahl für diese Konstanten ist

$$\mathcal{N}_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}}, \qquad \mathcal{N}_-(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{E_{\vec{p}}/c + mc}}. \tag{V.29}$$

Dies führt zu den Lorentz-invarianten Normierungen

$$\bar{u}(\vec{p},\sigma)u(\vec{p},\sigma') = 2mc\,\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{V.30a}$$

$$\bar{v}(\vec{p},\sigma)v(\vec{p},\sigma') = -2mc\,\delta_{\sigma\sigma'} \tag{V.30b}$$

und

$$\bar{u}(\vec{p},\sigma)v(\vec{p},\sigma') = \bar{v}(\vec{p},\sigma)u(\vec{p},\sigma') = 0, \tag{V.30c}$$

wobei $\bar{u}$, $\bar{v}$ die Dirac-adjungierten Spinoren sind. Betrachtet man statt der Letzteren die hermitesch-konjugierten Spinoren, so lauten die Normierungen

$$u(\vec{p},\sigma)^\dagger u(\vec{p},\sigma') = v(\vec{p},\sigma)^\dagger v(\vec{p},\sigma') = \frac{2E_{\vec{p}}}{c}\,\delta_{\sigma\sigma'}. \tag{V.30d}$$

Beweis der Beziehungen (V.30):

Aufgabe 15

V.3.1 d Vollständigkeitsrelation

Für die Beschreibung von Teilchenstoß-Experimenten, in denen der Spin der beteiligten Teilchen nicht gemessen wird — entsprechend der Mehrheit der Experimente —, ist es nützlich, die Summe über Spinzustände[(26)] $\sigma = \pm$ zu kennen. Es gelten die *Vollständigkeitsrelationen*

$$\sum_{\sigma=\pm} u(\vec{p},\sigma)\bar{u}(\vec{p},\sigma) = \not{p} + mc\mathbb{1}_4 \tag{V.33a}$$

und

$$\sum_{\sigma=\pm} v(\vec{p},\sigma)\bar{v}(\vec{p},\sigma) = \not{p} - mc\mathbb{1}_4. \tag{V.33b}$$

Diese Beziehungen lassen sich einfach nachprüfen. Beispielsweise lautet einer der Beiträge zur 4×4-Matrix auf der linken Seite der Gl. (V.33a) unter Nutzung der Gl. (V.24) und (V.31)

$$u(\vec{p},\sigma)\bar{u}(\vec{p},\sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})^2\big(\not{p} + mc\mathbb{1}_4\big)\begin{pmatrix}\xi_\sigma\\ 0\end{pmatrix}\big(\xi_\sigma^T \;\; 0\big)\big(\not{p} + mc\mathbb{1}_4\big).$$

Dabei ist $\begin{pmatrix}\xi_\sigma\\ 0\end{pmatrix}\big(\xi_\sigma^T \;\; 0\big)$ gleich einer diagonalen 4×4-Matrix, und zwar

$$\begin{pmatrix}\xi_\sigma\\ 0\end{pmatrix}\big(\xi_\sigma^T \;\; 0\big) = \begin{cases}\mathrm{diag}(1,0,0,0) & \text{für } \sigma = +\\ \mathrm{diag}(0,1,0,0) & \text{für } \sigma = -,\end{cases}$$

so dass $\sum_{\sigma=\pm}\begin{pmatrix}\xi_\sigma\\ 0\end{pmatrix}\big(\xi_\sigma^T \;\; 0\big) = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Dann ergibt sich in der Standard-Darstellung

$$\sum_{\sigma=\pm} u(\vec{p},\sigma)\bar{u}(\vec{p},\sigma) = \mathcal{N}_+(\vec{p})^2\begin{pmatrix}(p^0+mc)\mathbb{1}_2 & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & (-p^0+mc)\mathbb{1}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{1}_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(p^0+mc)\mathbb{1}_2 & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & (-p^0+mc)\mathbb{1}_2\end{pmatrix}.$$

Dies gibt gerade das Resultat (V.33a). □

[(26)] Diese Bezeichnung wird im § V.3.3 a unten gerechtfertigt.