Kapitel V

Dirac-Gleichung

Historisch wurde die Existenz der Lösungen der Klein–Gordon-Gleichung mit negativer Energie als einen Beweis der Irrelevanz der Gleichung für Physik angesehen, bevor die Stückelberg–Feynman-Interpretation und die zweite Quantisierung eingeführt wurden. Da diese damals unerwünschten Lösungen daraus folgen, dass die Klein–Gordon-Gleichung (III.4) zweiter Ordnung in der Zeit t ist, wurde nach einer alternativen relativistischen Wellengleichung erster Ordnung in t gesucht. Eine solche Gleichung wurde durch P. A. M. Dirac[(ae)] gefunden [20] und wird in Abschn. V.1 für den Fall eines freies Teilchen hergeleitet. Diese Gleichung nutzt Matrizen, deren Eigenschaften in Abschn. V.2 dargestellt sind. Schließlich befasst sich Abschn. V.3 mit den Lösungen der Gleichung sowie mit deren physikalischen Deutung.

V.1 Heuristische Herleitung

Die ursprüngliche Idee von Dirac bestand darin, die linke Seite der quadratischen relativistischen Energie–Impuls-Beziehung $\mathsf{p}^2 - m^2c^2 = 0$ als Produkt von zwei linearen Beiträgen zu faktorisieren

$$p_\mu p^\mu - m^2c^2 \equiv (\gamma^\nu p_\nu + mc)(\beta^\lambda p_\lambda - mc)$$

wobei β^λ, γ^ν acht zu bestimmenden Koeffizienten sind. Dann gewährleistet das Verschwinden eines der Multiplikanden des rechten Glieds, dass die Beziehung erfüllt wird. Berechnet man das Produkt auf der rechten Seite, so ergibt sich durch Gleichsetzung der quadratischen und linearen Terme in p jeweils

$$\eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = \beta^\lambda\gamma^\nu p_\lambda p_\nu \quad \text{und} \quad mc(\beta^\lambda - \gamma^\lambda)p_\lambda = 0.$$

Die zweite Gleichung liefert $\beta^\lambda = \gamma^\lambda$ für $\lambda = 0,\dots,3$. Ersetzt man dann β^λ in der ersten Gleichung, so lautet die Letztere (hier wird die Einsteinsche Summenkonvention ausnahmsweise nicht verwendet!)

$$\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma^\mu)^2(p_\mu)^2 + \sum_{\substack{\mu,\nu=0\\ \mu\neq\nu}}^{3}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu = \sum_{\mu=0}^{3}\eta^{\mu\mu}(p_\mu)^2.$$

[(ae)] P. A. M. Dirac, 1902–1984

Der Vergleich der Koeffizienten der Bilinearformen in p_0, p_1, p_2, p_3 auf den beiden Seiten dieser Gleichung führt zu

$$(\gamma^0)^2 = +1, \quad (\gamma^1)^2 = -1, \quad (\gamma^2)^2 = -1, \quad (\gamma^3)^2 = -1, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \tag{V.1}$$

Mit Zahlen können diese Beziehungen aber nicht erfüllt werden — die Wahlen $\gamma^0 = \pm 1$, $\gamma^k = \pm\mathrm{i}$ genügen ja den vier ersten Relationen, nicht aber der letzten.

Um mögliche Lösungen des Systems (V.1) zu finden, soll man somit nicht nach Zahlen, sondern nach $N\times N$-Matrizen suchen. Mittels des Antikommutators zweier Matrizen $\{A, B\} \equiv AB + BA$ lassen sich die Beziehungen als

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_N \quad \text{für } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3} \tag{V.2}$$

umschreiben, wobei $\mathbb{1}_N$ die $N\times N$-Identitätsmatrix und $\eta^{\mu\nu}$ die Komponenten des inversen metrischen Tensors sind.

Bemerkung: Physiker bezeichnen oft die Beziehungen (V.2) als *Clifford*[af]*-Algebra*.

Die Matrizen kleinster Dimension, die den Beziehungen (V.2) genügen, sind 4×4-Matrizen.

Der Fall $N = 1$ entspricht Zahlen und wurde schon diskutiert.

Für $N = 2$ existieren ja drei linear unabhängige 2×2-Matrizen, die Pauli-Matrizen σ_k, die tatsächlich miteinander antikommutieren: $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}$. Die einzigen noch bleibenden linear unabhängigen Matrizen sind proportional zur Identität $\mathbb{1}_2$, die aber nicht mit den Pauli-Matrizen anitkommutiert: $\{\mathbb{1}_2, \sigma_k\} = 2\sigma_k$, so dass Beziehung (V.2) nicht erfüllt werden kann.

Für $N = 3$ führt die Gleichung $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$ zu $(\det\gamma^\mu)(\det\gamma^\nu) = -(\det\gamma^\mu)(\det\gamma^\nu)$. Somit sollte eine der Determinanten gleich 0 sein, was vermieden sein muss, damit das Produkt einer γ^μ-Matrix mit einem nicht-verschwindenden D-komponentigen Vektor nicht Null ist.

Eine mögliche Wahl, gennant *Standard-* oder *Dirac-Darstellung*, besteht aus den Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.3}$$

mit den üblichen Pauli-Matrizen σ_k für $k = 1, 2, 3$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{V.4}$$

Die Matrizen γ^μ werden als *Dirac-Gamma-Matrizen* oder kurz *Dirac-Matrizen* bezeichnet.

Zusammen bilden die vier Dirac-Matrizen γ^μ eine Größe, die sich unter der Lorentz-Gruppe wie ein kontravarianter Vektor — dessen Komponenten 4×4-Matrizen sind — transformieren. Dementsprechend stellen die Beziehungen (V.2) die Komponenten einer Gleichung zwischen zwei Lorentz-Tensoren zweiter Stufe dar, wobei jede Komponente schon eine 4×4-Matrix ist.

Sei a_μ ein aus vier Zahlen bestehender kovarianter Vektor. Dann bezeichnet das „Skalarprodukt" $a_\mu\gamma^\mu$ eine Lorentz-invariante 4×4-Matrix. Diese lässt sich auch kompakt in der durch Feynman eingeführten *Slash-Notation* als

$$\not{a} \equiv a_\mu\gamma^\mu \tag{V.5}$$

schreiben.

Die relativistische Energie–Impuls-Beziehung $p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0$ für ein Teilchen der Masse m kann jetzt erfüllt werden, indem wir das Teilchen durch eine Größe $\psi(\mathsf{x})$ beschreiben, auf das die Wirkung der Matrix $\gamma^\mu p_\mu - mc\mathbb{1}_4$ Null gibt: $(\gamma^\mu p_\mu - mc\mathbb{1}_4)\psi(\mathsf{x}) = 0$, wobei wir im Folgenden die

[af] W. K. Clifford, 1845–1879

4-dimensionale Identitätsmatrix $\mathbb{1}_4$ weglassen können. Unter Verwendung der Korrespondenz (III.5) zur Ortsdarstellung ergibt sich dann die freie *Dirac-Gleichung* (in Ortsdarstellung)

$$\boxed{\big(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\big)\psi(\mathsf{x}) = 0.} \tag{V.6a}$$

Unter Verwendung der Slash-Notation lautet dies auch

$$\big(\mathrm{i}\hbar\not{\partial} - mc\big)\psi(\mathsf{x}) = 0. \tag{V.6b}$$

Da die Dirac-Matrizen der Dimension 4 sind, ist $\psi(\mathsf{x})$ ein vierkomponentiger Spaltenvektor, der auch *Dirac-Spinor* oder *4-Spinor* genannt wird. Unter Lorentz-Transformationen transformiert sich der Letztere aber nicht wie ein Vierervektor — seine Komponenten sollten deshalb nicht mit einem Lorentz-Index $\mu = 0,1,2,3$ bezeichnet werden.

Die Anwesenheit der Pauli-Matrizen in den Dirac-Matrizen (V.3) deutet darauf hin, dass die Dirac-Spinoren Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ beschreiben. Solche Teilchen besitzen aber nur zwei Freiheitsgrade, während ein Dirac-Spinor vier Freiheitsgrade hat. Tatsächlich werden wir im Folgenden sehen, dass ein Dirac-Spinor ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und sein Antiteilchen auf einmal beschreiben.

Bemerkungen:

∗ Mittels des metrischen Tensors definiert man auch Matrizen γ_μ.

∗ Andere Darstellungen der Dirac-Matrizen sind auch möglich, und lassen sich durch Basistransformationen im vierdimensionalen Vektorraum, auf welchen die γ^μ-Matrizen wirken, erhalten. Zum Beispiel ist es manchmal bequemer, mit der folgenden sog. *chiralen Darstellung* zu arbeiten

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{V.7}$$

V.2 „Diracologie“

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der Gamma-Matrizen dargestellt, sowie einige Definitionen eingeführt.

V.2.1 Eigenschaften der Dirac-Matrizen

Hiernach werden einige Eigenschaften der Dirac-Matrizen gelistet, die sich in einer gegebenen Darstellung einfach nachprüfen lassen.

V.2.1 a Spuren von Dirac-Matrizen und deren Produkte

Die Dirac-Matrizen sind spurlos

$$\operatorname{Tr}\gamma^\mu = 0 \quad \text{für } \mu = 0,1,2,3. \tag{V.8}$$

Die Grundrelation (V.2) gibt $(\gamma^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu}\mathbb{1}_4$ für jeden möglichen μ. Sei jetzt $\nu \in \{0,1,2,3\}$ und $\mu \neq \nu$. Dann führt $\gamma^\nu = \gamma^\nu(\gamma^\mu)^2/\eta^{\mu\mu}$ zu

$$\operatorname{Tr}\gamma^\nu = \frac{1}{\eta^{\mu\mu}}\operatorname{Tr}\big[\gamma^\nu(\gamma^\mu)^2\big] = -\frac{1}{\eta^{\mu\mu}}\operatorname{Tr}\big[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\big] = -\frac{1}{\eta^{\mu\mu}}\operatorname{Tr}\big[(\gamma^\mu)^2\gamma^\nu\big] = -\operatorname{Tr}\gamma^\nu,$$

wobei die zweite Gleichung aus der Antikommutationsrelation (V.2) folgt, und die dritte aus der Zyklizität der Spur. □

Die Spur des Produkts zweier Dirac-Matrizen folgt sofort aus dem Antikommutator (V.2)

$$\operatorname{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\big) = 4\eta^{\mu\nu} \quad \text{für } \mu,\nu \in \{0,1,2,3\}. \tag{V.9}$$

Das Produkt von drei Dirac-Matrizen, oder allgemeiner von einer ungeraden Zahl von Dirac-Matrizen ist spurlos

$$\operatorname{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\big) = 0 \quad \text{für } \mu,\nu,\rho \in \{0,1,2,3\}. \tag{V.10}$$

Der Beweis nutzt die unter eingeführte γ_5-Matrix und deren Eigenschaften $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$ und $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ für jeden μ. Dann wird wie im Beweis der Eigenschaft (V.8) $(\gamma_5)^2$ in die Spur eingeführt: eine der γ_5 wird mit den anderen Matrizen des Produkts dreimal (oder mehr, im Fall des Produkts von 5 oder mehr Matrizen) antikommutiert, und die Zyklizität der Spur gibt letztendlich $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = -\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)$. □

V.2.1 b Verhalten unter hermitescher Konjugation

Auf Gl. (V.3) sieht man sofort, dass γ^0 in der Standard-Darstellung reell symmetrisch und somit hermitesch ist, $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$. Dagegen sind γ^1 und γ^3 in dieser Darstellung reell antisymmetrisch und deshalb antihermitesch, $(\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1$ und $(\gamma^3)^\dagger = -\gamma^3$. Schließlich ist die Dirac-Darstellung von γ^2 komplex symmetrisch, also ebenfalls antihermitesch, $(\gamma^2)^\dagger = -\gamma^2$.

Dank der allgemein geltenden Relation (V.2) können diese Eigenschaften der Gamma-Matrizen in der Dirac-Darstellung als

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad \text{für } \mu = 0,1,2,3 \tag{V.11}$$

zusammengefasst werden.

Die Beziehungen (V.11) lassen sich auch in der chiralen Darstellung (V.7) der Dirac-Matrizen einfach prüfen.

Diese Relationen (V.11) folgen allgemeiner aus der nötigen Hermitizität des auf Dirac-Spinoren wirkenden Hamilton-Operators $H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,c + \beta mc^2\mathbb{1}_4$, wobei $\alpha^k = (\gamma^0)^{-1}\gamma^k = \gamma^0\gamma^k$ für $k = 1,2,3$ und $\beta = (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$.

Aus Gl. (V.11) folgt die Unitarität der Dirac-Matrizen

$$(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^\mu = \mathbb{1}_4 \quad \text{für } \mu = 0,1,2,3. \tag{V.12}$$

V.2.2 Chiralitätsoperator

Mit den Dirac-Matrizen definiert man den (auf Dirac-Spinoren wirkenden) *Chiralitätsoperator*

$$\boxed{\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.} \tag{V.13}$$

In der Dirac-Darstellung findet man sofort

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.14}$$

während in der chiralen Darstellung γ_5 diagonal ist:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \tag{V.15}$$

Aus der Definition (V.13) und der Relation (V.2) folgen sofort die Eigenschaften

$$(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4, \tag{V.16a}$$

so dass die einzigen möglichen Eigenwerte von γ_5 nur $+1$ und -1 sein können, und

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{für } \mu = 0,1,2,3. \tag{V.16b}$$

Dazu ist γ_5 spurlos

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0. \tag{V.16c}$$

Mithilfe von $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}_4$, der Vertauschungsrelation $\{\gamma^0, \gamma_5\} = 0$ und der Zyklizität der Spur erhält man $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = \mathrm{Tr}\left[(\gamma^0)^2\gamma_5\right] = -\mathrm{Tr}\left[\gamma^0\gamma_5\gamma^0\right] = -\mathrm{Tr}\left[\gamma^5(\gamma^0)^2\right] = -\mathrm{Tr}\,\gamma_5$. □

Schließlich führt Gl. (V.11) zur Hermitizität von γ_5

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5. \tag{V.16d}$$

Bemerkung: Eine nützliche alternative Formel für γ_5 ist

$$\gamma_5 = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \tag{V.17}$$

mit dem Levi–Civita-Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ [Gl. (II.45)] mit der Konvention $\epsilon_{0123} = -1$. Dieser Ausdruck zeigt, dass sich γ_5 unter Lorentz-Transformationen wie ein Pseudoskalar transformiert, da $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ein Pseudotensor ist.

V.2.3 Dirac-adjungierter Spinor

Sei ψ ein Dirac-Spinor, mit

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Der dazu hermitesch-konjugierte Spinor $\psi^\dagger$ wird definiert als

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* & d^* \end{pmatrix}.$$

Nützlicher als $\psi^\dagger$ ist aber der *Dirac-adjungierte Spinor* $\bar{\psi}$, definiert als

$$\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0.} \tag{V.18}$$

Man kann zeigen, dass $\bar{\psi}$ sich unter Lorentz-Transformationen einfacher als $\psi^\dagger$ transformiert.

Mithilfe der Beziehung (V.11) findet man, dass wenn $\psi(\mathsf{x})$ der Dirac-Gleichung (V.6a) erfüllt, dann genügt $\bar{\psi}(\mathsf{x})$ der Gleichung

$$\bar{\psi}(\mathsf{x})\big(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + mc\big) = 0, \tag{V.19}$$

wobei der Pfeil nach links bedeutet, dass die Ableitungen hier nach links wirken.