Übung Nr. 11

Diskussionsthema: Welche wichtigen Unterschiede existieren zwischen den häufigsten Uran-Isotopen $^{235}_{92}$U und $^{238}_{92}$U bezüglich der durch ein Neutron induzierten Spaltung?

Aufgabe 33. Spontane Kernspaltung

In der Vorlesung wurde unter der Annahme, dass ein Mutterkern spontan in zwei gleich große Tochterkerne spaltet, aus einer Bilanz der Bindungsenergien eine Abschätzung für $Z^2/A > 18,14$ gewonnen, woraus sich für β-stabile Kerne die unbefriedigende Abschätzung $Z > 42$ ergibt (experimentell sollte die scharfe Ungleichung $Z \geq 90$ gelten).

Wir wollen in dieser Übung durch die Berücksichtigung der Kerndeformation eine bessere Abschätzung gewinnen. Der Kern sei durch einen (prolaten) Rotationellipsoid mit den Halbachsen $a = R(1+\varepsilon)$ und $b = R/\sqrt{1+\varepsilon}$ modelliert: sein Volumen ist gegeben durch

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi a b^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

und $\varepsilon \ll 1$ bestimmt die Größe der Deformation.

i. Oberflächenenergie

Berechnen Sie die Oberfläche

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \left(\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} + \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right)$$

des Ellipsoids in Abhängigkeit von R und ε bis einschließlich zur Ordnung ε^2.

Was ist dann die Differenz zwischen der Oberflächenenergie $B_{\mathcal{S}}(\varepsilon)$ des deformierten Kerns und der Oberflächenenergie $B_S(0)$ des sphärischen Kerns mit demselben Volumen? Was bedeutet das Vorzeichen dieser Differenz? (Wie gewöhnlich ist der Radius $R \propto A^{1/3}$.)

ii. Coulomb-Energie

Man kann zeigen, dass die Coulomb-Energie des ellipsoidalen deformierten Kerns lautet

$$B_C(\varepsilon) = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right].$$

Was ist die Differenz zwischen dieser Coulomb-Energie und jener des kugelförmigen Kerns mit demselben Volumen?

iii. Gesamte Bindungsenergie

Berechnen Sie die gesamte Bindungsenergie $B(\varepsilon)$ des deformierten Atomkerns, sowie die Differenz $\Delta B(\varepsilon) \equiv B(\varepsilon) - B(0)$. Diskutieren Sie, in Abhängigkeit von $\Delta B(\varepsilon)$, wann der Kern stabil gegenüber (kleinen) Deformationen ist. Für welche Werte von Z^2/A wird der Kern instabil? (Dann kann die Kerndeformation wachsen und der Kern schließlich spalten.)

Aufgabe 34. Spontane Spaltung

Im Folgenden wollen wir eine weitere Abschätzung für das Stabilitätskriterium Z^2/A herleiten. Es soll angenommen werden, dass der Zeitpunkt der Spaltung dadurch charakterisiert sei, dass die Tochterkerne durch zwei homogene Kugeln mit den Radien R_1, R_2 beschrieben werden können, die einander berühren, so dass der Abstand ihrer Mittelpunkte $R_1 + R_2$ sei.

i. Das Gesamtvolumen der Tochterkerne entspreche dem Volumen des Mutterkerns, dessen Radius R_0 sei. Außerdem sei $f = R_1^3/R_2^3$ das Massenverhältnis der Tochterkerne. Es wird homogene Massen- und Ladungsdichte vorausgesetzt. Drücken Sie die Radien der Tochterkerne durch f und R_0 aus. Die Oberflächenenergie zum Zeitpunkt der Spaltung ist

$$U_{\mathcal{S}}^{\text{Spalt}} = a_{\mathcal{S}}(A_1^{2/3} + A_2^{2/3}) = a_{\mathcal{S}} A^{2/3}\alpha$$

wobei A_1, A_2 die Massenzahlen der Tochterkerne sind. Berechnen sie den Koeffizienten α als Funktion von f.

ii. Wir wollen uns nun dem Coulomb-Term zuwenden. Überlegen Sie sich, wie groß die elektrostatische Energie zum Zeitpunkt der Spaltung ist. (Zur Erinnerung: die Selbstenergie einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius r ist $W = 3Z^2e^2/20\pi\varepsilon_0 r$. Berücksichtigen Sie auch die Coulomb-Abstoßung der Tochterkerne.) Ihr Ergebnis sollte von der Form

$$U_C^{\text{Spalt}} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\varepsilon_0 R_0}(\beta + \gamma)$$

sein: bestimmen sie die Koeffizienten β und γ als Funktion von f. Benutzen Sie $R_0 = 1,128A^{1/3}$ fm um die elektrostatische Energie nur in Z, A und f auszudrücken.

iii. Spontane Spaltung wird auftreten, wenn die Energiebilanz dies zulässt, wenn also gilt:

$$U_{\mathcal{S}}^{\text{orig}} + U_C^{\text{orig}} > U_{\mathcal{S}}^{\text{Spalt}} + U_C^{\text{Spalt}},$$

wobei die Terme auf der linken Seite Oberflächen- und Coulomb-Term des Mutterkerns bezeichnen. Welche Bedingung erhalten Sie hieraus für Z^2/A, in Abhängigkeit von $a_{\mathcal{S}}$, α, β und γ?

iv. Nun wollen wir den Koeffizienten $a_{\mathcal{S}}$ aus der Spaltenergie (dem Q-Wert) abschätzen: haben sich die Tochterkerne durch die Coulomb-Abstoßung unendlich weit entfernt, so muss gelten:

$$(U_{\mathcal{S}}^{\text{orig}} + U_C^{\text{orig}}) - (U_{\mathcal{S}}^{\infty} + U_C^{\infty}) = Q$$

wobei $U_{\mathcal{S}}^{\infty}$, U_C^{∞} die Oberflächen- und Coulombterme der Tochterkerne im unendlichen bezeichnen. Leiten Sie hieraus einen Ausdruck für $a_{\mathcal{S}}$ in Abhängigkeit von Q, A, Z, α und β her.

v. Berechnen Sie $a_{\mathcal{S}}$ und Z^2/A für die folgenden Reaktionen (tatsächlich sind dies induzierte Kernspaltungen, darüber wollen wir hier aber hinwegsehen):

Reaktion	Q (MeV)	f
n + ${}^{235}_{92}$U → ${}^{141}_{56}$Ba + ${}^{92}_{36}$Kr + 3n	173,2	1,53
n + ${}^{235}_{92}$U → ${}^{116}_{46}$Pd + ${}^{116}_{46}$Pd + 4n	177,2	1,00
n + ${}^{235}_{92}$U → ${}^{208}_{82}$Pb + ${}^{26}_{10}$Ne + 2n	54,2	8,00

vi. Um nun eine reaktionsunabhängige untere Grenze für die spontane Spaltung zu erhalten, überlegen Sie sich, für welchen Wert f die untere Grenze Z^2/A wohl minimal wird. (Sie können hierzu entweder ihr Ergebnis aus **iii.** plotten oder ein Symmetrieargument verwenden.) Was ist dann die untere Grenze, in Abhängigkeit von $a_{\mathcal{S}}$?

Frohe Weihnachtsfeiertage und einen guten Rutsch!