

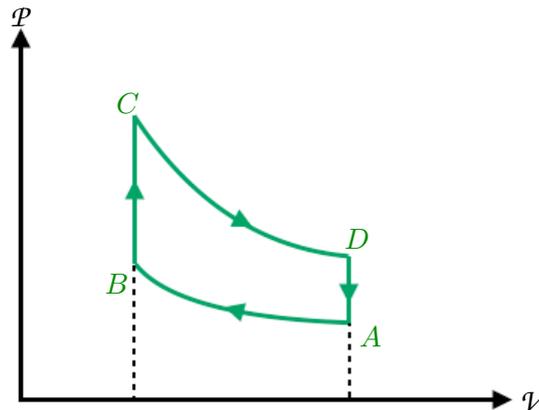
Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Otto-Kreisprozess

(35 P.)

Der Otto-Kreisprozess, dessen Verlauf im \mathcal{P} - \mathcal{V} -Diagramm in der Abbildung gezeigt wird, besteht aus vier sukzessiven Transformationen eines Gases: die Schritte $A \rightarrow B$ und $C \rightarrow D$ sind adiabatisch, die Prozesse $B \rightarrow C$ und $D \rightarrow A$ isochor.



i. Vorbereitung

a) Was besagen der erste und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik? (Physikalische Erklärungen, Gleichungen). (8 P.)

b) Wie wird der adiabatische Index γ definiert? Wie hängen \mathcal{P} und \mathcal{V} bei der adiabatischen Transformation eines Gases zusammen? (2 P.)

ii. Geben Sie zuerst *ohne Berechnung* an, bei welchen Schritten das System Arbeit leistet bzw. empfängt; und bei welchen Schritten, Wärme dem System zugeführt bzw. entzogen wird. Begründen Sie Ihre Antworten. Wie wird dann der Wirkungsgrad des Otto-Kreises definiert? (10 P.)

iii. Um jetzt Berechnungen durchführen zu können, wird angenommen, dass das System ein klassisches ideales Gas mit konstanter isochorer Wärmekapazität $C_{\mathcal{V}}$ ist.

a) Geben Sie die thermische Zustandsgleichung eines klassischen idealen Gases an, sowie den Ausdruck seiner inneren Energie $U(T)$. (2 P.)

b) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad eines idealen (reversiblen) Otto-Motors

$$\eta = 1 - \left(\frac{\mathcal{V}_A}{\mathcal{V}_B} \right)^{1-\gamma} \tag{1}$$

ist. Dabei können Sie (ohne Herleitung) die Relation $\mathcal{P}\mathcal{V} = (\gamma - 1)U$ benutzen. (11 P.)

c) Drücken Sie noch η durch die Temperaturen T_A und T_B aus. (2 P.)

2. Approximative Dampfdruckkurve

(20 P.)

i. Skizzieren Sie das \mathcal{P} - T -Phasendiagramm für eine Substanz mit fester, flüssiger und gasförmiger Phase. Welche besonderen Linien und Punkte gibt es in diesem Diagramm? Beschreiben Sie, was bei solchen Linien und Punkten passiert. (12 P.)

ii. Was nennt man latente Wärme? (2 P.)

iii. Leiten Sie aus der Clausius–Clapeyron-Gleichung die Funktion $\mathcal{P}(T)$ für das Phasengleichgewicht von flüssiger und gasförmiger Phase unter folgenden Annahmen her: Der Dampf kann als ein ideales Gas beschrieben werden; sein molares Volumen ist viel größer als das der flüssigen Phase. Die latente Wärme ist temperaturunabhängig. (6 P.)

3. Thermodynamik (10 P.)

Materialien mit einem permanenten elektrischen Dipolmoment können sich verformen, wenn ein elektrisches Feld \mathcal{E} angelegt wird. Dabei kann sich zum Beispiel ihr Volumen ändern.¹ Die entscheidende Größe

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{E}}\right)_p \tag{2}$$

ist nicht ganz einfach zu messen, deshalb verwendet man eine Maxwell-Relation und misst etwas anderes. Was könnte das sein?

Gehen Sie bei Ihren Überlegungen vom totalen Differential

$$dU = T dS - \mathcal{P} d\mathcal{V} + \mathcal{E} dD \tag{3}$$

aus, wobei D das elektrische Dipolmoment ist. Transformieren Sie $U(S, \mathcal{V}, D)$ auf ein thermodynamisches Potential $G(T, \mathcal{P}, \mathcal{E})$ und schreiben Sie das totale Differential von G und die daraus folgenden Maxwell-Relationen hin. Eine hilft Ihnen.

4. Zweiniveausystem im kanonischen Gleichgewicht (15 P.)

Sei ein System aus N nicht-wechselwirkenden, unterscheidbaren Teilchen, die sich in zwei Zuständen mit Energien $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ befinden können. Sei $\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

- i. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_N(\beta)$. (2 P.)
- ii. Wie groß ist bei gegebenem β die mittlere Teilchenzahl im oberen Niveau? Welche Werte nimmt β an, wenn diese mittlere Teilchenzahl größer als $N/2$ ist? (3 P.)
- iii. Berechnen Sie die innere Energie U als Funktion von β . Gegen welche Werte geht U für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$? (5 P.)
- iv. Berechnen Sie die Wärmekapazität C . Gegen welche Werte geht C für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$? (5 P.)

5. Harmonische Oszillatoren im kanonischen Gleichgewicht (20 P.)

- i. a) Geben Sie die Energieniveaus eines eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators der Kreisfrequenz ω an. (1 P.)
- b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_1(\beta)$ für einen solchen harmonischen Oszillator. Dabei kann man $\varepsilon = \hbar\omega$ definieren. (2 P.)
- ii. Geben Sie die Zustandssumme $Z_N(\beta)$ für ein System aus N unabhängigen und unterscheidbaren eindimensionalen Oszillatoren mit derselben Frequenz an. (2 P.)

iii. Thermodynamik

- a) Leiten Sie aus der kanonischen Zustandssumme $Z_N(\beta)$ die innere Energie $U = -\partial \ln Z_N(\beta) / \partial \beta$ des Systems aus N eindimensionalen Oszillatoren her. Folgern Sie daraus die Wärmekapazität $C(\beta)$ des Systems. Gegen welche Werte geht C für $T \rightarrow 0$ sowie für $T \rightarrow \infty$? (7 P.)
- b) Wie ist die freie Energie F mit der inneren Energie U verknüpft? (1 P.)
- c) Leiten Sie aus $Z_N(\beta)$ die freie Energie F des Systems aus N eindimensionalen Oszillatoren her. (2 P.)
- d) Berechnen Sie die Entropie S der N Oszillatoren mit Hilfe der Ergebnisse aus a), b), und c). Gegen welchen Wert geht S für $T \rightarrow 0$? Kommentieren Sie das Ergebnis. (5 P.)

¹Die Umkehrung ist die Änderung des elektrischen Feldes bei Verformung des Materials; das ist der piezoelektrische Effekt, der hiernach nicht weiter diskutiert wird.

6. Quantengase**(15 P.)**

i. Geben Sie die Formeln für die Fermi–Dirac- sowie die Bose–Einstein-Verteilung an. Was beschreiben diese Formeln? (6 P.)

ii. Sei ein System aus identischen nicht-wechselwirkenden Teilchen. Die Energieniveaus des Einteilchen-Hamilton-Operators für ein solches Teilchen seien mit ε_n mit jeweiligem Entartungsgrad g_n (für $n \geq 0$) bezeichnet.

Beschreiben Sie — ohne Berechnung, aber mit ein paar wichtigen Schlüsselworten — den Zustand des N -Teilchen-Systems bei Temperatur $T = 0$ im Fall von Fermionen sowie im Fall von Bosonen. (9 P.)

Es können 115 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$