

KAPITEL II

Struktur von Kernen. Kernmodelle

II.1	Phänomenologie	27
II.2	Tröpfchenmodell	28
II.2.1	Bethe–Weiszäcker Massenformel	29
II.2.2	Stabilität im Tröpfchenmodell	30
II.2.3	Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation	33
II.3	Atomkern als ideales Fermi-Gas	33
II.3.1	Ideales Fermi-Gas	34
II.3.2	Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen	35
II.3.3	Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas von Protonen und Neutronen	36
II.3.4	Mögliche Verbesserungen des Modells	38
II.4	Schalenmodell des Atomkerns	39
II.4.1	Motivation für ein Schalenmodell	40
II.4.2	Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns	42
II.4.3	Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung	48
II.4.4	Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	51
II.4.5	Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	55

II.1 Phänomenologie

- Es gibt ≈ 250 stabile Kerne (d.h. Kerne ohne bisherigen beobachteten Zerfall, was einer mittleren Lebensdauer $T_{1/2} \gtrsim 10^{20}$ Jahre entspricht), davon ⁽¹⁷⁾

Z	N		
gerade	gerade	148	„gg-Kerne“
ungerade	gerade	48	„ug-Kerne“
gerade	ungerade	53	„gu-Kerne“
ungerade	ungerade	5	„uu-Kerne“

Die stabilen uu-Kerne sind die leichtesten: ${}^2_1\text{H}$ (Deuterium), ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$. Dazu ist der angeregte Zustand mit $E^* = 77,1$ keV und $J_{\text{Kern}} = 9^-$ vom ${}^{180}_{73}\text{Ta}$ -Nuklide mit der Halbwertszeit $T_{1/2} > 1,2 \cdot 10^{15}$ Jahre besonders *metastabil*.

- Sehr viele stabile Isotope für $Z = 8, 20, 28, 50, 82$ [es gibt z.B. 10 stabile ${}_{50}\text{Sn}$ -Isotope (Zinn)], sowie sehr viele stabile Isotone für $N = 8, 20, 28, 50, 82, 126$. Außerdem sind diese Nuklide (und ${}^4_2\text{He}$: $Z = N = 2$) besonders stabil im Bezug auf ihre Nachbarn:

magische Zahlen

Fünf *doppelt magische Kerne* sind stabil: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

⁽¹⁷⁾Referenz [24] beinhaltet eine moderne Datenbank von Kerneigenschaften, mit insbesondere dem Spin und der Parität der Kerne, sowie den Halbwertszeiten der unstabilen Nuklide.

- ≈ 3000 instabile Kerne sind heute (Ende 2021) bekannt.
- Die meisten stabilen bzw. gebundenen Kerne haben $Z \leq N$ (die Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen wirkt destabilisierend auf protonenreiche Kerne).
Der relative Neutronenüberschuß bzw. das Verhältnis N/Z wächst mit der Massenzahl A : N/Z nimmt von 1 bei den leichten stabilen Kernen auf 1,54 bei dem schwersten stabilen Kern ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ und 1,59 bei dem langlebigen ${}^{238}_{92}\text{U}$.
- Bindungsenergie (vgl. § I.3.2) $B(Z, A) \equiv [Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A)] c^2$
Die Bindungsenergie pro Nukleon $B(Z, A)/A$ ist in erster Näherung konstant für $A \gtrsim 20$:
 $B(Z, A)/A \approx 7,5 - 8,5$ MeV (Abb. I.10).
- Aus der Systematik der gemessenen Spins und Paritäten (J_{Kern}^P) sowie magnetischen Dipolmomenten (μ) und elektrischen Quadrupolmomenten (Q) von Atomkernen (s. Ref. [24] oder Experimente 56-57 in Ref. [8]) lassen sich ein paar Regelmäßigkeiten beobachten:
 - für alle gg-Kerne sind $J_{\text{Kern}}^P = 0^+$ und $\mu = 0$;
 - die Parität der ug- bzw. gu-Kerne ändert sich oft bei einem der oben erwähnten magischen Protonen- bzw. Neutronenzahlen; sonst bleibt die Parität zwischen zwei aufeinanderfolgenden magischen Zahlen in den meisten Fällen unverändert;
 - die magnetischen Dipolmomente der ug-Kerne sind bis auf einige Ausnahmen immer positiv und nehmen mit wachsenden Kernspin zu; bei gu-Kernen existiert keine solche Tendenz;
 - bei den magischen Protonenzahlen ändert sich das Vorzeichen des elektrischen Quadrupolmoments: Q ist positiv unten einer magischen Zahl, negativ oben.

Verschiedene Kernmodelle werden eingeführt, um diese gemessenen Eigenschaften zu beschreiben bzw. zu erklären. Es soll aber sofort klar sein, dass „Various models of the nucleus emphasize different features of the nucleus. No single simple model explains all nuclear properties“ (E.Fermi: Kap. 8, Abschnitt H in Ref. [30]). Um die oben erwähnten Eigenschaften teilweise wiederzugeben werden in den drei folgenden Abschnitten drei Modelle des Kerns eingeführt, die unterschiedlichen Beschreibungsarten mit Betonung auf diversen Aspekten entsprechen.

II.2 Tröpfchenmodell

In Abschnitt I.2 wurde die gute Beschreibung der gemessenen Ladungsdichteverteilungen von Kernen mit $A \geq 20$ mithilfe der Woods-Saxon Verteilung (I.20) erwähnt. Dementsprechend ist die Teilchendichte $n(0)$ im Zentrum des Kerns in guter Näherung dieselbe für alle schwere Kerne: $n(0) \simeq n_\infty = 0,17$ Nukleonen/ fm^3 . Diese Universalität liegt zugrunde dem Begriff der *Kernmaterie*, d.h. einer Materie, die aus stark wechselwirkenden Nukleonen besteht.⁽¹⁸⁾ Die *Sättigungsdichte* n_∞ ist dann die Dichte dieser Kernmaterie im Gleichgewicht bei verschwindender Temperatur T .⁽¹⁹⁾

Die Eigenschaften der Kernmaterie sind bei $T = 0$ jene einer (kompressiblen) Flüssigkeit:

- die Kohäsionskräfte sind stark genug, um spontane Verdampfung zu verhindern (es existieren stabile gebundene Kerne!): kein Gas;
- die Kernmaterie besitzt kontinuierliche Rotations- und Translationssymmetrien, ist also kein Festkörper.

⁽¹⁸⁾ Um eine Art von Materie puristisch zu definieren, muss man zuerst ein unendliches System von wechselwirkenden Nukleonen betrachten.

⁽¹⁹⁾ Unter üblichen Bedingungen ist die Temperatur T solche, dass die kinetische Energie $\simeq k_B T$ der Kerne viel kleiner ist, als die typische Energie in der Kernphysik $\approx 1-10$ MeV. Nicht-vernachlässigbare Temperaturen bzw. kinetische Energien werden nur in der allerletzten Phase des Lebens schwerer Sterne erreicht, oder in Kernkollisionen.

In diesem Bild ist ein Kern als ein Tröpfchen von Kernmaterie dargestellt: ein bestimmter Kern wird nur durch seine Massenzahl A (bzw. seinen Radius $\propto A^{1/3}$) und seine elektrische Ladung Z charakterisiert; der Rest seiner Eigenschaften sollen jene der Kernmaterie spiegeln. Die gesamte Energie des Tröpfchens entspricht der Bindungsenergie des Kerns: dieser Energie beitragen dann ein Volumen- und ein Oberflächenterm mit umgekehrtem Vorzeichen. Da der Kern elektrisch geladen ist, soll auch ein betreffender „Coulomb“-Term der Energie beitragen.

Neben diesen Beiträgen können weitere Terme ins Modell eingeführt werden, um verschiedene Kerneigenschaften wiederzugeben. Im Folgenden werden nur zwei solche halb-phänomenologische Beiträge betrachtet, die Vorhersagen über die Stabilität von Kernen ermöglichen.

II.2.1 Bethe–Weizsäcker Massenformel

Die Bindungsenergie wird als die Summe verschiedener Beiträge geschrieben [31, 32]:

$$B = B_V + B_S + B_C + B_A + B_\delta, \quad (\text{II.1})$$

wobei $B_V, B_S, B_C, B_A, B_\delta$ von (A, Z) und von positiven Koeffizienten $a_V, a_S, a_C, a_A, a_\delta$ abhängen.

- Volumenenergie $B_V = a_V A$ (Nukleonenzahl $A \propto$ Volumen V)
Dieser Term entspricht einer konstanten Energiedichte (\Leftrightarrow konstanten Teilchendichte);
 a_V wird manchmal *Sättigungsenergie* genannt.
- Oberflächenterm $B_S = -a_S A^{2/3}$ (Oberfläche $S \propto R^2 \propto A^{2/3}$)
Die Nukleonen an der Oberfläche sind weniger gebunden als solche im Inneren, weil sie weniger Nachbarn besitzen.
- Coulomb-Term $B_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$ ($\propto Q^2/R$)
Die Z Protonen stoßen einander ab: verringerte Bindung.

Es sei eine homogen geladene Kugel mit Radius dem r' und der Ladungsdichte ρ . Für Abstände $r \geq r'$ erzeugt sie das elektrostatische Coulomb-Potential $U(r) = q'/4\pi\epsilon_0 r$, wobei $q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho$. Um weitere Ladungen von außen zuführen, z.B. eine Kugelschale mit der Ladung $dq' = 4\pi r'^2 dr' \rho$, muß man eine Arbeit $dW = -dq' [U(\infty) - U(r')] = U(r') dq'$ leisten. Um einen Kern mit dem Radius $r' = R$ und der Ladung $Ze = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ zu kondensieren benötigt man insgesamt eine Arbeit

$$W = \int_0^R dW = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r'^4 dr' = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}.$$

Mithilfe der Formel $R = r'_0 A^{1/3}$ wobei $r'_0 = 1,128$ fm erhält man also $a_V = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r'_0} = 0,77$ MeV.

- Asymmetrie-Energie $B_A = -a_A (A/2 - Z)^2 A^{-1}$
Quantenmechanische Effekte (s. § II.3.3) im Bezug auf die gemessene annähernde Ladungsunabhängigkeit der Nukleon–Nukleon Kräfte bevorzugen einen möglichst kleinen Neutronenüberschuß. Umgekehrt sind Kerne mit hohen Werten von $N - Z = A - 2Z$ weniger gebunden.
- Paarungsterm B_δ
Motiviert durch die Beobachtung, dass es mehr Kerne mit geraden Protonen- und Neutronenzahl gibt, als mit ungerader Z oder N :

$$B_\delta = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

wobei $\delta = a_\delta A^{-1/2}$ (oder manchmal $\propto A^{-3/4}$: die A -Abhängigkeit ist rein empirisch).

Insgesamt erhält man die Bethe–Weizsäcker Massenformel

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A (Z - \frac{A}{2})^2 A^{-1} \pm \delta}{c^2}. \quad (\text{II.2})$$

Die verschiedenen Koeffizienten werden durch Anpassung den Daten bestimmt. Man findet z.B. $a_V = 15,85$ MeV, $a_S = 18,34$ MeV, $a_C = 0,71$ MeV, $a_A = 92,86$ MeV, $a_\delta = 11,46$ MeV [34]. Der angepasste Wert des Parameters a_c ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der elektrostatischen Berechnung. Mit diesen Parametern liefert die Massenformel (II.2) eine sehr gute Beschreibung der gemessenen Massen bzw. Bindungsenergien stabiler Kerne, mit einer Genauigkeit von etwa 1% für $A > 30$, vgl. Abb. II.1.

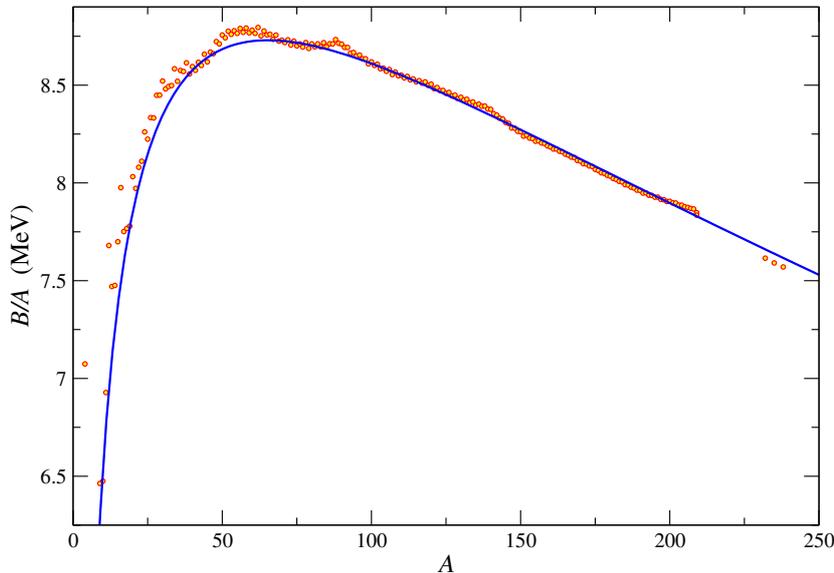


Abbildung II.1 – Bindungsenergien pro Nukleon stabiler Kerne (vgl. Bildtext von Abb. I.10) zusammen mit der durch Gl. (II.1) gegebenen Anpassung unter Auslassung des Paarungsterms B_δ .

Die jeweiligen Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie werden in Abb. II.2 dargestellt: Die Oberflächenenergie spielt die größte Rolle bei kleinen Kernen, B_S/A sinkt aber mit wachsender A . Im Gegensatz sind die relativen Höhen der Coulomb- und Asymmetrie-Terme bei leichten Kernen gering, nehmen aber bei schwereren Kernen zu.

In einigen Büchern wird der Coulomb-Beitrag als $B_C = -Z(Z-1)/A^{1/3}$ statt des oben gegebenen Terms geschrieben. Der angebliche Grund ist, die „Selbstwechselwirkung“ jedes Protons nicht zweimal zu zählen. Eine solche Verfeinerung wird im Folgenden nicht betrachtet: Erstens ist der Unterschied zwischen Z^2 und $Z(Z-1)$ nur bedeutsam bei kleinem Z , wo der Coulomb-Term immerhin eine geringe Rolle spielt. Zweitens ist es nicht klar, warum im Zähler der „Selbstenergie“ der Protonen der Kernradius vorkommt, und nicht der Protonradius.

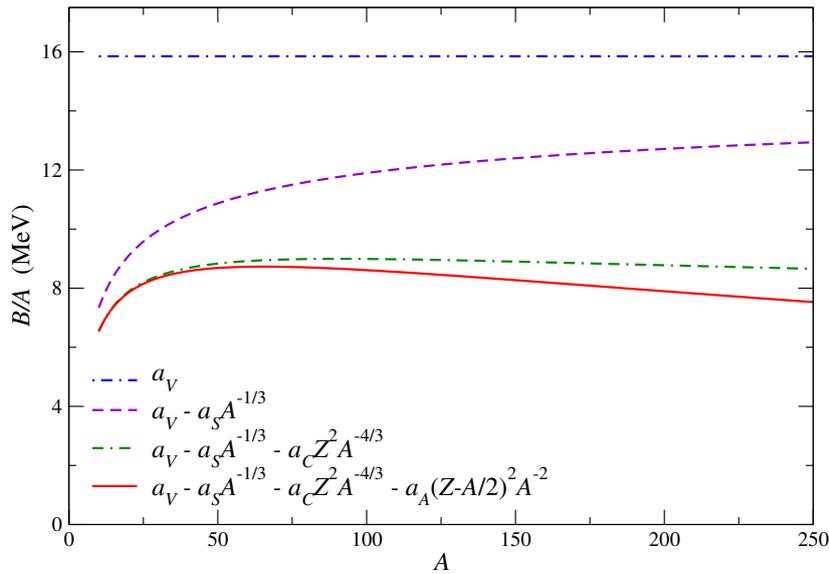


Abbildung II.2 – Jeweilige Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon. Für Z wurde der durch Gl. (II.3) gegebene Wert des stabilsten Kerns bei gegebener A benutzt.

II.2.2 Stabilität im Tröpfchenmodell

Aus der Massenformel (II.2) kann man die Stabilität eines Nuklides gegen verschiedene mögliche Umwandlungen bestimmen.

II.2.2a Stabilität in einer Isobarenreihe

Betrachte zum Beispiel die Variation der Kernmasse innerhalb einer Isobarenreihe $A = \text{const.}$ Nach Gl. (II.2) hängt für festes A die Masse quadratisch von Z ab. Dann gibt es zwei Möglichkeiten je nachdem, ob die Nukleonenzahl ungerade oder gerade ist:

- ungerade A : Der Paarungsterm B_δ verschwindet für g_u - und g_u -Kerne, deren Massen auf einer einzigen Parabel zusammen liegen (Abb. II.3 links). Nur ein mit der möglichst minimalen Masse Kern ist stabil, in den die anderen durch vorlaufende β^+ - oder β^- -Zerfälle sich umwandeln können.⁽²⁰⁾

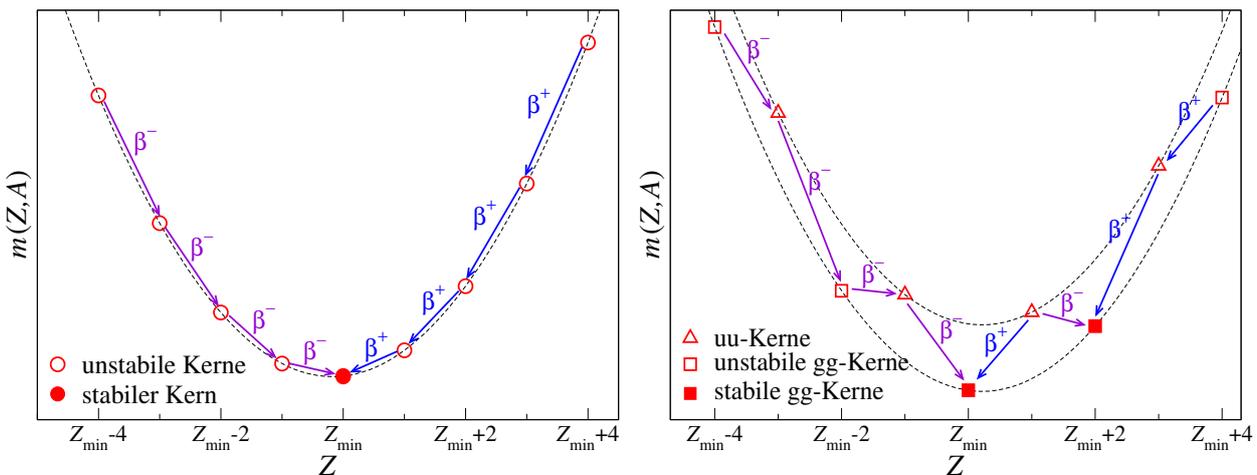


Abbildung II.3 – Variation mit Z der Masse $m(Z, A)$ in einer Isobarenreihe für ungerade (links) bzw. gerade (rechts) Massenzahl A .

⁽²⁰⁾ Um genauer zu bestimmen, ob ein β^- - bzw. β^+ -Zerfall energetisch möglich ist, muss man auch die Masse des emittierten Elektrons bzw. Positrons berücksichtigen, s. § III.3.3.

- gerade A : Der Massenformel nach liegen die Massen der gg- bzw. uu-Kerne auf zwei verschiedenen Parabeln (Abb. II.3 rechts). Da kein direkter Übergang zwischen Isobaren mit Z und $Z \pm 2$ möglich ist,⁽²¹⁾ können mehrere stabile gg-Isobare existieren. Andererseits kann ein uu-Kern nur stabil sein, wenn er kein gg-Isobar mit einer niedrigeren Masse besitzt.⁽²²⁾

Somit wird die 1934 experimentell entdeckte *Mattauchsche Isobarenregel* erklärt, dass der Unterschied der Protonenzahlen zweier stabiler Isobare mindestens 2 sein soll^[35].

Die Protonenzahl Z_{\min} des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe wird durch die Bedingung $\partial m(Z, A)/\partial Z = 0$ gegeben. Mit Gl. (II.2) findet man

$$Z_{\min}(A) = \frac{A a_A + (m_n - m_p)c^2}{2 a_A + a_C A^{2/3}} = \frac{A}{1,97 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (\text{II.3})$$

Die entsprechende Abhängigkeit (β -Stabilitätslinie, *Stabilitätstal*) wird in Abb. II.4 gezeigt. Für kleines A liefert diese Gleichung $Z_{\min} \simeq A/2$, während Z_{\min} für größere Massenzahl immer kleiner als $A/2$ wird: somit wird der beobachtete zunehmende relative Neutronenüberschuß erklärt.

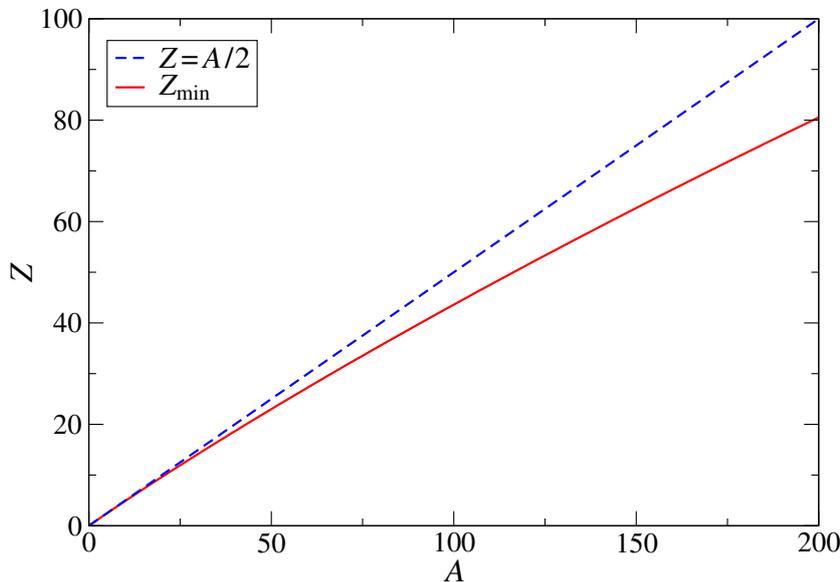


Abbildung II.4 – Protonenzahl Z_{\min} des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe, Gl. (II.3).

II.2.2b Stabilität gegenüber α -Zerfall

Ein Kern ist gegenüber α -Zerfall (= Emission eines ${}^4_2\text{He}$ -Kerns) energetisch instabil, wenn seine Masse größer als die Summe der Massen eines ${}^4_2\text{He}$ -Kerns und des Kerns mit $Z - 2$ und $A - 4$ ist:

$$Q_\alpha \equiv [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m({}^4_2\text{He})]c^2 \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

Q_α ist dann die Summe der kinetischen Energien des emittierten α -Teilchens und des zurückstoßenden Tochterkerns (s. § III.3.2).

Der Massenformel (II.2) nach wird Q_α positiv für die Kerne auf der β -Stabilitätslinie sobald $A \geq 166$ ($Z_{\min} = 68$): Kerne mit größerer Massenzahl sollten gegen die Emission von α -Teilchen instabil sein.⁽²³⁾ Der erste α -instabile Kern im Stabilitätstal ist tatsächlich ${}^{144}_{60}\text{Nd}$ mit $Q_\alpha = 1,9$ MeV und der Halbwertszeit $T_{1/2} = 2,3 \cdot 10^{15}$ Jahren (s. § III.3.2).

⁽²¹⁾Tatsächlich gibt es auch die Möglichkeit eines *doppelten β -Zerfalls*.

⁽²²⁾Da die Breite der Parabeln mit A wächst, wird das mögliche Vorhandensein eines gg-Isobars mit niedrigerer Masse wahrscheinlicher mit steigender Massenzahl; deshalb sind die einzigen stabilen uu-Kerne die leichtesten.

⁽²³⁾Wenn anstatt der nach der Massenformel berechneten Werte die gemessenen Kernmassen benutzt werden, schneidet die Kurve $Q_\alpha = 0$ die Stabilitätslinie bei $A \approx 145$.

II.2.3 Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation

Betrachten wir die Vorhersage des Tröpfchenmodells zur Stabilität eines makroskopisch großen Objekts aus Kernmaterie. Deswegen führen wir in die Bindungsenergie (II.1) einen zusätzlichen Beitrag ein, der der Gravitationsbindungsenergie des Objekts entspricht:

$$B_G \equiv \frac{3}{5} \frac{G_N m^2}{R},$$

wobei G_N die Newtonsche Konstante ist, und m bzw. R die Masse bzw. der Radius des Objekts ist. Dieser Beitrag ist für übliche Kerne vernachlässigbar.

Nehmen wir an, dass das Objekt meistens aus Neutronen hergestellt ist, sodass $Z \ll N \approx A$ und der Coulomb-Term in Gl. (II.1) vernachlässigbar ist. Die Masse ist dann $m = Am_n$ (der Einfachheit halber wird der Beitrag der gesamten Bindungsenergie zu diesem Term vernachlässigt). Für ein großes Objekt ($A \gg 1$) werden der Oberflächenterm und der Paarungsterm viel kleiner als B_V , B_A und B_G . Mit dem Wert des „Kern“-Radius $R = r'_0 A^{1/3}$ erhält man

$$B \simeq a_V A - \frac{a_A}{4} A + \frac{3}{5} \frac{G_N m_n^2}{r'_0} A^{5/3}.$$

Das Objekt wird gebunden, wenn diese Bindungsenergie positiv ist, d.h. wenn

$$\frac{3}{5} \frac{G_N m_n^2}{r'_0} A^{2/3} > \frac{a_A}{4} - a_V = 7,4 \text{ MeV}.$$

Mit $r'_0 = 1,128 \text{ fm}$ entspricht diese Bedingung einem minimalen Wert $A > 4 \cdot 10^{55}$, d.h. einem Radius $R > 4 \text{ km}$ und einer Masse $m > 7 \cdot 10^{28} \text{ kg} \approx 0,035 M_\odot$ (M_\odot : Sonnenmasse): das Objekt ist also ein Neutronenstern⁽²⁴⁾

⁽²⁴⁾Das hier benutzte Modell ist viel zu vereinfacht, um einen echten Neutronenstern gut zu beschreiben. Zum Beispiel wurde stillschweigend angenommen, dass die den Neutronstern bildende Kernmaterie inkompressibel ist (dies entspricht $a_V = \text{const.}$, unabhängig von der Tiefe im Stern). Es ist aber hoch merkwürdig, dass die guten Größenordnungen des Radius ($\sim 10 \text{ km}$) und der Masse ($\approx 1 M_\odot$) erhalten werden, obwohl die Werte der Koeffizienten in Gl. (II.2) nur geeignet sind, um die Eigenschaften von Kernmaterie mit $A \lesssim 250$ zu beschreiben, nicht für A um ≈ 50 Zehnerpotenzen größer. Dies zeigt, dass die starke Wechselwirkung wahrscheinlich eine ganz ähnliche Rolle in Neutronensternen wie in Kernen spielt.