Übung Nr. 11

Diskussionsthema: Informieren Sie sich über den Mössbauer-Effekt und dessen Anwendungen.

Aufgabe 35. Kinematik

Ein isolierter ruhender Atomkern emittiert ein Photon (γ) der Energie $\hbar\omega$. Ein anderer ruhender Kern soll dieses γ-Quant wieder absorbieren. Welche Energiedifferenz muss zwischen dem Niveau der Emission und jenem der Absorption vorhanden sein?

Aufgabe 36. γ-Zerfall

Der Kern ^{43}Ca sei im Zustand mit $J^{\mathsf{P}}_{\text{Kern}} = \frac{3}{2}^-$ angeregt und gehe durch γ-Zerfall in den Grundzustand mit $J^{\mathsf{P}}_{\text{Kern}} = \frac{7}{2}^-$ über, wobei die Anregungsenergie $E^* = 593$ keV beträgt.

i. Welche Multipolaritäten kann die γ-Strahlung haben?

Zur Erinnerung: definitionsgemäß hat „elektrische“ 2^{ℓ_γ}-Multipolarität die Parität $\mathsf{P}_\gamma = (-1)^{j_\gamma}$, „magnetische“ 2^{ℓ_γ}-Multipolarität die Parität $\mathsf{P}_\gamma = -(-1)^{j_\gamma}$, wobei $\vec{J}_\gamma = \vec{L}_\gamma + \vec{S}_\gamma$ der Gesamtdrehimpuls des Photons ist, während für die Parität des Photons $\mathsf{P}_\gamma = -(-1)^{\ell_\gamma}$ gilt.

ii. Welche Wellenlänge hat die emittierte γ-Strahlung?

Aufgabe 37. Langlebiger Isomerzustand

Der Kern $^{108}_{47}$Ag (Spin und Parität $J^{\mathsf{P}}_{\text{Kern}} = 1^+$) ist β-instabil mit einer Halbwertszeit 2,38 min. Er besitzt einen Isomerzustand (Anregungsenergie $E^* = 109$ keV) mit Spin und Parität 6^+ und einer Halbwertszeit 438 Jahre. Erklären Sie, wieso ein angeregter Zustand eines Kerns mehr stabil als der Grundzustand sein kann.

Aufgabe 38. Dipolstrahlung ($\ell_\gamma = 1$)

In dieser Übung wollen wir einige Elemente der Theorie des γ-Zerfalls ohne Herleitung einführen und untersuchen. Sei $E_\gamma = \hbar\omega$ die Energie des emittierten γ-Quants, und Ψ_{i} bzw. Ψ_{f} die Wellenfunktion des Kerns im Anfangs- bzw. Endzustand, d.h. vor bzw. nach dem Zerfall.

i. Elektrische Dipolstrahlung

Die Zerfallsrate für die Emission elektrischer Dipolstrahlung lautet

$$\frac{1}{\tau_{E1}} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left|\mathscr{M}_{E1}\right|^2, \tag{1}$$

mit einem Matrixelement $\mathscr{M}_{E1}$, das von den Wellenfunktionen Ψ_{i}, Ψ_{f} und von den Positionen $\vec{r}_p$ der Protonen im Kern abhängt:[1]

$$\mathscr{M}_{E1} = \int \Psi_{\text{f}}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\})^* \left(\sum_p \vec{r}_p\right) \Psi_{\text{i}}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\}) \prod_{p=1}^{Z} \mathrm{d}^3\vec{r}_p \prod_{n=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{r}_n. \tag{2}$$

a) Warum müssen die Wellenfunktionen Ψ_{i}, Ψ_{f} entgegengesetzte Paritäten haben?

b) Das Matrixelement $\mathscr{M}_{E1}$ hat die Dimension einer Länge (warum?), d.h. es kann in fm ausgedrückt werden. Berechnen Sie die Zerfallsrate (in s^{-1}) für ein γ-Quant der Energie $E_\gamma = 1$ MeV unter der Annahme $|\mathscr{M}_{E1}| = 1$ fm.

[1] Streng genommen ist $\mathscr{M}_{E1}$ — wie die Summe der Ortsvektoren $\vec{r}_p$ — vektoriell! Eigentlich kommt in der Berechnung das Skalarprodukt $\mathscr{M}_{E1} \cdot \vec{\mathscr{E}}_0$ aus diesem Vektor mit einem elektrischen Feld, dessen Betrag proportional zu $(\hbar\omega)^{1/2}$ ist, vor.

ii. Magnetische Dipolstrahlung

Bei der Emission magnetischer Dipolstrahlung lautet die Zerfallsrate

$$\frac{1}{\tau_{M1}} = \frac{4}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^3}{\hbar c^5}\left|\mathscr{M}_{M1}\right|^2, \tag{3}$$

wobei das neue Matrixelement $\mathscr{M}_{M1}$ jetzt vom magnetischen Dipolmoment $\vec{\mu}$ des Kerns abhängt:

$$\mathscr{M}_{M1} = \int \Psi_{\rm f}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\})^* \,\vec{\mu}\; \Psi_{\rm i}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\}) \prod_{p=1}^{Z} {\rm d}^3\vec{r}_p \prod_{n=1}^{N} {\rm d}^3\vec{r}_n. \tag{4}$$

a) Unter der Punktspiegelung $\vec{r} \to -\vec{r}$ transformiert ein magnetisches Dipolmoment wie ein Drehimpuls („Axialvektor“, „Pseudovektor“). Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}_{M1} \neq 0$ nur dann, wenn $\Psi_{\rm i}$ und $\Psi_{\rm f}$ die gleiche Parität haben.

b) $\mathscr{M}_{M1}$ hat die Dimension eines magnetischen Dipolmoments. Nehmen Sie für $|\mathscr{M}_{M1}|$ einen typischen Wert (für einen Kern!) und für $|\mathscr{M}_{E1}|$ einen Wert der Ordnung des Kernradius $\simeq A^{1/3}$ fm an, und berechnen Sie das Verhältnis τ_{M1}/τ_{E1}.

Aufgabe 39. Bindungsenergie eines deformierten Kerns

In dieser Übung wollen wir die Bindungsenergie eines prolaten (= zigarrenförmigen) Atomkerns anhand der Bethe–Weizsäcker-Formel berechnen und damit die Stabilität von Kernen gegen Deformationen abschätzen.

Der Kern sei durch einen prolaten Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = R(1+\varepsilon)$ und $b = R/\sqrt{1+\varepsilon}$ modelliert: sein Volumen ist gegeben durch

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi ab^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

und $\varepsilon \ll 1$ bestimmt die Größe der Deformation. Wie gewöhnlich ist der „Radius“ $R \propto A^{1/3}$.

i. Oberflächenenergie

Berechnen Sie die Oberfläche

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} + \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

des Ellipsoids in Abhängigkeit von R und ε bis einschließlich zur Ordnung ε^2.

Was ist dann die Differenz zwischen der Oberflächenenergie $B_O(\varepsilon)$ des deformierten Kerns und der Oberflächenenergie $B_O(0)$ des sphärischen Kerns mit demselben Volumen? Was bedeutet physikalisch das Vorzeichen dieser Differenz?

ii. Coulomb-Energie

Man kann zeigen, dass die Coulomb-Energie des deformierten Kerns lautet

$$B_C(\varepsilon) = -a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}}\left[1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right].$$

Was ist die Differenz zwischen dieser Coulomb-Energie und jener des kugelförmigen Kerns mit demselben Volumen?

iii. Gesamte Bindungsenergie

Berechnen Sie die gesamte Bindungsenergie $B(\varepsilon)$ des deformierten Atomkerns, sowie die Differenz $\Delta B(\varepsilon) \equiv B(\varepsilon) - B(0)$. Diskutieren Sie, in Abhängigkeit von $\Delta B(\varepsilon)$, wann der Kern stabil gegenüber (kleinen) Deformationen ist. Für welche Werte von Z^2/A wird der Kern instabil? Was kann dann mit dem Kern passieren?