

Übung Nr. 8

Diskussionsthemen:

- Wie werden die „magischen Zahlen“ bei Atomkernen erklärt? Welcher physikalische Effekt spielt dabei eine entscheidende Rolle?
- (Besprechung in der ersten Woche im Juni) Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

Aufgabe 23. Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns

Nach Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung ergibt sich für die ersten Schalen in einem realistischen Potentialtopf das Termschema

$$1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 1f_{7/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}, \dots \quad (1)$$

Dann sind bei Protonen bzw. Neutronen die zwei nächsten Schalen $1g_{7/2}$, $2d_{5/2}$ bzw. $2d_{5/2}$, $1g_{7/2}$. Geben Sie die Paritäten und Entartungsgrade der verschiedenen Niveaus an.

Aufgabe 24. Elektrisches Quadrupolmoment

- i. Zeigen Sie, dass eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung kein elektrisches Quadrupolmoment hat.
- ii. Wir wollen im Folgenden das elektrische Quadrupolmoment eines deformierten Kerns ausrechnen. Hierbei sei die Oberfläche eines prolatsen Ellipsoids beschrieben durch die Funktion

$$r(\theta, \varphi) = R [1 + \beta_{20} Y_{20}(\theta, \varphi)],$$

wobei R der mittlere Radius und β_{20} der Deformationsparameter sind und

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

(Symmetrieachse ist die z -Achse). Berechnen Sie das Quadrupolmoment $Q_{zz} = \int \rho(\vec{r}) (3z^2 - r^2) d^3\vec{r}$ des deformierten Kerns unter der Annahme, dass die Ladung homogen über das Volumen des Ellipsoids verteilt ist. Sie sollten hierbei eine Entwicklung in β_{20} bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(\beta_{20}^2)$ vornehmen.

Aufgabe 25. (Wiederholung QM) Spin-System

Der Hamilton-Operator eines Systems aus zwei Spin-1-Teilchen mit Spins \vec{S} und \vec{S}' sei

$$\hat{H} = A + B \hat{S} \cdot \hat{S}' + C(\hat{S}_3 + \hat{S}'_3),$$

mit reellen Konstanten A, B, C . Finden Sie die Energie-Eigenwerte des Systems. Gibt es Entartung? Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Menge von Operatoren, die mit \hat{H} vertauschen.

Aufgabe 26. Kernspinresonanz: Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Das magnetische Dipolmoment $\hat{\mu}$ und der Spin-Operator \hat{S} eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\mu} = \gamma \hat{S} = \mu_0 \hat{\sigma},$$

wobei γ das sog. gyromagnetische Verhältnis und $\mu_0 \equiv \gamma \hbar / 2$ ist. Wir wollen hier das durch Isidor Rabi eingeführte Prinzip der Messung von γ beschreiben.

Die übliche Darstellung der Pauli-Matrizen ist

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Die Eigenzustände $|+\rangle, |-\rangle$ (in der Diracschen Bezeichnungsweise) der Operatoren \hat{S}^2 und \hat{S}_z bilden gemeinsam eine Basis der Spinzustände; diese Eigenzustände genügen den Gleichungen

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \quad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \quad \hat{S}^2|\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\pm\rangle$$

sowie

$$\hat{S}_x|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|-\rangle, \quad \hat{S}_x|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \quad \hat{S}_y|+\rangle = i\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \quad \hat{S}_y|-\rangle = -i\frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

In dieser Aufgabe betrachten wir die Präzession eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_0$ entlang der z -Achse. Der entsprechende Hamilton-Operator ist¹

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = -\mu_0 \mathcal{B}_0 \hat{\sigma}_z. \quad (3)$$

Sei $|\psi(t)\rangle$ ein beliebiger Zustand, der bei $t = 0$ die Bedingung $|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ erfüllt, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Die spätere zeitliche Entwicklung des Zustands wird durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator (3) gegeben, so dass

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t/2}|+\rangle + \beta e^{i\omega_0 t/2}|-\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\frac{2\mu_0 \mathcal{B}_0}{\hbar}. \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ des magnetischen Dipolmoments im Zustand $|\psi(t)\rangle$ lautet

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = 2\mu_0 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta e^{i\omega_0 t}), \quad \langle \hat{\mu}_y \rangle = 2\mu_0 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta e^{i\omega_0 t}), \quad \langle \hat{\mu}_z \rangle = \mu_0 (|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

Schreiben Sie die x - bzw. y -Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu_0 \alpha^* \beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projizierung von $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ auf die (x, y) -Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$?

¹Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Anteil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.