

Übung Nr. 8

Diskussionsthemen:

- Vorhersagen des Schalenmodells des Atomkerns (Spin, Parität, elektrische Momente)
- Informieren Sie sich über die Anwendungen der Kernspinresonanz, insbesondere die Magnetresonanztomographie.

Aufgabe 24. Spin und Parität

Bestimmen Sie Spin und Parität J_{Kern}^P der folgenden Kerne (im Grundzustand): $^{30}_{14}\text{Si}$, $^{40}_{20}\text{Ca}$, $^{41}_{20}\text{Ca}$, $^{59}_{27}\text{Co}$.¹

Aufgabe 25. Angeregte Zustände im Schalenmodell

In der folgenden Tabelle sind für einige Kerne die experimentell bestimmten Spins und Paritäten des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands gegeben:

	^7_3Li	$^{23}_{11}\text{Na}$	$^{33}_{16}\text{S}$	$^{41}_{21}\text{Sc}$	$^{83}_{36}\text{Kr}$	$^{93}_{41}\text{Nb}$
J_0^P	3^-	3^+	3^+	7^-	9^+	9^+
J_1^P	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$

Geben Sie nach dem Einteilchen-Schalenmodell die Konfiguration der Protonen und Neutronen in nicht abgeschlossenen Unterschalen für diese Kerne an,¹ und machen Sie Voraussagen über die Quantenzahlen der Grundzustände und ersten angeregten Zustände. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den angegebenen Werten.

Aufgabe 26. Elektrisches Quadrupolmoment

- Zeigen Sie, dass eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung kein elektrisches Quadrupolmoment hat.
- Wir wollen im Folgenden das elektrische Quadrupolmoment eines deformierten Kerns ausrechnen. Hierbei sei die Oberfläche eines prolaten Ellipsoiden beschrieben durch die Funktion

$$r(\theta, \varphi) = R[1 + \beta_{20}Y_{20}(\theta, \varphi)],$$

wobei R der mittlere Radius und β_{20} der Deformationsparameter sind und

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1).$$

(Symmetrieachse ist die z -Achse). Berechnen Sie das Quadrupolmoment $Q_{zz} = \int \rho_{\text{el}}(\vec{r})(3z^2 - r^2) d^3\vec{r}$ des deformierten Kerns unter der Annahme, dass die Ladung homogen über das Volumen des Ellipsoids verteilt ist. Sie sollten hierbei eine Entwicklung in β_{20} bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(\beta_{20}^2)$ vornehmen.

Aufgabe 27. Kernspinresonanz: Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Das magnetische Dipolmoment $\hat{\mu}$ und der Spin-Operator $\hat{S}$ eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\mu} = \gamma \hat{S} = \mu_0 \hat{\sigma}, \quad (1)$$

wobei γ das sog. gyromagnetische Verhältnis und $\mu_0 \equiv \gamma\hbar/2$ ist. Wir wollen hier und in einer späteren Aufgabe das durch Isidor Rabi eingeführte Prinzip der Messung von γ beschreiben.

¹Das Termschema der Energieniveaus können Sie der Aufgabe 23 entnehmen.

Die übliche Darstellung der Pauli-Matrizen ist

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Die Eigenzustände $|+\rangle, |-\rangle$ (in der Diracschen Bezeichnungsweise) der Operatoren $\hat{S}^2$ und $\hat{S}_z$ bilden gemeinsam eine Basis der Spinzustände; diese Eigenzustände genügen den Gleichungen

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \quad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \quad \hat{S}^2|\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\pm\rangle$$

sowie

$$\hat{S}_x|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|-\rangle, \quad \hat{S}_x|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \quad \hat{S}_y|+\rangle = i\frac{\hbar}{2}|-\rangle, \quad \hat{S}_y|-\rangle = -i\frac{\hbar}{2}|+\rangle.$$

In dieser Aufgabe betrachten wir die Präzession eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_0$ entlang der z -Achse. Der entsprechende Hamilton-Operator ist²

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = -\mu_0 \mathcal{B}_0 \hat{\sigma}_z. \quad (3)$$

Sei $|\psi(t)\rangle$ ein beliebiger Zustand, der bei $t = 0$ die Bedingung $|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ erfüllt, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Die spätere zeitliche Entwicklung des Zustands wird durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator (3) gegeben, so dass³

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t/2}|+\rangle + \beta e^{i\omega_0 t/2}|-\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\frac{2\mu_0 \mathcal{B}_0}{\hbar}. \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ des magnetischen Dipolmoments (1) im Zustand $|\psi(t)\rangle$ lautet

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = 2\mu_0 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta e^{i\omega_0 t}), \quad \langle \hat{\mu}_y \rangle = 2\mu_0 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta e^{i\omega_0 t}), \quad \langle \hat{\mu}_z \rangle = \mu_0 (|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

Schreiben Sie die x - bzw. y -Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu_0 \alpha^* \beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projizierung von $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ auf die (x, y) -Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$?

²Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Anteil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.

³Sie können gerne dieses Ergebnis nachprüfen!