Übung Nr. 7

Diskussionsthemen:

- Welche experimentellen Beobachtungen führen zur Idee eines Schalenmodells des Atomkerns?
- Wie werden die Energieniveaus eines Nukleons in einem Kastenpotential hergeleitet?
- Frischen Sie Ihre Kenntnisse in Quantenmechanik auf. (Schrödinger-Gl. — insbesondere in 3D: Bahndrehimpulsoperator! — und ihre Lösung; Spin & Drehimpulse und ihre Addition)

Aufgabe 21. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der dreidimensionale (3D) harmonische Oszillator wird durch das Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ beschrieben.

i. Betrachten Sie den der kinetischen Energie entsprechenden Operator für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten.

a) Machen Sie einen Separationsansatz für die Wellenfunktion und zeigen Sie, dass man so die Gleichungen für drei eindimensionale harmonische Oszillatoren erhält. Folgern Sie daraus, dass sich die Energieniveaus des 3D-Oszillators durch drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 ausdrücken lassen.

b) Sei $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$. Wie lautet der Entartungsgrad des Niveaus mit Energie $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$?

ii. Löst man das Problem des 3D-Oszillators in Kugelkoordinaten (was wir hier nicht tun wollen), so findet man für die Energieniveaus:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega \left[2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right],$$

wobei $n = 1, 2, \dots$ (Hauptquantenzahl), und $\ell = 0, 1, \dots$ (Bahndrehimpulsquantenzahl).

a) Welchen Entartungsgrad weisen die Energieniveaus auf? Berechnen Sie diesen explizit für die ersten 6 Energieniveaus.

b) Welche Parität haben die Energieniveaus jeweils?

iii. Geben Sie die Energieniveaus für das Problem eines Teilchens der Masse m im Potentialtopf

$$V(\vec{r}) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right]$$

an, wobei $r = |\vec{r}|$ und $V_0 > 0$.

Aufgabe 22. Teilchen in einem endlichen Kastenpotential

i. **Präambel** Bekannterweise kann ein Zwei-Körper-Problem mit zentraler Kraft nach Einführung der Relativkoordinate und der reduzierten Masse m_{red} als Ein-Körper-Problem beschrieben werden. Wie lautet aber m_{red} in Abhängigkeit von den Massen m_1, m_2 der zwei Körper? Was ergibt sich falls $m_1 = m_2 \equiv m_N$?

ii. Ein Teilchen mit Masse $m_N/2$ sei in einem kugelsymmetrischen Kastenpotential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |\vec{r}| < R_0 \\ 0 & \text{für } |\vec{r}| > R_0, \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$. Mit einer passenden Wahl der Parameter V_0 und R_0 kann es nur einen einzigen gebundenen Zustand geben. Sei $-E_B$ mit $E_B > 0$ die Energie dieses Zustands.

a) Bei verschwindendem Bahndrehimpuls vereinfacht sich das Problem zu einem eindimensionalen radialen Problem. Sei $R(r)$ der radiale Anteil der Wellenfunktion mit $r = |\vec{r}|$. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung für $u(r) \equiv rR(r)$ zu den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + k^2u(r) = 0 \quad \text{für } r < R_0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2u(r)}{dr^2} - K^2u(r) = 0 \quad \text{für } r > R_0 \quad (1)$$

führt, wobei k und K von m_N , $\hbar$, V_0 und E_B abhängen.

b) Für die Lösung dieser Gleichungen macht man den Ansatz $u(r) = A \sin(kr)$ für $r < R_0$ [zusätzliche Frage: warum nicht mit $\cos$?] und $u(r) = B e^{-K(r-R_0)}$ für $r > R_0$. Prüfen Sie, dass die Stetigkeit in $r = R_0$ dieser Lösung und ihrer Ableitung zu den Bedingungen $A \sin(kR_0) = B$ und $k \cot(kR_0) = -K$ führt, die wiederum die Bedingung

$$k^2 A^2 = (k^2 + K^2) B^2 \quad (2)$$

geben.

c) Die Lösung der Schrödinger-Gleichung soll auf 1 normiert werden. Zeigen Sie, dass daraus die folgende Bedingung folgt [einige wichtigen „Details“ sollten Sie dabei nicht vergessen!]

$$\frac{A^2}{2k} [2kR_0 - \sin(2kR_0)] + \frac{B^2}{K} = \frac{1}{2\pi}. \quad (3)$$

d) Löst man die Gleichungen (2)–(3) nach A und B unter Berücksichtigung von $K \ll k$, so findet man

$$A \simeq B \simeq \sqrt{\frac{K}{2\pi}} e^{-KR_0/2}$$

und daher $u(r) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} e^{-KR_0/2} \sin(kr)$ für $r < R_0$ und $u(r) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} e^{K(R_0/2-r)}$ für $r > R_0$.

Sei $m_N = 939 \text{ MeV}/c^2$, $V_0 = 38,5 \text{ MeV}$, $E_B = 2,225 \text{ MeV}$. Zeigen Sie, dass diese numerischen Werte zu $k = 0,938 \text{ fm}^{-1}$ und $K = 0,232 \text{ fm}^{-1}$ führen. Sei dazu $R_0 = 1,93 \text{ fm}$. Plotten Sie $u(r)$ und berechnen Sie (Mathematica?) den mit der Wellenfunktion quadratisch gemittelten Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$.

e) Schauen Sie sich die oben angegebenen Werte von m_N und E_B an. Welchen Atomkern haben Sie gerade modelliert?