

Übung Nr. 10

Diskussionsthemen:

- Fassen Sie die jeweiligen Stärken und Mängel der drei in der Vorlesung eingeführten Kernmodelle zusammen.
- Auf welchem Phänomen beruht die Emission eines α -Teilchens durch einen Kern? Wie wird die entsprechende Zerfallskonstante bzw. Halbwertszeit berechnet und welche experimentelle Beobachtung bestätigt die (grobe) Gültigkeit der Berechnung?

Aufgabe 31. Stabilität gegenüber α -Zerfall im Tröpfchenmodell

Berechnen Sie den Q -Wert für α -Zerfall

$$Q_\alpha \equiv [m(Z, A) - m(Z-2, A-4) - m_\alpha] c^2$$

mithilfe der Bethe-Weizsäcker-Massenformel für die Massen von Mutter- und Tochterkern¹ und $m_\alpha \simeq 3,73 \text{ GeV}/c^2$. Ermitteln Sie (numerisch!) den minimalen Wert von A (und Z) mit $Q_\alpha \geq 0$ für Kerne im β -Stabilitätstal.

Zur Erinnerung gilt $Z_{\min}(A) \simeq A/(1,97 + 0,015A^{2/3})$.

Aufgabe 32. α -Zerfall

Ein gg-Kern zerfällt durch α -Emission. Welche J_{Kern}^P Zustände kann der Tochterkern annehmen?

Aufgabe 33. α -Zerfall für breite Zerfallsbarrieren

- i. In der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck für die Zerfallskonstante

$$\lambda_\alpha = J_0 e^{-G}, \quad G = \frac{\pi}{\hbar c} \frac{2Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_\alpha c^2}{Q_\alpha}} \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right), \quad \mathcal{G}(x) = \frac{2}{\pi} \left[\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} \right]$$

hergeleitet, wobei R bzw. r_c der Kernrand bzw. der Austrittsabstand ist und Z_T die Kernladungszahl des Tochterkerns. Außerdem ist $J_0 = v_{\text{in}}/(2R)$ die Frequenz, mit der das α -Teilchen gegen die Potentialbarriere stößt. Zeigen Sie durch Entwicklung in $\sqrt{x}$ bis zur ersten Ordnung, dass für Kerne mit $R/r_c \ll 1$ (d.h. mit einer „breiten Zerfallsbarriere“) die Zerfallskonstante durch

$$\lambda_\alpha = \frac{v_{\text{in}}}{2R} \exp \left(-\frac{Z_T e^2}{\epsilon_0 \hbar v_\alpha} + \frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{Z_T m_\alpha R}{\pi \epsilon_0}} \right)$$

gegeben ist, wobei v_α die Geschwindigkeit des emittierten α -Teilchens ist.

- ii. Wir wollen im Folgenden eine Modifikation der Tunnelbarriere durch Zentrifugalkräfte betrachten: Die Schrödinger-Gleichung für den Radialteil dieses Problems lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r) u(r) = E, \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{2Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{r^2},$$

wobei $\psi(\vec{r}) = u(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \varphi)/r$ die Wellenfunktion des α -Teilchens ist und ℓ seine Bahndrehimpulsquantenzahl. Berechnen Sie, um welchen Bruchteil die Höhe B der Potentialbarriere bei $r = R$ in Abhängigkeit von $\ell > 0$ zunimmt. Berechnen Sie auch das Verhältnis der Zerfallskonstanten $\lambda_\alpha(\ell)/\lambda_\alpha(0)$ für $\ell = 1, 2, 3$.

¹Werte für die Koeffizienten können z.B. in Aufgabe 15 gefunden werden.

Aufgabe 34. WKB-Verfahren

Die in der Vorlesung hergeleiteten WKB-Lösungen für die Wellenfunktionen $u_{\text{II}}(r)$ (innerhalb der Tunnelbarriere) und $u_{\text{III}}(r)$ (außerhalb des Kerns),

$$u_{\text{II}}(r) = \frac{C}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp \left[\int_r^{r_c} \kappa(r') \, dr' \right] + \frac{D}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp \left[- \int_r^{r_c} \kappa(r') \, dr' \right], \quad \kappa(r) \equiv \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [V_\alpha(r) - Q_\alpha]}$$

$$u_{\text{III}}(r) = \frac{F}{\sqrt{k(r)}} \exp \left[i \int_{r_c}^r k(r') \, dr' \right] + \frac{G}{\sqrt{k(r)}} \exp \left[-i \int_{r_c}^r k(r') \, dr' \right], \quad k(r) \equiv \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [Q_\alpha - V_\alpha(r)]}$$

sind nur eine Näherung: sie erfüllen *nicht* die reduzierten zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichungen

$$\frac{d^2 u_{\text{II}}(r)}{dr^2} - \kappa(r)^2 u_{\text{II}}(r) = 0, \quad \frac{d^2 u_{\text{III}}(r)}{dr^2} + k(r)^2 u_{\text{III}}(r) = 0. \quad (1)$$

i. Zeigen Sie, dass u_{II} stattdessen die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{d^2 u_{\text{II}}(r)}{dr^2} + \left[-\kappa(r)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa(r)} \frac{d^2 \kappa(r)}{dr^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\kappa(r)^2} \left(\frac{d\kappa(r)}{dr} \right)^2 \right] u_{\text{II}}(r) = 0, \quad (2)$$

und u_{III} eine hierzu analoge Differentialgleichung.

ii. Was besagt ein Vergleich der Differentialgleichung (2) mit der Schrödingergleichung (1) über den Gültigkeitsbereich der WKB-Näherung? Ist sie an den klassischen Umkehrpunkten $r = R$ und $r = r_c$ anwendbar?