

Übungsblatt Nr.6

Diskussionsthemen:

- Was sind trigonometrische bzw. Fourierreihen und wie werden sie bestimmt?
- Was sind die Kugelflächenfunktionen?

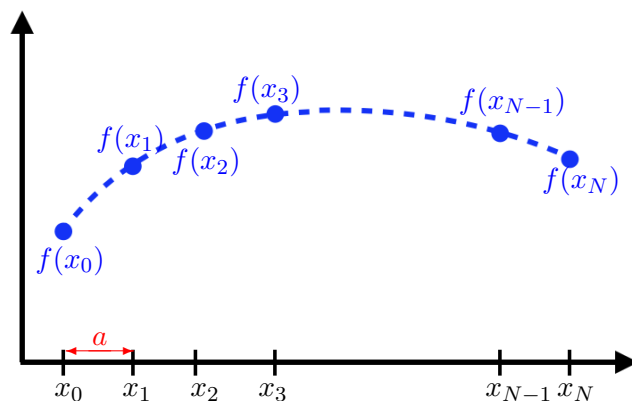
17. Trigonometrische und Fourierreihen

Bestimmen Sie die Darstellungen der folgenden Funktionen (jeweils periodisch fortgesetzt) als trigonometrische Reihe und als Fourierreihe.

- i. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) \cos(x)$; ii. $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$; iii. $h: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$.

18. Diskrete Fouriertransformation

Betrachten Sie den Raum V von komplexwertigen periodischen Funktionen f , die, wie in der Abbildung dargestellt, auf einer diskreten Anzahl von $N + 1$ Punkten $x_j = j \cdot a$ mit Abstand a definiert sind.



Der Raum V bildet offensichtlich einen komplexen Vektorraum mit Standardorthonormalbasis $\{e_k\}$ mit

$$e_k(x_j) = \delta_{jk}$$

unter dem Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{Na} \sum_{j=0}^N a f(x_j)^* g(x_j).$$

- i. Zeigen Sie, dass die diskreten Fouriermoden $\{\phi_k : k = 0, \dots, N\}$ gegeben durch

$$\phi_k(x_j) = e^{2\pi i k x_j / Na} \quad \forall x_j$$

bzgl. des Skalarprodukts normiert und zueinander orthogonal sind.

- ii. Begründen Sie kurz, dass die diskreten Fouriermoden $\{\phi_k : k = 0, \dots, N\}$ eine Orthonormalbasis des Raums V bilden und stellen Sie eine beliebige Funktion f als Linearkombination der diskreten Fouriermoden $\{\phi_k : k = 0, \dots, N\}$ dar.

- iii. Betrachten Sie nun den Grenzfall $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ mit $Na = \text{konst.}$ Wie verhält sich das Skalarprodukt? Wie verhält sich das Spektrum von diskreten Frequenzen $2\pi k/Na$ in diesem Fall?

19. Kugelflächenfunktionen

In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktionen als Orthonormalbasis der Funktionen auf der Einheitssphäre eingeführt. Berechnen Sie die Koeffizienten der folgenden Funktionen in der Basis der Kugelflächenfunktionen

- i. $f(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi$; ii. $g(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$.

Hint: Sie benötigen nur Kugelflächenfunktionen der Ordnung $l \leq 2$. Anhand der Funktionen lässt sich bereits erahnen, welche Sie brauchen.