

Übung Nr. 6

Diskussionsthemen:

- Frischen Sie Ihre Kenntnisse in Quantenmechanik auf. (Schrödinger-Gl. — insbesondere in 3D: Bahndrehimpulsoperator! — und ihre Lösung; Spin & Drehimpulse und ihre Addition)
- Welche experimentellen Beobachtungen führen zur Idee eines Schalenmodells des Atomkerns?

Aufgabe 18. Kern als Einzel- oder Zweikomponenten-Fermi-Gas

Berechnen Sie die Gesamtenergie (ohne äquivalent die Ruhemasse) des Atomkerns ${}^{107}_{47}\text{Ag}$, einerseits unter der Annahme, dass Protonen und Neutronen voneinander verschieden sind, andererseits dass sie nicht verschieden sind, und vergleichen Sie beide Resultate. Berechnen Sie auch explizit $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_N$. Wie gut ist die in der Vorlesung betrachtete Entwicklung?

Aufgabe 19. ... Und wieder das Fermi-Gas-Modell: Weiße Zwerge

Weiße Zwerge sind kleine (vgl. Frage **iii.**) Sterne, die aus Materie mit einem entarteten Elektronengas bestehen. Sie können entstehen, wenn die Fusionsprozesse im Inneren eines der Sonne ähnlichen Sterns zum Erliegen gekommen sind: dann kann der Stern der Gravitationswirkung nichts mehr entgegensetzen. (Die Masse des Sterns genügt allerdings nicht, um einen Neutronenstern zu erzeugen).

Die $\mathcal{N}_e$ Elektronen (Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, d.h. Spin-Entartungsgrad 2) im Weißen Zwerg können mittels eines Fermi-Gases beschrieben werden, dessen Fermi-Energie durch

$$\varepsilon_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_e}{\mathcal{V}}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \quad (1)$$

gegeben ist. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass alle Atomkerne im Weißen Zwerg das gleiche Verhältnis Z/A aufweisen.

- Ermitteln Sie die Masse M des Weißen Zwergs und die Zahl seiner Elektronen in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Nukleonen $\mathcal{N}_N$.
- Analog zu den Fragen **ii.** & **iii.** der Aufgabe **17**, wie lautet der Gleichgewichtsradius R_{eq} eines Weißen Zwergs?
- Die Masse der Sonne ist $1 M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg. Für einen typischen Weißen Zwerg ist außerdem $Z = \frac{1}{2}A$. In etwa 5-6 Milliarden Jahre wird sich unsere Sonne von einem Roten Riesen in einen Weißen Zwerg verwandeln: wie groß (R_{eq}) wird sie dann sein und welche (Massen)Dichte wird sie haben?
- Die Temperatur im Zentrum eines typischen Weißen Zwergs ist etwa 10^7 K. Der Ausdruck (1) der Fermi-Energie beruht auf der Annahme eines Fermi-Gases nicht-relativistischer Elektronen bei Null-Temperatur. Ist diese Annahme begründet?

Aufgabe 20. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der dreidimensionale (3D) harmonische Oszillator wird durch das Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ beschrieben.

- Betrachten Sie den der kinetischen Energie entsprechenden Operator für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten.
 - Machen Sie einen Separationsansatz für die Wellenfunktion und zeigen Sie, dass man so die Gleichungen für drei eindimensionale harmonische Oszillatoren erhält. Folgern Sie daraus, dass sich die Energieniveaus des 3D-Oszillators durch drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 ausdrücken lassen.

b) Sei $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$. Wie lautet der Entartungsgrad des Niveaus mit Energie $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$?

ii. Löst man das Problem des 3D-Oszillators in Kugelkoordinaten (was wir hier nicht tun wollen), so findet man für die Energieniveaus:

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega \left[2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right],$$

wobei $n = 1, 2, \dots$ (Hauptquantenzahl), und $\ell = 0, 1, \dots$ (Bahndrehimpulsquantenzahl).

a) Welchen Entartungsgrad weisen die Energieniveaus auf? Berechnen Sie diesen explizit für die ersten 6 Energieniveaus.

b) (Für die Diskussion in Präsenz:) Welche Parität haben die Energieniveaus jeweils?

iii. Geben Sie die Energieniveaus für das Problem eines Teilchens der Masse m im Potentialtopf

$$V(\vec{r}) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right]$$

an, wobei $r = |\vec{r}|$ und $V_0 > 0$.