Übung Nr. 5

Diskussionsthema: QM; Spin

Aufgabe 13. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der dreidimensionale (3D) harmonische Oszillator wird durch das Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ beschrieben.

i. Betrachten Sie den der kinetischen Energie entsprechenden Operator für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten.

a) Machen Sie einen Separationsansatz für die Wellenfunktion und zeigen Sie, dass man so die Gleichungen für drei eindimensionale harmonische Oszillatoren erhält. Folgern Sie daraus, dass die Energieniveaus des 3D-Oszillators sich durch drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 ausdrücken lassen.

b) Sei $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$. Wie lautet der Entartungsgrad des Niveaus mit Energie $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$?

ii. Löst man das Problem des 3D-Oszillators in Kugelkoordinaten (was wir hier nicht tun wollen), so findet man für die Energieniveaus:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega \left[2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right],$$

wobei $n = 1, 2, \dots, \ell = 0, 1, \dots$

a) Welchen Entartungsgrad weisen die Energieniveaus auf? Berechnen Sie diesen explizit für die ersten 6 Energieniveaus.

b) Welche Parität haben die Energieniveaus jeweils?

iii. Geben Sie die Energieniveaus für das Problem eines Teilchens der Masse m im Potentialtopf

$$V(\vec{r}) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right]$$

an, wobei $r = |\vec{r}|$

Aufgabe 14. Spin-System

Der Hamilton-Operator eines Systems aus zwei Spin-1-Teilchen mit Spins $\vec{S}$ und $\vec{S}'$ sei

$$\hat{H} = A + B \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{S}}' + C(\hat{S}_3 + \hat{S}'_3),$$

mit A, B, C Konstanten. Finden Sie die Energie-Eigenwerte des Systems. Gibt es Entartung?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Menge von Operatoren, die mit $\hat{H}$ vertauschen.

Aufgabe 15. Bahndrehimpuls

Die Komponenten des Bahndrehimpuls-Operators sind $\hat{L}_j = (\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}})_j = \epsilon_{jkl} \hat{r}_k \hat{p}_l$ mit ϵ_{jkl} dem völlig antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor. Dabei wird die Einstein-Konvention verwendet, entsprechend einer implizierten Summation über $k, l = 1, 2, 3$.

i. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k]$ und $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ können Sie nun die folgenden Vertauschungsrelationen verifizieren:

a) $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl} \hat{L}_l$ [Einstein-Konvention für l];

b) $[\hat{L}^2, \hat{L}_j] = [\hat{r}^2, \hat{L}_j] = [\hat{p}^2, \hat{L}_j] = 0$ für $j = 1, 2, 3$.

ii. Betrachten Sie den Bahndrehimpuls-Operator in der Ortsdarstellung, und zwar in Kugelkoordinaten $\vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ Leiten Sie seine kartesischen Komponenten her:

$$L_1 = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad L_2 = \frac{\hbar}{i} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad L_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Leiten Sie hieraus $\vec{L}^2$ ab.

Aufgabe 16. Teilchen in einem endlichen Kastenpotential

i. **Präambel** Bekannterweise kann ein Zwei-Körper-Problem mit zentraler Kraft nach Einführung der Relativkoordinate und der reduzierten Masse als Ein-Körper-Problem beschrieben werden. Wie lautet aber die reduzierte Masse m_{red} in Abhängigkeit von den Massen m_1, m_2 der zwei Körper? Was ergibt sich für m_{red} wenn $m_1 = m_2 \equiv m_N$?

ii. Ein Teilchen mit Masse $m_N/2$ sei in einem kugelsymmetrischen Kastenpotential definiert durch $V(\vec{r}) = -V_0$ für $|\vec{r}| < R_0$ und $V(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| > R_0$, wobei $V_0 > 0$. Mit einer passenden Wahl der Parameter V_0 und R_0 kann es nur einen einzigen gebundenen Zustand geben. Sei $E \equiv -E_B$ mit $E_B > 0$ die Energie dieses Zustands.

a) Bei verschwindendem Bahndrehimpuls vereinfacht sich das Problem zu einem eindimensionalen radialen Problem. Sei $R(r)$ der radiale Anteil der Wellenfunktion mit $r = |\vec{r}|$. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung für $u(r) \equiv rR(r)$ zu den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + k^2 u(r) = 0 \quad \text{für } r < R_0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u(r)}{dr^2} - K^2 u(r) = 0 \quad \text{für } r > R_0 \quad (1)$$

führt, wobei k und K von $m_n, \hbar, V_0$ und E_B abhängen.

b) Für die Lösung dieser Gleichungen macht man den Ansatz $u(r) = A \sin(kr)$ für $r < R_0$ [zusätzliche Frage: warum nicht mit $\cos$?] und $u(r) = B e^{-K(r-R_0)}$ für $r > R_0$. Prüfen Sie, dass die Stetigkeit in $r = R_0$ dieser Lösung und ihrer Ableitung zu den Bedingungen $A \sin(kR_0) = B$ und $k \cot(kR_0) = -K$ führt, die wiederum die Bedingung

$$k^2 A^2 = (k^2 + K^2) B^2 \quad (2)$$

geben.

c) Die Lösung der Schrödinger-Gleichung soll auf 1 normiert werden. Zeigen Sie, dass daraus die Bedingung folgt [einige wichtigen „Details“ sollten Sie dabei nicht vergessen!]

$$\frac{A^2}{2k} [2kR_0 - \sin(2kR_0)] + \frac{B^2}{K} = \frac{1}{2\pi}. \quad (3)$$

d) Löst man die Gleichungen (2)–(3) nach A und B unter Berücksichtigung von $K \ll k$, so findet man

$$A \simeq B \simeq \sqrt{\frac{K}{2\pi}} e^{-KR_0/2}$$

und daher $u(r) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} e^{-KR_0/2} \sin(kr)$ für $r < R_0$ und $u(r) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} e^{K(R_0/2-r)}$ für $r > R_0$.

Sei $m_N = 939 \text{ MeV}/c^2$, $V_0 = 38,5 \text{ MeV}$, $E_B = 2,225 \text{ MeV}$. Zeigen Sie, dass diese numerischen Werte zu $k = 0,938 \text{ fm}^{-1}$ und $K = 0,232 \text{ fm}^{-1}$ führen. Sei dazu $R_0 = 1,93 \text{ fm}$. Plotten Sie $u(r)$ und berechnen Sie (mithilfe von Mathematica?) den mit der Wellenfunktion quadratisch gemittelten Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$.

e) Schauen Sie sich die oben angegebenen Werte von m_N und E_B an. Welchen Atomkern haben Sie gerade modelliert?