

Übungsblatt Nr.14

Diskussionsthemen:

- Welche Methoden kennen Sie, um Residuen zu berechnen?
- Was besagt die Cauchy-Formel?

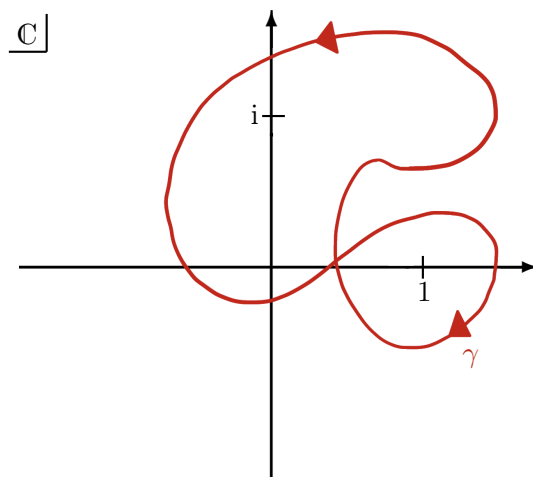
45. Laurent-Reihe und Residuensatz

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$.

- i. Entwickeln Sie die Funktion in eine Laurent-Reihe um den Punkt $z_0 = 1$. Geben Sie den Konvergenzbereich der Reihe an.

Hinweis: $\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1-z)}$.

- ii. Bestimmen Sie das Residuum von f in $z_0 = 1$ aus der Laurent-Reihe.
- iii. Bestimmen Sie das Residuum in $z_0 = 1$ mit Hilfe der Grenzwertdefinition für Residuen und überprüfen Sie das Ergebnis aus ii.
- iv. Bestimmen Sie das Residuum von f in $z_1 = 0$.
- v. Bestimmen Sie das Integral von f entlang der in der Abbildung dargestellten Kontur.



46. Konturintegrale mit Residuensatz

Berechnen Sie für $R > 0$ mit $R \neq 1$ das Konturintegral $\oint_{\partial K_R(0)} \frac{dz}{z^2 - 1}$ entlang des Kreises mit Radius R dessen Zentrum im Ursprungspunkt liegt.

47. Reelle Integrale mit Residuensatz

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

- b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst das Integral über $\mathbb{R}$.

48. Anwendung der Cauchy-Formel

Die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ seien analytisch auf einem Gebiet $G \in \mathbb{C}$, und γ sei eine Kurve ganz im G , die den Punkt $z_0 \in G$ umläuft. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Cauchy-Integralsatz zu benutzen, um die Kontur so nah an z_0 zu bringen, dass die Reihen-Darstellungen von f und f' konvergieren.