Übung Nr. 12

Diskussionsthema: Wie wird die Kettenreaktion in einem Spaltreaktor gesteuert?

Aufgabe 35. Kettenreaktion

Berechnen Sie die kritische Masse für ^{239}Pu, indem Sie den kritischen Radius R_c abschätzen. Eine exakte Rechnung ist aufgrund vieler einzubeziehender Faktoren zu kompliziert und nur numerisch möglich; hier soll es ausreichen, den Radius aus der mittleren freien Weglänge ℓ_{mfp} abzuschätzen: $R_c \simeq \ell_{\mathrm{mfp}}\sqrt{\langle N\rangle}$, wobei $\langle N\rangle = 1/q$ das Verhältnis aus der Zahl aller Streu- und Spaltereignisse und der Zahl der Spaltereignisse ist. Es sei $\sigma_{\mathrm{tot}}(^{239}\mathrm{Pu}) = 10$ Barn, $q = 0,2$ und die Massendichte sei $19,8\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

Aufgabe 36. Verzögerte Neutronen

In der Vorlesung wurde unter Vernachlässigung verzögerter Neutronen für die Neutronendichte $n_n(t)$ folgende Relation aufgestellt:

$$\frac{\mathrm{d}n_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\nu_p q - 1}{t_p}\, n_n(t), \tag{1}$$

wobei ν_p die Zahl prompter Neutronen und t_p die Zykluszeit ist — d.h. die mittlere Dauer, bis prompte Neutronen eine Spaltung induzieren —, während q die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass bei einem Stoß eine Kernspaltung erfolgt.

i. Unter der Annahme, dass bei genau einer Art von Spaltung verzögerte Neutronen produziert werden, leiten Sie folgende Beziehung her:

$$\frac{\mathrm{d}n_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\nu_p q - 1}{t_p}\, n_n(t) + \frac{\nu_v q}{t_p}\int_{-\infty}^{t} \frac{n_n(t')\,\mathrm{e}^{-(t-t')/\tau_\beta}}{\tau_\beta}\,\mathrm{d}t', \tag{2}$$

wobei τ_β die mittlere Lebensdauer der Spaltfragmente ist, die verzögerte Neutronen produzieren und ν_v die Zahl verzögerter Neutronen ist.

ii. Zeigen Sie, dass eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (2) $n_n(t) = n_n(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ ist und bestimmen Sie λ.

iii. Zeigen Sie, dass für $t_p = 10^{-4}$ s, $\nu_p q - 1 = 10^{-4}$ und in der Abwesenheit von verzögerten Neutronen die Neutronendichte exponentiell mit einer Zeitskala von 1 Sekunde wächst.

iv. Zeigen Sie, dass für $t_p = 10^{-4}$ s, $\tau_\beta = 10$ s, $\nu_p q - 1 = -0,0078$ $(\nu_p + \nu_v)q - 1 = 10^{-4}$ (entsprechend $\nu_p = 2,5$ und $\nu_v = 0,02$) die Neutronendichte exponentiell mit einer Zeitskala von ca. 13 Minuten wächst.

Aufgabe 37. Spaltproduktvergiftung

Bei der Kernspaltung entstehen im Brennstoff viele Spaltprodukte, die selbst radioaktiv sind und durch ihren Zerfall neue Neutronenabsorber erzeugen. Die Spaltprodukte bleiben im Reaktor, sie „vergiften" ihn. Für die „parasitäre" Neutronenabsorption ist neben der Häufigkeit vor allem der Absorptionsquerschnitt eines Spaltprodukts entscheidend.

Das zeitliche Verhalten der Konzentration N_i eines direkten Spaltprodukts i ergibt sich aus der vereinfachten Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_i N_{\mathrm{Sp}}\sigma_{\mathrm{Sp}}\Phi - \lambda_i N_i - \sigma_{i,\mathrm{n}} N_i \Phi, \tag{3}$$

mit γ_i das Verzweigungsverhältnis für die Erzeugung des Spaltprodukts i in einer Spaltung, N_{Sp} bzw. σ_{Sp} die Dichte bzw. der Spaltungsquerschnitt der Spaltkerne, Φ die Neutronenflussdichte, λ_i bzw. $\sigma_{i,\mathrm{n}}$ die Zerfallskonstante bzw. der Neutronenabsorptionswirkungsquerschnitt von i.[1]

i. Nehmen Sie an, dass Φ und $N_{\mathrm{Sp}}\sigma_{\mathrm{Sp}}$ zeitunabhängig sind und lösen Sie die Differentialgleichung (3) unter der Nebenbedingung, dass $N_i(t\!=\!0) = 0$. [Tipp: Variation der Konstanten]

ii. Bestimmen Sie die Sättigungszeit t_s, d.h., die Zeitkonstante, die als Inverse des Vorfaktors von t im Exponenten auftritt: sie bestimmt, wie schnell sich die Gleichgewichtskonzentration für die Zahl der Spaltprodukte einstellt. Berechnen Sie t_s für $\sigma_{i,\mathrm{n}} = 10$ b, $\Phi = 3 \cdot 10^{13}$ cm^{-2}s^{-1} und $\tau_i = 1/\lambda_i = 21,21$ a. Vergleichen Sie diese Sättigungszeit mit der typischen Laufzeit eines Reaktors.

iii. Bei sogenannten starken Absorbern sind die Sättigungszeiten dagegen sehr kurz. Ist das stark absorbierende Zerfallsprodukt stabil, so vereinfacht sich der Ausdruck für die Sättigungszeit zu $t_s = 1/\sigma\Phi$: wie folgt dies aus **ii.**?

Ein Beispiel für einen stabilen starken Absorber ist Samarium ^{149}Sm mit $\sigma_{^{149}\mathrm{Sm,n}} = 4,1 \cdot 10^4$ b. Φ sei wie in **ii.** angenommen; nach welcher Zeit ist die Konzentration des Spaltprodukts hier gesättigt?

[1] In der Tat sollten auch mindestens zwei weitere mögliche Produktionskanäle des Spaltprodukts i berücksichtigt werden:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_i N_{\mathrm{Sp}}\sigma_{\mathrm{Sp}}\Phi + \lambda_j N_j + \sigma_{k,\mathrm{n}} N_k \Phi - \lambda_i N_i - \sigma_{i,\mathrm{n}} N_i \Phi, \tag{4}$$

wobei der zweite bzw. der dritte Term der Erzeugung von i als Zerfallsprodukt vom Spaltprodukt j bzw. als Produkt der Absorption eines Neutrons durch den Spaltprodukt k entspricht.