

Übung Nr. 9

Diskussionsthema: Radioaktives Zerfallsgesetz

Aufgabe 28. Zerfallsgesetz

Sie werden gebeten, mitzuhelfen, einen Mord aufzuklären. Es besteht der Verdacht, dass jemand mit Polonium ^{210}Po vergiftet wurde.¹ ^{210}Po zerfällt durch α -Strahlung und hat die Halbwertszeit $T_{1/2} = 138,4$ Tage. Zudem beträgt dessen organische Halbwertszeit 50 Tage, das ist der Zeitraum, nach dem der menschliche Körper die Hälfte des Poloniums wieder ausgeschieden hat. Das Opfer wurde nach Zeugenaussagen² vor 25 Tagen vergiftet und ist heute daran gestorben. Eine erste Analyse ergab, dass die Aktivität auf den ganzen Körper hochgerechnet $103,7 \cdot 10^6$ Becquerel beträgt. Mit wie viel Gramm wurde das Opfer vermutlich vergiftet? (Sie können die natürliche Aktivität des menschlichen Körpers — vgl. nächste Aufgabe — vernachlässigen.)

Aufgabe 29. Wie radioaktiv sind Sie?

Durch natürliche Prozesse (Atmung, Nahrung) werden verschiedene radioaktive Substanzen in den menschlichen Körper aufgenommen, insbesondere ^{14}C , ^{40}K und ^{222}Rn . Wir wollen hier die von diesen Elementen verursachte Aktivität Ihres Körpers abschätzen. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass Frauen bzw. Männer 65 kg bzw. 75 kg wiegen.

i. Kalium-40. Kalium hat 3 natürlich vorkommende Isotope: ^{39}K (Häufigkeit 93,26 %) und ^{41}K (Häufigkeit 6,73 %) sind stabil, während ^{40}K (heutige Häufigkeit 0,0117 %) instabil mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 1,227 \cdot 10^9$ Jahre ist.

Berechnen Sie die Aktivität von einem Mol ^{40}K -Kernen. Die Atommasse von ^{40}K ist 39,964 u:³ was für eine Aktivität hat ein Kilogramm Kalium-40?

Der Anteil an Kalium im menschlichen Körper beträgt im Schnitt 2,26 g pro kg Körpermasse bei Frauen bzw. 2,52 g pro kg Körpermasse bei Männern. Was ist dann die gesamte Aktivität des in Ihrem Körper enthaltenen ^{40}K ?

ii. Kohlenstoff-14. Kohlenstoff ist viel häufiger als Kalium im Körper und beträgt etwa 23 % des Körpergewichts. Davon ist die natürliche Häufigkeit vom radioaktiven Isotop ^{14}C ungefähr 10^{-12} . Die spezifische Aktivität (d.h. die Aktivität pro Kilogramm Stoff) von Kohlenstoff ist 190 Bq kg^{-1} . Berechnen Sie die von ^{14}C verursachte Aktivität in Ihrem Körper.

iii. Radon. Radon ist das schwerste Edelgas, mit vielen Isotopen, die alle instabil sind. Das langlebigste und häufigste davon ist ^{222}Rn mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 3,8$ Tage. Berechnen Sie dessen Zerfallskonstante λ_{Rn} .

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das Lungenvolumen 5 Liter beträgt und dass die ganze entsprechende Luft regelmäßig neu ersetzt wird, sodass die Häufigkeit von Radon in der in den Lungen enthaltenen Luft dieselbe ist, wie die mittlere Häufigkeit in der Erdatmosphäre, und zwar ein Radonatom auf 10^{21} Moleküle. Was ist die gesamte Aktivität von ^{222}Rn in Ihrem Körper? (Zur Erinnerung ist das molare Volumen idealer Gase bei Normbedingungen 22,4 Liter.)

Bemerkungen:

– Die jeweiligen biologischen Wirksamkeiten der oben betrachteten Quellen von Radioaktivität können sehr unterschiedlich sein. . . Vgl. Vorlesung „Strahlung und Materie“ später.

¹Sie dürfen „Alexander Litvinenko“ (auf Englisch: Litvinenko) in Wikipedia suchen...

²Vgl. <https://ruthe.de/cartoon/251/datum/asc/>

³u bezeichnet die atomare Masseneinheit: $1 \text{ u} = 1 \text{ g mol}^{-1} / \mathcal{N}_A$ mit der Avogadro-Konstante $\mathcal{N}_A$.

– Wegen der relativ kurzen Halbwertszeit von Radon hängt seine Häufigkeit in der Luft stark vom geologischen Untergrund ab. Es gibt viel weniger ^{222}Rn in der Bielefelder Luft als in Süddeutschland, vgl. <http://www.bfs.de/DE/themen/ion/umwelt/radon/karten/boden.html>!

Aufgabe 30. Kernspinresonanz (2)

(Fortsetzung der Aufgabe 27)

Ein Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ sei in einem Magnetfeld, das sich schreiben lässt als Überlagerung eines festen Magnetfeldes $\vec{\mathcal{B}}_0$ entlang der z -Achse und eines zweiten schwächeren zeitabhängigen Magnetfeldes $\vec{\mathcal{B}}_1$, das in der (x, y) -Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit lautet nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_0 + \vec{\mathcal{B}}_1(t)) = -\mu_0 \mathcal{B}_0 \hat{\sigma}_z - \mu_0 \mathcal{B}_1 \cos(\omega t) \hat{\sigma}_x - \mu_0 \mathcal{B}_1 \sin(\omega t) \hat{\sigma}_y. \quad (1)$$

Die Schrödinger-Gleichung liefert für die zeitliche Entwicklung eines auf 1 normierten Zustands $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ die gekoppelten differentiellen Gleichungen

$$\begin{cases} i \frac{da_+}{dt} = \frac{\omega_0}{2} a_+(t) + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_-(t) \\ i \frac{da_-}{dt} = \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+(t) - \frac{\omega_0}{2} a_-(t), \end{cases} \quad (2)$$

wobei $\omega_0 \equiv -\frac{2\mu_0 \mathcal{B}_0}{\hbar}$ und $\omega_1 \equiv -\frac{2\mu_0 \mathcal{B}_1}{\hbar}$.

a) Zeigen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $a_{\pm}(t)$ durch $b_{\pm}(t) \equiv \exp(\pm i\omega t/2) a_{\pm}(t)$ zu den einfacheren folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} i \frac{db_+}{dt} = -\frac{\omega - \omega_0}{2} b_+(t) + \frac{\omega_1}{2} b_-(t) \\ i \frac{db_-}{dt} = \frac{\omega_1}{2} b_+(t) + \frac{\omega - \omega_0}{2} b_-(t) \end{cases}$$

führt. Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{d^2 b_{\pm}}{dt^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_{\pm}(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2. \quad (3)$$

b) Der Spin sei zu $t = 0$ im Zustand $|+\rangle$, was $b_-(0) = a_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (3)? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ zur Zeit t zu finden, lautet

$$\mathcal{P}_{+\rightarrow-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω : Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des Übergangs $|+\rangle \rightarrow |-\rangle$ eine präzise Bestimmung der *Larmor-Frequenz* ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld $\mathcal{B}_0$) des gyromagnetischen Faktors γ ?

Mithilfe dieses Verfahrens verbesserte Isidor Rabi die Genauigkeit der Messungen von γ -Werten um einen Faktor $\approx 10^3$! Dann kamen Felix Bloch & Edward Purcell...

c) Wenn Sie Zeit haben können Sie noch die Bewegungsgleichungen (2) herleiten! Was ist die physikalische Deutung der Substitution der Funktionen $a_{\pm}$ durch die Funktionen $b_{\pm}$?