Übung Nr. 9

Diskussionsthemen:

- Vorhersagen des Schalenmodells des Atomkerns (Spin, Parität, elektrische Dipol- und Quadrupolmomente)
- Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

Aufgabe 27. Angeregte Zustände im Schalenmodell

In der folgenden Tabelle sind für einige Kerne die experimentell bestimmten Spins und Paritäten des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands gegeben:

	$^{7}_{3}$Li	$^{23}_{11}$Na	$^{33}_{16}$S	$^{41}_{21}$Sc	$^{83}_{36}$Kr	$^{93}_{41}$Nb
J_0^{P}	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$
J_1^{P}	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$

Geben Sie nach dem Einteilchen-Schalenmodell die Konfiguration der Protonen und Neutronen in nicht abgeschlossenen Unterschalen für diese Kerne an, und machen Sie Voraussagen über die Quantenzahlen der Grundzustände und ersten angeregten Zustände. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den angegebenen Werten.

Aufgabe 28. Spin und Parität

Berechnen Sie Spin und Parität $J^{\mathsf{P}}_{\text{Kern}}$ der folgenden Kerne: ^{30}Si, ^{40}Ca, ^{41}Ca, ^{59}Co.

Aufgabe 29. Kernspinresonanz (2)

(Fortsetzung der Aufgabe **26**)

Ein Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ sei in einem Magnetfeld, das sich schreiben lässt als Überlagerung eines festen Magnetfeldes $\vec{\mathscr{B}}_0$ entlang der z-Achse und eines zweiten schwächeren zeitabhängigen Magnetfeldes $\vec{\mathscr{B}}_1$, das in der (x, y)-Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit lautet nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \left(\vec{\mathscr{B}}_0 + \vec{\mathscr{B}}_1(t)\right) = -\mu_0 \mathscr{B}_0 \hat{\sigma}_z - \mu_0 \mathscr{B}_1 \cos(\omega t)\, \hat{\sigma}_x - \mu_0 \mathscr{B}_1 \sin(\omega t)\, \hat{\sigma}_y. \tag{1}$$

Die Schrödinger-Gleichung liefert für die zeitliche Entwicklung des auf 1 normierten Zustands $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ die gekoppelten differentiellen Gleichungen

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}a_+}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_0}{2}\, a_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} a_-(t) \\ \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}a_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} a_+(t) - \dfrac{\omega_0}{2}\, a_-(t), \end{cases} \tag{2}$$

wobei $\omega_0 \equiv -\dfrac{2\mu_0 \mathscr{B}_0}{\hbar}$ und $\omega_1 \equiv -\dfrac{2\mu_0 \mathscr{B}_1}{\hbar}$.

a) Zeigen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $a_\pm(t)$ durch $b_\pm(t) \equiv \exp(\pm \mathrm{i}\omega t/2)\, a_\pm(t)$ zu den einfacheren folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}b_+}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\omega - \omega_0}{2}\, b_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, b_-(t) \\ \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}b_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, b_+(t) + \dfrac{\omega - \omega_0}{2}\, b_-(t) \end{cases}$$

führt.

Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_\pm}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2. \tag{3}$$

b) Der Spin sei zu $t = 0$ im $|+\rangle$ Zustand, was $b_-(0) = a_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (3)? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ um t zu finden, lautet

$$\mathcal{P}_{+\to-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω: Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des $|+\rangle \to |-\rangle$-Übergangs eine präzise Bestimmung der *Larmor-Frequenz* ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld $\mathscr{B}_0$) des gyromagnetischen Faktors γ?

Mithilfe dieses Verfahrens verbesserte Isidor Rabi die Genauigkeit der Messungen von γ-Werten um einen Faktor $\approx 10^3$! Dann kamen Felix Bloch & Edward Purcell...

c) Wenn Sie Zeit haben können Sie noch die Bewegungsgleichungen (2) herleiten! Was ist die physikalische Deutung der Substitution der Funktionen $a_\pm$ durch die Funktionen $b_\pm$?

Aufgabe 30. Magnetisches Dipolmoment und Larmor-Frequenz

Berechnen Sie Spin, Parität und magnetisches Moment der ${}^{13}_{6}$C und ${}^{19}_{9}$F Kerne im Grundzustand. Was ist die Larmor-Frequenz (vgl. Aufgabe **29**) des ${}^{13}_{6}$C-Kerns in einem Magnetfeld von 1,5 Tesla?