# Übung Nr. 8

## 22. Freier Propagator im Impulsraum

Aus dem Propagator im Ortsraum $\langle \vec{x}'', t'' \,|\, \vec{x}', t' \rangle$ kann man durch Fourier-Transformation den Propagator im Impulsraum gewinnen

$$\langle \vec{p}'', t'' \,|\, \vec{p}', t' \rangle = \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \mathrm{d}\vec{x}''\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}''\cdot\vec{x}''/\hbar} \langle \vec{x}'', t'' \,|\, \vec{x}', t' \rangle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}'/\hbar},$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang eines Teilchens vom Impuls $\vec{p}'$ zur Zeit $t'$ zum Impuls $\vec{p}''$ zur Zeit $t'' \geq t'$ beschreibt.

**i.** Zeigen Sie, dass die Impulsdarstellung des freien Propagators

$$\langle \vec{x}'', t'' \,|\, \vec{x}', t' \rangle = \left( \frac{m}{2\mathrm{i}\pi\hbar(t''-t')} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[ \frac{\mathrm{i}m}{2\hbar} \frac{(\vec{x}''-\vec{x}')^2}{t''-t'} \right]$$

gegeben ist durch

$$\langle \vec{p}'', t'' \,|\, \vec{p}', t' \rangle = (2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p}''-\vec{p}') \exp\left[ \frac{-\mathrm{i}}{2\hbar} \frac{\vec{p}'^2}{m} (t''-t') \right].$$

*Hinweis*: Es ist günstig, eine Transformation zu neuen Koordinaten $\vec{\xi} \equiv \vec{x}'' - \vec{x}'$, $\vec{X} \equiv \vec{x}' + \vec{x}''$, und $\vec{q} \equiv \vec{p}'' - \vec{p}'$, $\vec{p} \equiv \vec{p}' + \vec{p}''$ durchzuführen.

**ii.** Durch eine weitere Fourier-Transformation bezüglich $t$ erhält man den Propagator in Abhängigkeit von der Energie $E$,

$$\langle \vec{p}'', E'' \,|\, \vec{p}', E' \rangle = \int \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}t''\, \Theta(t''-t')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}E''t''/\hbar} \langle \vec{p}'', t'' \,|\, \vec{p}', t' \rangle\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't'/\hbar},$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang eines Teilchens von einem Impuls $\vec{p}'$ und einer Energie $E'$ zu einem Impuls $\vec{p}''$ mit der Energie $E''$ beschreibt. In diesem Ausdruck wurde die Heaviside-Function $\Theta(t''-t')$ eingeführt, um die Bedingung $t'' \geq t'$ zu berücksichtigen.

Berechnen Sie den freien Propagator $\langle \vec{p}'', E'' \,|\, \vec{p}', E' \rangle$ in dieser Darstellung.

*Hinweis*: Hierbei tritt ein Integral der Form $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ auf, das für reelle $\omega$ nicht konvergiert. Ersetzen Sie hier $\omega \to \omega + \mathrm{i}\epsilon$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, um Konvergenz zu erzeugen, und belassen Sie das $\epsilon$ im Ergebnis.

## 23. Freier Propagator als Greensche Funktion

Zeigen Sie, dass der freie Propagator Greensche Funktion zur freien Schrödinger-Gleichung ist, d.h. in Ortsdarstellung

$$\left( \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t''} + \frac{\hbar^2}{2m} \triangle_{\vec{x}''} \right) \langle \vec{x}'', t'' \,|\, \vec{x}', t' \rangle = \mathrm{i}\hbar\delta(\vec{x}''-\vec{x}')\, \delta(t''-t')$$

bzw. in Impulsdarstellung

$$\left( \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t''} - \frac{\vec{p}''^2}{2m} \right) \langle \vec{p}'', t'' \,|\, \vec{p}', t' \rangle = (2\pi\hbar)^3 \mathrm{i}\hbar\delta(\vec{p}''-\vec{p}')\, \delta(t''-t').$$

### 24. Zustandssumme

Die Zustandssumme $Z$ wird definiert durch

$$Z = \int \mathrm{d}\vec{x}\, \langle \vec{x} \,|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} \,|\, \vec{x} \rangle,$$

wobei $\beta = \mathrm{i}t/\hbar$ gesetzt wird.

Schieben Sie eine Zerlegung der Identität mithilfe Energieeigenzuständen zur Auswertung von $Z$ ein und zeigen Sie, dass die Grundzustandsenergie erhalten werden kann durch den Grenzwert

$$\lim_{\beta \to +\infty} -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}.$$

Überzeugen Sie sich davon explizit am Beispiel eines Teilchens in einem eindimensionalen Potentialtopf.