Übungsblatt Nr.1

Diskussionsthema: Kartesische Darstellung und Polardarstellung einer komplexen Zahl.

1. Elementare Operationen mit komplexen Zahlen

Beweisen Sie folgende Identitäten für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

i. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$; **ii.** $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ (für $z_2 \neq 0$).

2. Trigonometrische Identitäten

i. Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Formel, dass $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine ähnliche Formel für $\sin(x)$ (mit $x \in \mathbb{R}$) an.

ii. Verwenden Sie das Ergebnis aus **i.** um zu zeigen, dass

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2).$$

iii. In früheren Vorlesungen haben Sie vermutlich den Kosinus hyperbolicus und den Sinus hyperbolicus einer reellen Variable

$$\cosh(x) \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

schon gesehen. Zeigen Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ und ermitteln Sie $\cosh(x + y) = ?$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse dieser Teilaufgabe mit denen aus **i.** und **ii.**

3. Lineare Abbildungen

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto f(z) \qquad f(z) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)z \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i. Bestimmen Sie für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ den Real- und Imaginärteil von $f(z)$ als Funktion von $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

ii. Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit reellen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Seien u und v gegeben durch $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = g(x, y)$.

Bestimmen Sie die Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d der Matrix in Gl. (2), unter denen sich $w = u + \mathrm{i}v$ als $w = f(z)$, also als komplexe Multiplikation von $z = x + \mathrm{i}y$, wie in Gl. (1) darstellen lässt.

iii. Bestimmen Sie für diesen Fall die Koeffizienten α, β als Funktion von a, b, c, d.