

## X.3 Quantenchromodynamik

Die Theorie der starken Wechselwirkung, die hinter dem Quark- und dem Partonmodell steht und die zugehörigen Phänomene erklären kann, ist die *Quantenchromodynamik* (QCD). Dabei handelt es sich um eine sog. nicht-abelsche Eichfeldtheorie, basierend auf einer Gruppe  $SU(3)$ , die als *Farbgruppe* bezeichnet wird, und daher noch als  $SU(3)_c$  geschrieben wird.

Dabei werden die drei Dirac-Spinoren  $q_f^a$  mit  $a = r, g, b$  für einen gegebenen Quark-Flavour  $f$  als die drei Komponenten eines Vektors  $q_f$  im „Farbraum“ betrachtet, wobei jede Komponente schon ein vierkomponentiger Quark-Spinor ist. Die QCD folgt aus der Forderung einer sog. *Eichinvarianz*, und zwar, dass die Physik invariant unter lokalen  $SU(3)_c$ -Transformationen der Vektoren  $q_f$  sein soll, wobei sich die  $q_f$  als  $SU(3)$ -Triplets transformieren.

In diesem Abschnitt werden nur einige Elemente der QCD dargestellt, und zwar erstens die Vertices der Theorie (§ X.3.1) — welche die möglichen Prozesse festlegen —, dann einige wichtigen Vorhersagen der Theorie — die nur auf einer qualitativen Ebene in § X.3.2 diskutiert werden. Schließlich befasst sich § X.3.3 mit den globalen Symmetrien der QCD, die zur Einführung mehrerer Quantenzahlen führen, die zur Charakterisierung der Elementarteilchen sowie der Hadronen dienen.

### X.3.1 Vertices der QCD

Ähnlich der Quantenelektrodynamik kann die Quantenchromodynamik durch die Feynman-Regeln für die zugehörigen Vertices, die sich aus der Lagrange-Dichte herleiten lassen, spezifiziert werden. Im Fall der QCD kommen die drei in Abb. X.8 dargestellten Vertices vor. Dabei stellen die spiralförmigen Linien  $\text{---}\text{---}\text{---}$  die *Gluonen* dar, d.h. die masselosen elektrisch neutralen Vektorpartikeln, die die starke Wechselwirkung vermitteln und an die Farbladung koppeln.

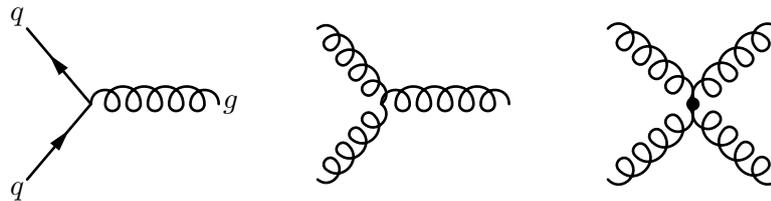


Abbildung X.8 – Vertices der Quantenchromodynamik.

Die an einem  $qqg$ -Vertex (Abb. X.8 links) ein- und auslaufenden Quarks tragen typischerweise unterschiedliche Farbladungen. Dann trägt das Gluon die „Differenz“ dieser Farbladung. Trägt z.B. das ein- bzw. auslaufende Quark die Farbladung  $r$  (rot) bzw.  $b$  (blau), so soll das Gluon die Farbladung  $r\bar{b}$  nach rechts transportieren. Somit sind Gluonen farbgeladen und können in 8 ( $= N_c^2 - 1$ , mit  $N_c = 3$  der Anzahl der Farben) Farbkombinationen vorkommen.

Mathematisch werden die Gluonen durch Vektorfelder  $\mathcal{A}_\mu^A$  mit  $A = 1, \dots, 8$  modelliert. Um deren Kopplung mit den Quarks-Triplets  $q_f^{a=1,2,3}$  zu beschreiben, werden acht  $3 \times 3$ - „Gell-Mann“ Matrizen  $\lambda^A$  eingeführt, die die gleiche Rolle für  $SU(3)$  spielen, wie die Pauli-Matrizen für  $SU(2)$ .

Wegen ihrer Farbladung können Gluonen miteinander wechselwirken, entsprechend den zwei rechten Vertices der Abb. X.8 Diese *Selbstwechselwirkung* der Gluonen stellt einen großen Unterschied zum Photon in der QED dar.

Da die drei Vertices der QCD aus einer eichinvarianten Lagrange-Dichte kommen, sind die zugehörigen Kopplungskonstanten nicht unabhängig. In der Tat werden die beiden Drei-Teilchen-Vertices durch die gleiche *starke Kopplungskonstante*  $g_s$  bestimmt, während der Vier-Gluonen-Vertex durch  $g_s^2$  kontrolliert wird. Anstelle von  $g_s$  benutzt man auch die zugehörige starke Kopplungsstärke

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad (\text{X.14})$$

analog zu  $\alpha_{\text{em}}$  in der QED. Im Gegensatz zu  $\alpha_{\text{em}}$  kann aber  $\alpha_s$  „groß“, d.h. nicht viel kleiner als 1,

sein. Infolgedessen<sup>(49)</sup> funktioniert Störungstheorie im Allgemeinen nicht so perfekt, wie in der QED, und Berechnungen erreichen selten eine Genauigkeit von 1% oder besser. Somit stellen numerische *Gitter-QCD*-Berechnungen eine wichtige Lösungsmethode dar.

### X.3.2 Wichtige Vorhersagen der Quantenchromodynamik

Die „einfache“ Forderung einer eichinvarianten SU(3) Theorie führt zu einer Vielzahl an Phänomenen, die in der QED nicht auftreten. Hiernach werden zwei hervortretende Eigenschaften ohne Beweis dargestellt.

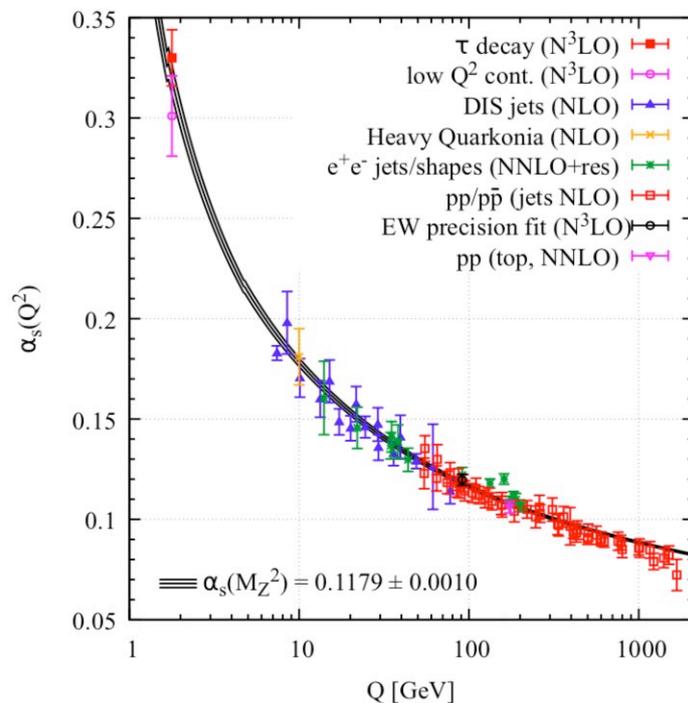
#### X.3.2a Asymptotische Freiheit

Die Kopplungskonstante  $g_s$  ist trotz ihrem traditionellen Namen keine Konstante, sondern sie hängt von der Energie- bzw. Impulsskala  $Q_E$  des Prozesses unter Betrachtung ab. Genauer haben Gross, Politzer<sup>(ay)</sup> und Wilczek<sup>(az)</sup> 1973 entdeckt, dass  $g_s(Q_E)$  mit steigender Energieskala  $Q_E$  abnimmt und im Limes  $Q_E \rightarrow \infty$  nach Null geht. Dieses Verhalten wird als *asymptotische Freiheit* bezeichnet.

Genauer findet man zur ersten Ordnung in Störungsrechnung

$$\alpha_s(Q_E^2) \simeq \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + 4\pi\alpha_s(\mu^2)b_0 \ln(Q_E^2/\mu^2)} \quad (\text{X.15})$$

mit einer Referenzskala  $\mu$  und  $b_0 \equiv (11N_c - 2N_f)/48\pi^2$ , wobei  $N_c = 3$  die Anzahl der Farben und  $N_f$  die Anzahl der bei der Energieskala  $Q_E$  aktiven Flavours bezeichnet — d.h.  $N_f = 3$  für  $Q_E \lesssim 2m_c$ ,  $N_f = 4$  für  $2m_c \lesssim Q_E \lesssim 2m_b$ , usw.



**Abbildung X.9** – Experimentell ermittelter Verlauf der starken Kopplungsstärke. Genommen aus dem 2019 update der Review of Particle Physics, Abb. 9.5.

<sup>(49)</sup> ... und wegen der Selbstwechselwirkung der Gluonen, die zur Existenz von viel mehr Feynman-Diagrammen zu einer gegebenen Ordnung in  $g_s$  führt.

<sup>(ay)</sup>H. D. POLITZER, 1949– <sup>(az)</sup>F. WILCZEK, 1951–

Der Verlauf von  $\alpha_s(Q^2)$ , ermittelt aus unterschiedlichen Experimenten, wird in Abb. [X.9](#) gezeigt. Insbesondere sieht man, dass die Kopplungsstärke bei der Masse  $M_Z \approx 91,2$  GeV des  $Z^0$ -Bosons

$$\alpha_s(M_Z) = 0,1179 \pm 0,0010 \quad (\text{X.16})$$

beträgt.

Asymptotische Freiheit liefert eine natürliche Erklärung für das in § [X.2.1 b](#) diskutierte Bjorken-Skalenverhalten: für Prozesse mit großem  $Q_E^2$  ist die Kopplungskonstante klein, so dass sich Quarks und Gluonen tatsächlich wie freie Teilchen verhalten, wie im Partonmodell. Bei endlichem  $Q_E^2$  treten Korrekturen auf, die sich im Rahmen der QCD berechnen lassen, und zu einer entsprechenden Abhängigkeit der Partondichtefunktionen führen:  $f_i(x, Q_E^2)$ .

### Bemerkungen:

\* Definiert man eine neue Energieskala  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , die oft als *QCD-Skala* bezeichnet wird, durch

$$\alpha_s(\mu^2) \equiv \frac{1}{4\pi b_0 \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)},$$

so findet man nach Einsetzen in Gl. [\(X.15\)](#) unter der Annahme, dass  $N_f$  und daher  $b_0$  konstant zwischen  $\Lambda_{\text{QCD}}$ ,  $\mu$  und  $Q_E$  bleibt,

$$\alpha_s(Q_E^2) = \frac{1}{4\pi b_0 \ln(Q_E^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}. \quad (\text{X.17})$$

Dies bedeutet, dass die Kopplungsstärke divergiert, wenn  $Q_E \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}^+$ .

\* Dem Heisenberg'schen Prinzip nach entspricht eine hohe Impulsskala einer kleinen Längenskala, und umgekehrt. Daher bedeutet asymptotische Freiheit, dass je näher zwei farbgeladene Teilchen benachbart sind, desto kleiner ist die Stärke deren Wechselwirkung.

\* Mathematisch tritt asymptotische Freiheit nicht nur in QCD auf, sondern in allen nicht-abelschen Eichtheorien. Somit nimmt die Kopplungskonstante  $g$  der  $SU(2)_L$ -Gruppe des elektroschwachen Standardmodells (Kap. ??) mit der Energieskala ab.

### X.3.2 b Quarkeinschluss

Für kleine Werte von  $Q_E^2$  wird die Kopplungsstärke  $\alpha_s(Q_E^2)$  groß, d.h. die Wechselwirkungen zwischen farbgeladenen Teilchen sind sehr stark. Diese Tatsache erklärt qualitativ die Existenz von farbneutralen gebundenen Zuständen, den Hadronen, sowie das *Confinement* der Quarks und Gluonen innerhalb der Letzteren.

Versucht man, zwei farbgeladene Teilchen voneinander zu entfernen, dann bilden sich aus der hinzugefügten Energie Quark–Antiquark-Paare. Daraus resultieren, statt zweier getrennter Farbladungen, zwei oder mehr Hadronen.

**Bemerkung:** Genau gesagt existiert noch kein formeller Beweis, dass die Quantenchromodynamik tatsächlich zum Confinement führt. Das Letztere wird aber in numerischen QCD-Simulationen auf einer diskretisierten Raumzeit, d.h. in sog. Gitter-QCD, nachgewiesen.