Übung Nr. 6

Diskussionsthemen:

- Welche experimentelle Beobachtungen führen zur Idee eines Schalenmodells des Atomkerns?
- Wie werden die Energieniveaus eines Nukleons in einem Kastenpotential hergeleitet?
- (Besprechung in der Woche vom 24.-28. November) Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

Aufgabe 17. Elektrisches Quadrupolmoment

- i. Zeigen Sie, dass eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung kein elektrisches Quadrupolmoment hat.
- ii. Wir wollen im Folgenden das elektrische Quadrupolmoment eines deformierten Kerns ausrechnen. Hierbei sei die Oberfläche eines prolaten Ellipsoids beschrieben durch die Funktion

$$r(\theta, \varphi) = R [1 + a_{20} Y_{20}(\theta, \varphi)],$$

wobei R der mittlere Radius und a_{20} der Deformationsparameter sind und

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

(Symmetrieachse ist die z -Achse). Berechnen Sie das Quadrupolmoment $Q_{zz} = \int \rho(\vec{r}) (3z^2 - r^2) d^3\vec{r}$ des deformierten Kerns unter der Annahme, dass die Ladung homogen über das Volumen des Ellipsoids verteilt ist. Sie sollten hierbei eine Entwicklung in a_{20} bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(a_{20}^2)$ vornehmen.

Aufgabe 18. Kernspinresonanz

Das magnetische Dipolmoment $\hat{\vec{\mu}}$ und der Spin-Operator $\hat{S}$ eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\vec{\mu}} = \gamma \hat{S} = \mu_0 \hat{\vec{\sigma}},$$

wobei γ das sog. gyromagnetische Verhältnis und $\mu_0 \equiv \gamma \hbar / 2$ ist. Wir wollen hier das durch Isidor Rabi eingeführte Prinzip der Messung von γ beschreiben.

Die übliche Darstellung der Pauli-Matrizen ist

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Eigenzustände $|+\rangle, |-\rangle$ (in der Diracschen Bezeichnungsweise) der Operatoren $\hat{S}^2$ und $\hat{S}_z$ bilden gemeinsam eine Basis der Spinzustände; diese Eigenzustände genügen den Gleichungen

$$\hat{S}_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad \hat{S}_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle, \quad \hat{S}^2 |\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\pm\rangle$$

sowie $\hat{S}_x |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |-\rangle, \quad \hat{S}_x |-\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad \hat{S}_y |+\rangle = i\frac{\hbar}{2} |-\rangle, \quad \hat{S}_y |-\rangle = -i\frac{\hbar}{2} |+\rangle$

i. Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Wir betrachten zuerst die Präzession eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_0$ entlang der z -Achse. Der entsprechende Hamilton-Operator ist¹

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = -\mu_0 \mathcal{B}_0 \hat{\sigma}_z. \quad (2)$$

¹Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Anteil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.

Sei $|\psi(t)\rangle$ ein beliebiger Zustand, der bei $t = 0$ die Bedingung $|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ erfüllt, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Die spätere zeitliche Entwicklung des Zustands wird durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator (2) gegeben, so dass

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t/2}|+\rangle + \beta e^{i\omega_0 t/2}|-\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\frac{2\mu_0 \mathcal{B}_0}{\hbar}. \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \hat{\mu} \rangle$ des magnetischen Dipolmoments im Zustand $|\psi(t)\rangle$ lautet

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = 2\mu_0 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta e^{i\omega_0 t}), \quad \langle \hat{\mu}_y \rangle = 2\mu_0 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta e^{i\omega_0 t}), \quad \langle \hat{\mu}_z \rangle = \mu_0 (|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

Schreiben Sie die x - bzw. y -Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu_0 \alpha^* \beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projizierung von $\langle \hat{\mu} \rangle$ auf die (x, y) -Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle \hat{\mu} \rangle$?

ii. Überlagerung von einem festen und einem variablen Magnetfeld

Neben dem festen Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_0$ entlang der z -Achse wird ein zweites schwächeres Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_1$ eingeführt, das in der (x, y) -Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit lautet nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\hat{\mu} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_0 + \vec{\mathcal{B}}_1(t)) = -\mu_0 \mathcal{B}_0 \hat{\sigma}_z - \mu_0 \mathcal{B}_1 \cos(\omega t) \hat{\sigma}_x - \mu_0 \mathcal{B}_1 \sin(\omega t) \hat{\sigma}_y. \quad (4)$$

Die entsprechende Schrödinger-Gleichung führt für die zeitliche Entwicklung des auf 1 normierten Zustands $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ zu den differentiellen Gleichungen

$$\begin{aligned} i \frac{da_+}{dt} &= \frac{\omega_0}{2} a_+(t) + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_-(t) \\ i \frac{da_-}{dt} &= \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+(t) - \frac{\omega_0}{2} a_-(t), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei $\omega_1 \equiv -2\mu_0 \mathcal{B}_1 / \hbar$.

a) Zeigen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $a_{\pm}(t)$ durch $b_{\pm}(t) \equiv \exp(\pm i\omega t/2) a_{\pm}(t)$ zu den einfacheren folgenden Gleichungen führt:

$$\begin{aligned} i \frac{db_+}{dt} &= -\frac{\omega - \omega_0}{2} b_+(t) + \frac{\omega_1}{2} b_-(t) \\ i \frac{db_-}{dt} &= \frac{\omega_1}{2} b_+(t) + \frac{\omega - \omega_0}{2} b_-(t). \end{aligned}$$

Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{d^2 b_{\pm}}{dt^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_{\pm}(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2. \quad (6)$$

b) Der Spin sei zu $t = 0$ im $|+\rangle$ Zustand, was $b_-(0) = a_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (6)? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ um t zu finden, lautet

$$\mathcal{P}_{+\rightarrow-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω : Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des $|+\rangle \rightarrow |-\rangle$ -Übergangs eine präzise Bestimmung der *Larmorfrequenz* ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld $\mathcal{B}_0$) des gyromagnetischen Faktors γ ?

Mithilfe dieses Verfahrens verbesserte Isidor Rabi die Genauigkeit der Messungen von γ -Werten um einen Faktor $\approx 10^3$! Dann kamen Felix Bloch & Edward Purcell...

iii. Wenn Sie Zeit haben... können Sie noch die zeitlichen Entwicklungen (3) und (5) herleiten! Was ist die physikalische Deutung der Substitution der Funktionen $a_{\pm}$ durch die Funktionen $b_{\pm}$?