

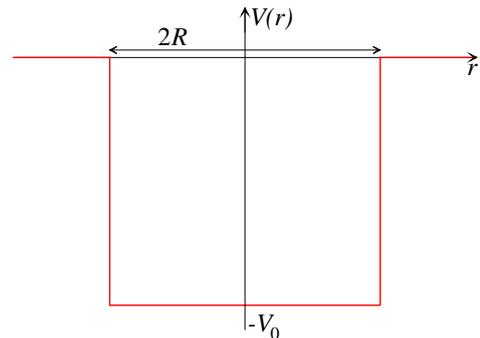
### II.4.2 b Wahl des effektiven Potentials

Ein wichtiger Punkt im oben beschriebenen Verfahren ist die Wahl des Ein-Teilchen-Potentials, in dem die Nukleonen eingeschlossen werden. Im Folgenden werden drei mögliche Modelle untersucht, die kugelsymmetrische Kerne beschreiben. Diese Potentiale werden mindestens durch eine den Kernradius spiegelnde Reichweite  $R$  und eine Tiefe  $-V_0$  charakterisiert, wobei  $V_0 \approx 50$  MeV wie im Fermi-Gas-Modell.

- Kastenpotential (II.22)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Unrealistisch kann auch das Potential unendlich für  $r > R$  angenommen werden.



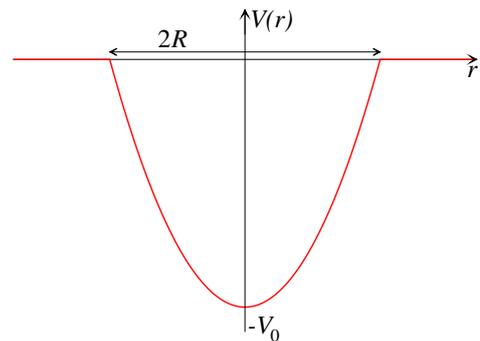
- harmonischer Oszillator (II.23)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Berechnungen sind einfacher wenn die Form

$$V(r) = -V_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

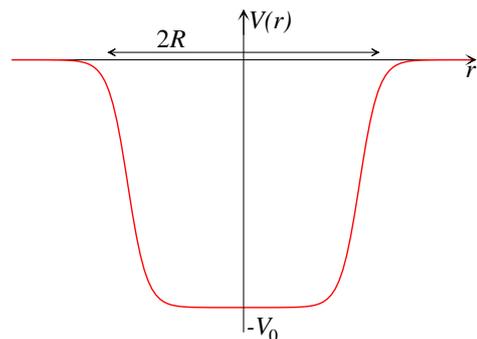
für einen beliebigen Abstand  $r$  gilt.



- Woods-Saxon Potential (II.24)

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{\delta}}}$$

$\delta \approx 0,5$  fm bestimmt die Breite des Kernrands.



Das Woods-Saxon Potential ist realistischer — es spiegelt offensichtlich die gemessene Dichteverteilung (I.20) der Nukleonen in Kernen mit  $A \geq 20$  —, es erfordert aber die Nutzung eines numerischen Lösungsverfahrens. Umgekehrt sind das Kasten- bzw. das Oszillatorpotential zwar vereinfachte Näherungen, jedoch existieren analytische Lösungen der Schrödinger-Gleichung für die Bewegung eines Nukleons in solchen Potentialen, was einen besseren Einblick in den Ursprung der verschiedenen Eigenschaften des Modells erlaubt, insbesondere in die nötigen Bestandteile, um beobachtete Kerneigenschaften wiederzugeben.

Um den Unterschied zwischen Protonen und Neutronen in Betracht zu ziehen werden unterschiedliche Potentialtöpfe angenommen: in erster Näherung, dieselben Potentiale mit unterschiedli-

chen Tiefen  $V_0^{(p)} \neq V_0^{(n)}$ .

### II.4.2c Einfachstes Beispiel: Kastenpotential

In diesem Paragraph werden die möglichen stabilen Ein-Teilchen-Zustände eines Teilchens im dreidimensionalen Kastenpotential (II.22) festgelegt, insbesondere deren Eigenenergien, welche die „Schalen“ der entsprechenden  $A$ -Teilchen-Zustände bestimmt. Dafür soll man die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in Anwesenheit des Potentials lösen.

Da das Potential kugelsymmetrisch ist und nur vom Ort abhängt, kommutiert der Hamilton-Operator  $\hat{h}$  mit den quadrierten Bahndrehimpuls  $\vec{L}^2$  und Spin  $\vec{S}^2$  des Nukleons, sowie mit deren Projektionen auf einer festen Achse  $\hat{L}_z$  bzw.  $\hat{S}_z$ . Daher ist  $\{\hat{h}, \vec{L}^2, \hat{L}_z, \vec{S}^2, \hat{S}_z\}$  ein vollständiger Satz kommutierender Observablen, deren Erwartungswerte die Ein-Teilchen-Eigenzustände völlig charakterisieren werden.<sup>(32)</sup> Dabei werden, wie üblich, die Eigenwerte des Hamilton-Operators  $\hat{h}$  — d.h. die Ein-Teilchen-Eigenenergien — durch eine Hauptquantenzahl  $n \in \mathbb{N}^*$  gekennzeichnet, und die Eigenwerte von  $\vec{L}^2$  bzw.  $\hat{L}_z$  durch ganzzahlige Quantenzahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  bzw.  $m_\ell \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}$ , vgl. Anhang ??.

**Bemerkung:** In der Kernphysik wird, wie in der Atomphysik, die spektroskopische Bezeichnungsweise benutzt, so dass ein s-, p-, d-, f-, g-, h-Zustand einen Zustand mit jeweils  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  andeutet. Im Gegensatz zur Atomphysik ist die azimutale Quantenzahl  $\ell$  in der Kernphysik nicht auf Werte kleiner als  $n$  beschränkt, sondern kann größer sein, wie unten zu sehen sein wird.

In Ortsdarstellung lautet der kinetische Energieoperator  $\hat{T}_i = -(\hbar^2/2m_i)\hat{\Delta}$ , mit  $\Delta$  dem Laplace-Operator. Somit lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein im Potential (II.22) eingeschlossenes Proton bzw. Neutron, beschrieben durch die Wellenfunktion  $\psi^{(p)}(\vec{r})$  bzw.  $\psi^{(n)}(\vec{r})$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta\psi^{(j)}(\vec{r}) - V_0^{(j)}\psi^{(j)}(\vec{r}) = \varepsilon^{(j)}\psi^{(j)}(\vec{r}) \quad \text{für } |\vec{r}| \leq R, \quad (\text{II.25})$$

wobei  $j = p$  oder  $n$ , während  $\varepsilon^{(j)}$  die Energie des Ein-Teilchen-Zustands  $\psi^{(j)}(\vec{r})$  darstellt.

Hiernach werden nur gebundene Nukleonen ins Betracht gezogen, sodass außer des Potentialtopfs  $\psi^{(j)}(\vec{r}) = 0$ , entsprechend einer verschwindenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Streng genommen ist diese Bedingung wenn  $V^{(j)}(|\vec{r}| > R) = 0$  nicht erfüllt, sondern nur wenn  $V^{(j)}(|\vec{r}| > R) = +\infty$ , was von jetzt an angenommen wird.<sup>(33)</sup>

Wegen der Kugelsymmetrie des Problems ist es günstig, Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  zu benutzen. Dazu ist es möglich, die Radial- und Winkelabhängigkeiten der Wellenfunktion eines Nukleons zu trennen („Separationsansatz“). Somit kann die letztere als

$$\psi^{(j)}(\vec{r}) = R_{n\ell}^{(j)}(r) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \quad (\text{II.26})$$

geschrieben werden, wobei  $n, \ell$  und  $m_\ell$  ganze Zahlen sind und der Winkelanteil  $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$  eine Kugelflächenfunktion bezeichnet (Anhang ??). Mit diesem Ansatz führt der Ausdruck des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$\hat{\Delta}f(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r f(\vec{r})] - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\hbar^2} \vec{L}^2 f(\vec{r})$$

unter Verwendung der Eigenwertgleichung (??) für jeden Wert von  $\ell$  zu den  $m_\ell$ -unabhängigen linearen Differentialgleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2m_j} \left[ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left( r R_{n\ell}^{(j)}(r) \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{n\ell}^{(j)}(r) \right] = (\varepsilon^{(j)} + V_0^{(j)}) R_{n\ell}^{(j)}(r), \quad (\text{II.27a})$$

<sup>(32)</sup> Der Erwartungswert von  $\vec{S}^2$  ist für alle Eigenzustände derselbe, und zwar  $\frac{3}{4}\hbar^2$ , da alle Protonen und Nukleon denselben Spin  $s = \frac{1}{2}$  haben. Deshalb erlaubt dieser Erwartungswert keine Unterscheidung zwischen den Zuständen und wird im Folgenden von deren Kennzeichnung ausgelassen.

<sup>(33)</sup> Die Herleitung der Eigenenergien und -zustände in diesem vereinfachten Fall befindet sich in manchem Lehrbuch der Quantenmechanik, z.B. in Fließbach [44, Kap. 25].

$n$	$X_{n0}$	$X_{n1}$	$X_{n2}$	$X_{n3}$	$X_{n4}$	$X_{n5}$	$X_{n6}$
1	3,1416	4,4934	5,7635	6,9879	8,1826	9,3558	10,5128
2	6,2832	7,7253	9,0950	10,4171	11,7049	12,9665	14,2074
3	9,4248	10,9041	12,3229	13,6980	15,0397	16,3547	17,6480
4	12,5664	14,0662	15,5146	16,9236	18,3013	19,6532	20,9835

**Tabelle II.1** – Erste Nullstellen der sphärischen Besselfunktionen  $j_0$  bis  $j_6$ .

wobei ein globaler Faktor  $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$  schon ausfaktorisiert wurde: somit wird das Problem auf ein eindimensionales Problem reduziert. Außerdem gelten die Randbedingungen

$$R_{n\ell}^{(j)}(0) < \infty : \quad \text{die Lösung soll in } r = 0 \text{ regulär sein;} \quad (\text{II.27b})$$

$$R_{n\ell}^{(j)}(R) = 0 : \quad \text{die Lösung soll bei } r = R \text{ kontinuierlich sein.} \quad (\text{II.27c})$$

Die erste dieser Bedingungen entspricht der nötigen Endlichkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi^{(j)}|^2 \propto (R_{n\ell}^{(j)})^2$ , insbesondere im Ursprungspunkt  $\vec{r} = \vec{0}$ , während die zweite Bedingung aus der Forderung  $\psi^{(j)}(\vec{r}) = 0$  außerhalb des Bereichs  $r \leq R$  folgt.

Der Einfachheit halber kann man zuerst die s-Zustände betrachten, d.h. den Fall  $\ell = 0$ : die Differentialgleichung (II.27a) lautet dann (von jetzt an wird der Index  $j$  der Kürze halber ausgelassen)

$$\frac{d^2}{dr^2} (rR_{n0}(r)) + \frac{2m\tilde{\varepsilon}}{\hbar^2} (rR_{n0}(r)) = 0$$

mit  $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon + V_0$ . Eine bei  $r=0$  reguläre Lösung [Bedingung (II.27b)] ist

$$R_{n0}(r) = C \frac{\sin k_{n0}r}{k_{n0}r} \quad \text{mit} \quad k_{n0}^2 = \frac{2m\tilde{\varepsilon}_{n0}}{\hbar^2}$$

und  $C$  einer Normierungskonstante, deren Ausdruck in der späteren Diskussion nicht benötigt wird. Damit die Lösung bei  $r = R$  eine Nullstelle hat [Randbedingung (II.27c)] soll  $k_{n0}$  nur die diskreten Werte  $k_{n0} = n\pi/R$  annehmen, wobei  $n$  die *Hauptquantenzahl* ist, sodass die möglichen Energien der Zustände quantisiert sind:

$$\tilde{\varepsilon}_{n0} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{R^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{II.28})$$

$\tilde{\varepsilon}_{n0}$  ist daher die Energie (in Bezug auf die Tiefe  $-V_0$  des Potentialtopfs) des auf dem  $ns$ -Zustand stehenden Nukleons.

**Bemerkung:** Der Wellenvektor  $k_{00}$  mit  $n = 0$  führt zu  $\psi(\vec{r}) = 0$  überall und entspricht daher keiner physikalisch relevanten Lösung.

Für eine beliebige *azimutale Quantenzahl*  $\ell$  lautet eine reguläre Lösung der Gleichung (II.27a)

$$R_{n\ell}(r) = j_\ell(k_{n\ell}r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_{n\ell}r}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(k_{n\ell}r),$$

wobei  $j_\ell(x)$  bzw.  $J_{\ell+1/2}(x)$  eine *sphärische Besselfunktion* bzw. eine *Besselfunktion halbzahliger Ordnung* bezeichnet.<sup>(34)</sup> Wie im Fall  $\ell = 0$  oben ist  $k_{n\ell}$  durch die Randbedingung (II.27c) festgelegt: die Wellenfunktion verschwindet bei  $r = R$  nur wenn  $k_{n\ell}R$  eine Nullstelle der sphärischen Besselfunktion  $j_\ell$  ist, d.h. nur für  $k_{n\ell} = X_{n\ell}/R$ , wobei  $X_{n\ell}$  die  $n$ -te Nullstelle von  $j_\ell$  bezeichnet (s. Tabelle II.1). Die entsprechende Energie des im Potentialtopf eingeschlossenen Nukleons ist

<sup>(34)</sup>Die ersten sphärischen Besselfunktionen sind

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad j_2(x) = \left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}.$$

Ihre Nullstellen kleiner als 15 werden in der Tabelle II.1 gegeben, vgl. auch Refs. [45], Kap. 10] oder [46], Kap. 10].

$$\tilde{\epsilon}_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{X_{nl}}{R} \right)^2. \tag{II.29}$$

Wie oben gesagt sind die Zustände durch die Erwartungswerte der Observablen  $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z\}$  charakterisiert, d.h. durch die zugehörigen Quantenzahlen  $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$ : die möglichen Energiewerten (II.29) hängen nur von  $n$  und  $\ell$  ab. Für feste  $\ell$  ist dann die *magnetische Quantenzahl*  $m_\ell \in \{-\ell, \dots, \ell\}$ , während der Erwartungswert der Projektion  $\hat{S}_z$  des Nucleonspins auf der  $z$ -Achse die Werte  $\pm \frac{1}{2}\hbar$  annehmen kann, entsprechend  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Insgesamt gibt es also auf dem  $(n, \ell)$ -Energieniveau  $2 \times (2\ell + 1)$  entartete Zustände.

Die Anordnung der möglichen Zustände nach wachsender Energie  $\tilde{\epsilon}_{nl}$  bzw. wachsendem Wert der Nullstelle  $X_{nl}$  wird in der Tabelle II.2 mit dem zugehörigen Entartungsgrad des Niveaus gegeben, sowie die Summe der Anzahlen von Zustände. Die entsprechenden Energieniveaus im Potentialtopf sind in Abb. II.10 dargestellt.

$(n, \ell)$	$X_{nl}$	Anzahl der Zustände auf dem Niveau	$\sum_{n,\ell} 2(2\ell + 1)$
1s	3, 14	2	2
1p	4, 49	6	8
1d	5, 76	10	18
2s	6, 28	2	20
1f	6.99	14	34
2p	7, 73	6	40
1g	8, 18	18	58
2d	9, 10	10	68
1h	9, 36	22	90
3s	9, 42	2	92
2f	10, 42	14	106
⋮	⋮	⋮	⋮

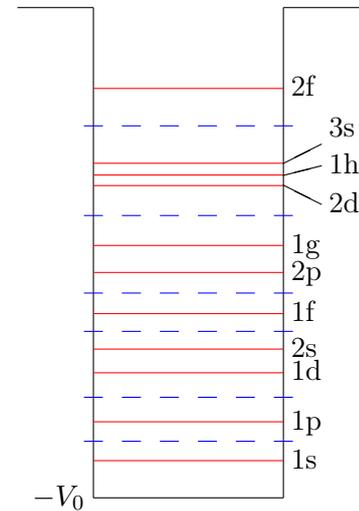


Abbildung II.10: Energieniveaus der Nucleonen in einem Kastenpotential.

Tabelle II.2: Termschema im Kastenpotential (II.22).

In diesem Termschema kommt manchmal eine größere Energielücke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Niveaus vor, sodass die nötige Energie, um ein Nucleon vom niedrigeren auf das höher liegende Niveau anzuregen, ebenfalls groß ist. Umgekehrt liegen mehrere Niveaus nah voneinander, z.B. 1d und 2s, 2p und 1g, oder 2d, 1h und 3s: in solchen Fällen ist die Anregungsenergie relativ gering. Dies führt zur Idee, dass diese dicht liegenden Niveaus eine Schale zusammen bilden. Die magischen Zahlen treten dann nur beim Abschluss entweder einer solchen „Composite-Schale“ oder eines isolierten Niveaus auf: so findet man 2, 8, 20, 34, 58, 92, 138...

Die ersten drei experimentell beobachteten magischen Zahlen 2, 8, 20 werden offensichtlich gut erklärt! Es fehlen aber 28, 50, 82 und 126.