

## Übung Nr. 6

**Diskussionsthema:** Fermi-Gas-Modell des Atomkerns

### Aufgabe 17. Typische Skalen der Kernphysik

Der Radius eines Kerns sei durch  $R = 1,3A^{1/3}$  fm gegeben.

#### i. Zeitskala

Berechnen Sie die Zeit, die ein Nukleon mit kinetischer Energie gleich der Fermi-Energie  $\varepsilon_F \approx 40$  MeV benötigt, um einen  $^{208}\text{Pb}$ -Kern zu durchqueren.

#### ii. Energie- und Impulsskala

Schätzen Sie unter Verwendung der Heisenbergschen Unschärferelation den typischen Impuls eines Nukleons in einem  $^{208}\text{Pb}$ -Kern. Was ist die zugehörige typische Energie? Vergleichen Sie mit den im Fermi-Modell erwähnten Werten.

### Aufgabe 18. Neutronenstern als Fermi-Gas

Nach dem Verbrauch ihres nuklearen „Brennstoffs“ kollabieren Sterne mit einer Masse von etwa  $10 M_\odot$  zu Neutronensternen. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass diese ausschließlich aus entarteten Neutronen bestehen.

i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines Kerns ( $n_\infty = 0,17$  Nukleonen/fm<sup>3</sup>) und die typische Temperatur ist  $T \approx 10^8$  K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen (d.h. kinetische Energie  $\ll$  Massenenergie) Neutronen bei Null-Temperatur beschrieben werden kann.

Es sei  $\varepsilon_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{V}}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_n}$  die zugehörige Fermi-Energie mit der Zahl  $\mathcal{N}_n$  von Neutronen.

ii. Berechnen Sie die Gesamtenergie  $E(R)$  des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius  $R$ . Diese besteht aus zwei Beiträgen: der kinetischen Energie (benutzen Sie hier die in der Vorlesung angegebene durchschnittliche kinetische Energie pro Neutron) und der Gravitationsenergie. Leiten Sie die Gravitationsenergie  $E_G$  analog zur Betrachtung in der Vorlesung bezüglich der potentiellen elektrostatischen Energie einer homogen geladenen Kugel her.

iii. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius  $R_{\text{eq}}$ , für den die Energie  $E(R)$  minimal wird.

iv. Berechnen Sie den Wert dieses Radius sowie die entsprechende Teilchendichte für einen Neutronenstern mit der Masse  $M = 1,4 M_\odot$  ( $1 M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg).

### Aufgabe 19. Kern als einzel- oder zwei-komponente Fermi-Gas

Berechnen Sie die Gesamtenergie (ohne Ruhemasse) des Atomkerns  $^{107}_{47}\text{Ag}$ , einerseits unter der Annahme, dass Protonen und Neutronen voneinander verschieden sind, andererseits dass sie nicht verschieden sind, und vergleichen Sie beide Resultate. Berechnen Sie auch explizit  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_N$ . Wie gut ist die in der Vorlesung betrachtete Entwicklung?

### Aufgabe 20. ... Und wieder das Fermi-Gas-Modell: Weiße Zwerge

Weißer Zwerge sind kleine (vgl. Frage iii.) Sterne, die aus Materie mit einem entarteten Elektronengas bestehen. Sie können entstehen, wenn die Fusionsprozesse im Inneren eines der Sonne ähnlichen Sterns zum Erliegen gekommen sind: dann kann der Stern der Gravitationswirkung nichts mehr entgegensetzen. (Die Masse des Sterns genügt allerdings nicht, um einen Neutronenstern zu erzeugen).

Die  $\mathcal{N}_e$  Elektronen (Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen, d.h. Spin-Entartungsgrad 2) im Weißen Zwerg können mittels eines Fermi-Gases beschrieben werden, dessen Fermi-Energie durch

$$\varepsilon_F = \left( 3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_e}{\mathcal{V}} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \quad (1)$$

gegeben ist. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass alle Kerne im Weißen Zwerg das gleiche Verhältnis  $Z/A$  aufweisen.

- i.** Ermitteln Sie die Masse  $M$  des Weißen Zwergs und die Zahl seiner Elektronen in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Nukleonen  $\mathcal{N}_N$ .
- ii.** Analog zu den Fragen **ii.** & **iii.** in Aufgabe **18**, wie lautet der Gleichgewichtsradius  $R_{\text{eq}}$  eines Weißen Zwergs?
- iii.** Die Masse der Sonne ist  $1 M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg. Für einen typischen Weißen Zwerg ist außerdem  $Z = \frac{1}{2}A$ . In etwa 5-6 Milliarden Jahre wird sich unsere Sonne von einem Roten Riesen in einen Weißen Zwerg verwandeln: wie groß ( $R_{\text{eq}}$ ) wird sie dann sein und welche (Massen)Dichte wird sie haben?
- iv.** Die Temperatur im Zentrum eines typischen Weißen Zwergs ist etwa  $10^7$  K. Der Ausdruck (1) der Fermi-Energie beruht auf der Annahme eines Fermi-Gases nicht-relativistischer Elektronen bei Null-Temperatur. Ist diese Annahme begründet?