Übung Nr. 4

Diskussionsthema: Fermi-Gas-Modell des Atomkerns

Aufgabe 10. Bethe–Weizsäcker Massenformel

Die Bindungsenergie eines Atomkerns ist näherungsweise gegeben durch

$$B(Z,A) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A} + B_\delta, \tag{1}$$

mit Paarungsterm $B_\delta = \begin{cases} +a_\delta A^{-1/2} & \text{für gg-Kerne;} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -a_\delta A^{-1/2} & \text{für uu-Kerne.} \end{cases}$

Hier wollen wir zeigen, wie einige Koeffizienten sich aus experimentellen Daten gewinnen lassen

i. Coulomb-Term

Als *Spiegelkerne* bezeichnet man ein Paar Atomkerne mit vertauschter Protonen- und Neutronenzahl d.h. (Z, N) und $(Z' = N, N' = Z)$.
Hiernach wird nur den Fall $N = Z - 1$ betrachtet.

a) Berechnen Sie die Differenz der Bindungsenergien der Kerne eines solches Paar (Tipp: Z sollte keine Rolle spielen!). Warum ist die Annahme $N = Z - 1$ hilfreich?

b) Entnehmen Sie einer Datenbank (z.B. `http://www.nndc.bnl.gov/chart/` — oben links findet man einen „Knopf“ “BE/A” — oder `https://www-nds.iaea.org/amdc/` unter Teil 2 von AME2012) die Bindungsenergien der Atomkerne eines solchen Paars, beispielsweise (^{13}N, ^{13}C) oder (^{15}O, ^{15}N), und berechnen Sie damit den Wert des Parameters a_C.

ii. Asymmetrieterm

Finden Sie die Bindungsenergien der Kerne in der Isobarenreihe mit $A = 135$ und zeichnen Sie sie in Abhängigkeit von Z auf. Folgern sie daraus den Wert des Parameters a_A in Gl. (1).

iii. Paarungsterm

Führen Sie die gleiche Berechnung für Kerne mit $A = 136$ durch und schätzen Sie damit den Wert von B_δ ab.

Aufgabe 11. Typische Skalen der Kernphysik

Der Radius eines Kerns sei durch $R = 1{,}3A^{1/3}$ fm gegeben.

i. Zeitskala

Berechnen Sie die Zeit, die ein Nukleon mit kinetischer Energie gleich der Fermi-Energie $\varepsilon_\mathrm{F} \approx$ 40 MeV benötigt, um einen ^{208}Pb-Kern zu durchqueren.

ii. Energie- und Impulsskala

Schätzen Sie unter Verwendung der Heisenbergschen Unschärferelation den typischen Impuls eines Nukleons in einem ^{208}Pb-Kern. Was ist die zugehörige typische Energie? Vergleichen Sie mit den im Fermi-Modell erwähnten Werten.

Aufgabe 12. Neutronenstern als Fermi-Gas

Nach dem Verbrauch ihres nuklearen „Brennstoffs“ kollabieren Sterne mit einer Masse von etwa 10 $M_\odot$ zu Neutronensternen. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass diese ausschließlich aus entarteten Neutronen bestehen.

i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines Kerns ($n_\infty = 0,17$ Nukleonen/fm^3) und die typische Temperatur ist $T \approx 10^8$ K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen (d.h. kinetische Energie $\ll$ Massenenergie) Neutronen bei Null-Temperatur beschrieben werden kann.
Es sei $\varepsilon_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{V}}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_n}$ die zugehörige Fermi-Energie, mit $\mathcal{N}_n$ der Zahl von Neutronen.

ii. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E(R)$ des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius R. Diese besteht aus zwei Beiträgen: der kinetischen Energie (benutzen Sie hier die in der Vorlesung angegebene durchschnittliche kinetische Energie pro Neutron) und der Gravitationsenergie. Leiten Sie die Gravitationsenergie E_G analog zur Betrachtung in der Vorlesung bezüglich der potentiellen elektrostatischen Energie einer homogen geladenen Kugel her.

iii. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius R_{eq}, für den die Energie $E(R)$ mimimal wird.

iv. Berechnen Sie den Wert dieses Radius sowie die entsprechende Teilchendichte für einen Neutronenstern mit der Masse $M = 1,4\ M_\odot$.