Übung Nr. 12

Diskussionsthema: Fassen Sie für jede der drei häufigsten Zerfallsarten (α-, β- und γ-Emission) zusammen, welche Erhaltungssätze jeweils gelten und welche deren Folgen sind.

Aufgabe 40. β-Zerfall

i. Der Kern $^{62}_{30}$Zn kann sowohl durch e^+-Emission als auch durch Elektroneneinfang zerfallen. Die maximale kinetische Energie des Positrons sei 0,66 MeV. Wie groß ist die maximale Energie des Neutrinos im β^+-Zerfall? Wie groß ist die maximale Energie des Neutrinos im Elektroneneinfang? (Rückstoß- und Elektronen-Bindungsenergie dürfen vernachlässigt werden.)

ii. Entnehmen Sie einer Nuklidkarte[1] die Q-Werte der folgenden β^--Zerfälle: (a) ^{11}Be $\rightarrow$ ^{11}B, (b) ^{65}Ni $\rightarrow$ ^{65}Cu, und der β^+-Zerfälle: (c) ^{10}C $\rightarrow$ ^{10}B, (d) ^{89}Zr $\rightarrow$ ^{89}Y.

Aufgabe 41. „Exotische" Zerfallsarten

i. Suchen Sie auf einer Nuklidkarte den schwersten Kern, der hauptsächlich über Neutronenemission zerfallen kann, und den schwersten Kern, der hauptsächlich über Protonenemission zerfallen kann. Wie lauten die entsprechenden Prozesse? Was können Sie ohne Berechnung über die kinetische Energie des emittierten Neutrons bzw. Protons sagen?

ii. Entnehmen Sie einer Nuklidkarte die Bindungsenergien (pro Nukleon) von ^{54}Zn, ^{53}Cu und ^{52}Ni. Berechnen Sie die Separationsenergien eines Protons S_p (vgl. Aufgabe **14.**) für ^{54}Zn und ^{53}Cu, sowie die Separationsenergie $S_{2p}(^{54}\mathrm{Zn})$ für die Abspaltung zweier Protonen (wie definieren Sie S_{2p} überhaupt?). Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse: Stabilität / Zerfallsart von ^{54}Zn und ^{53}Cu. Finden Sie eine plausible Erklärung für den Unterschied zwischen $S_p(^{54}\mathrm{Zn})$ und $S_p(^{53}\mathrm{Cu})$.

Aufgabe 42. Spontane Spaltung

Im Folgenden wollen wir eine Abschätzung für das Stabilitätskriterium Z^2/A herleiten. Es soll angenommen werden, dass der Zeitpunkt der Spaltung dadurch charakterisiert sei, dass die Tochterkerne durch zwei homogene Kugeln mit den Radien R_1, R_2 beschrieben werden können, die einander berühren, so dass der Abstand ihrer Mittelpunkte $R_1 + R_2$ sei.

i. Das Gesamtvolumen der Tochterkerne entspreche dem Volumen des Mutterkerns, dessen Radius R_0 sei. Außerdem sei $f = R_1^3/R_2^3$ das Massenverhältnis der Tochterkerne. Es wird homogene Massen- und Ladungsdichte vorausgesetzt. Drücken Sie die Radien der Tochterkerne durch f und R_0 aus. Die Oberflächenenergie zum Zeitpunkt der Spaltung ist

$$U_O^{\mathrm{Spalt}} = a_O(A_1^{2/3} + A_2^{2/3}) = a_O A^{2/3}\alpha$$

wobei A_1, A_2 die Massenzahlen der Tochterkerne sind. Berechnen sie den Koeffizienten α als Funktion von f.

ii. Wir wollen uns nun dem Coulomb-Term zuwenden. Überlegen Sie sich, wie groß die elektrostatische Energie zum Zeitpunkt der Spaltung ist. (Zur Erinnerung: die Selbstenergie einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius r ist $W = 3Z^2e^2/20\pi\varepsilon_0 r$. Berücksichtigen Sie auch die Coulomb-Abstoßung der Tochterkerne.) Ihr Ergebnis sollte von der Form

$$U_C^{\mathrm{Spalt}} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\varepsilon_0 R_0}(\beta + \gamma)$$

sein: bestimmen sie die Koeffizienten β und γ als Funktion von f. Benutzen Sie $R_0 = 1,128A^{1/3}$ fm um die elektrostatische Energie nur in Z, A und f auszudrücken.

[1] Z.B. `https://www.nndc.bnl.gov/chart/`

iii. Spontane Spaltung wird auftreten, wenn die Energiebilanz dies zulässt, wenn also gilt:

$$U_O^{\mathrm{orig}} + U_C^{\mathrm{orig}} > U_O^{\mathrm{Spalt}} + U_C^{\mathrm{Spalt}},$$

wobei die Terme auf der linken Seite Oberflächen- und Coulomb-Term des Mutterkerns bezeichnen. Welche Bedingung erhalten Sie hieraus für Z^2/A, in Abhängigkeit von a_O, α, β und γ?

iv. Nun wollen wir den Koeffizienten a_O aus der Spaltenergie (dem Q-Wert) abschätzen: haben sich die Tochterkerne durch die Coulomb-Abstoßung unendlich weit entfernt, so muss gelten:

$$(U_O^{\mathrm{orig}} + U_C^{\mathrm{orig}}) - (U_O^{\infty} + U_C^{\infty}) = Q$$

wobei U_O^{∞}, U_C^{∞} die Oberflächen- und Coulombterme der Tochterkerne im unendlichen bezeichnen. Leiten Sie hieraus einen Ausdruck für a_O in Abhängigkeit von Q, A, Z, α und β her.

v. Berechnen Sie a_O und Z^2/A für die folgenden Reaktionen (tatsächlich sind dies induzierte Kernspaltungen, darüber wollen wir hier aber hinwegsehen):

Reaktion	Q (MeV)	f
$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\mathrm{n}$	173,2	1,53
$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{116}_{46}\mathrm{Pd} + {}^{116}_{46}\mathrm{Pd} + 4\mathrm{n}$	177,2	1,00
$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{26}_{10}\mathrm{Ne} + 2\mathrm{n}$	54,2	8,00

vi. Um nun eine reaktionsunabhängige untere Grenze für die spontane Spaltung zu erhalten, überlegen Sie sich, für welchen Wert f die untere Grenze Z^2/A wohl minimal wird. (Sie können hierzu entweder ihr Ergebnis aus **iii.** plotten oder ein Symmetrieargument verwenden.) Was ist dann die untere Grenze, in Abhängigkeit von a_O?