

Übung Nr. 5

Diskussionsthema: Fermi-Gas-Modell(e) des Atomkerns

Aufgabe 14. Bethe–Weizsäcker Massenformel (2)

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, wie sich einige Koeffizienten in der Bethe–Weizsäcker Massenformel aus experimentellen Daten gewinnen lassen.

i. Coulomb-Term

Als *Spiegelkerne* bezeichnet man ein Paar Atomkerne mit vertauschter Protonen- und Neutronenzahl d.h. (Z, N) und $(Z' = N, N' = Z)$.

Hiernach wird nur den Fall $N = Z - 1$ betrachtet.

a) Berechnen Sie die Differenz der Bindungsenergien der Kerne eines solchen Paares (Tipp: Z sollte keine Rolle spielen!). Warum ist die Annahme $N = Z - 1$ hilfreich?

b) Entnehmen Sie einer Datenbank (z.B. <http://www.nndc.bnl.gov/nudat3/> — oben rechts findet man einen „Knopf“ „BE/A“) die Bindungsenergien der Atomkerne eines solchen Paares, beispielsweise (^{13}N , ^{13}C) oder (^{15}O , ^{15}N), und berechnen Sie damit den Wert des Parameters a_C .

ii. Asymmetrieterm

Finden Sie die Bindungsenergien der Kerne in der Isobarenreihe mit $A = 135$ und zeichnen Sie sie in Abhängigkeit von Z auf. Folgern sie daraus den Wert des Parameters a_A der Bethe–Weizsäcker Massenformel.

iii. Paarungsterm

Führen Sie die gleiche Berechnung für Kerne mit $A = 136$ durch und schätzen Sie damit den Wert von B_δ ab.

Aufgabe 15. Bethe–Weizsäcker Massenformel (3)

In der Bindungsenergie $B(Z, A)$ hängen nur der Coulomb-Term und der Asymmetrie-Term explizit von Z ab.

Wiederholen Sie die Berechnung der Protonenzahl $Z_{\min}(A)$, bei der die minimale Kernmasse in einer Isobarenreihe erreicht wird. Was passiert mit $Z_{\min}(A)$ wenn $a_C = 0$ bzw. $a_A = 0$? Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 16. Typische Skalen der Kernphysik

Der Radius eines Kerns sei durch $R = 1,128A^{1/3}$ fm gegeben.

i. Zeitskala

Berechnen Sie die Zeit, die ein Nukleon mit kinetischer Energie gleich der Fermi-Energie $\varepsilon_F \approx 40$ MeV benötigt, um einen ^{208}Pb -Kern zu durchqueren.

ii. Energie- und Impulsskala

Schätzen Sie unter Verwendung der Heisenbergschen Unschärferelation den typischen Impuls eines Nukleons in einem ^{208}Pb -Kern. Was ist die zugehörige typische Energie? Vergleichen Sie mit den im Fermi-Modell erwähnten Werten.

Aufgabe 17. Neutronenstern als Fermi-Gas

Nach dem Verbrauch ihres nuklearen „Brennstoffs“ kollabieren Sterne mit einer Masse von etwa $10 M_\odot$ (Sonnenmassen) zu Neutronensternen. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass diese ausschließlich aus entarteten Neutronen bestehen.

i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines Kerns ($n_\infty = 0,17$ Nukleonen/fm³) und die typische Temperatur ist $T \approx 10^8$ K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen (d.h. kinetische Energie $\ll$ Massenenergie) Neutronen bei Temperatur Null beschrieben werden kann.

Es sei $\varepsilon_F = \left(3\pi^2 \frac{\mathcal{N}_n}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_n}$ die zugehörige Fermi-Energie mit der Zahl $\mathcal{N}_n$ von Neutronen.

ii. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E(R)$ des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius R unter der Annahme, dass der Stern eine homogene Kugel ist.¹ Diese besteht aus zwei Beiträgen: der kinetischen Energie — benutzen Sie hier die in der Vorlesung angegebene durchschnittliche kinetische Energie pro Neutron — und der Gravitationsenergie. Leiten Sie die Gravitationsenergie E_G analog zur Betrachtung in der Vorlesung (Skript des 29.10.) bezüglich der potentiellen elektrostatischen Energie einer homogen geladenen Kugel her.

Hinweis: $E_G = \frac{3}{5} \frac{G_N M^2}{R}$ mit der Sternmasse M .

iii. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius R_{eq} , für den die Energie $E(R)$ minimal wird.

Hinweis: Drücken Sie die Sternmasse durch die Neutronenmasse aus.

iv. Berechnen Sie den Wert dieses Radius sowie die entsprechende Teilchendichte für einen Neutronenstern mit der Masse $M = 1,4 M_\odot$ ($1 M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg).

¹Dabei wird somit die Kompressibilität der Kernmaterie vernachlässigt, sowie die (manchmal sehr schnelle) Rotation des Sterns, die zu dessen Verformung führt.