

Übung Nr. 3

Diskussionsthema: Radius und Dichteverteilung eines Atomkerns

Aufgabe 5. Rutherfordsche Streuformel

In der Vorlesung wurde die Rutherfordsche Streuformel

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\theta) = \frac{1}{16} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^4} \quad (1)$$

für die elektromagnetische Streuung an einem punktförmigen Ziel mit der Ladung Ze hergeleitet.

i. Zeigen Sie durch ein einfaches Argument, dass der entsprechende totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} divergiert. Der Grund dafür ist, dass das durch eine isolierte elektrische Ladung erzeugte Coulomb Potential $V_{\text{Coul}}(r)$ eine sogenannte unendliche Reichweite hat, d.h. $\lim_{r \rightarrow \infty} r V_{\text{Coul}}(r) \neq 0$.

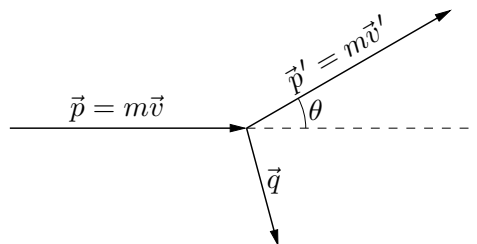
ii. In einem Atom wird die positive Ladung des Kerns für große Abstände durch die negativ geladenen Elektronen abgeschirmt, so dass die effektive Reichweite des elektrischen Potentials des Kerns dennoch begrenzt ist. Wie groß ist der totale Wirkungsquerschnitt im Fall der Streuung von α -Teilchen mit $E_{\text{kin}} = 5,5 \text{ MeV}$ an Gold-Atomen, wenn Sie annehmen, dass für einen Stoßparameter b größer als der Atomradius $R_{\text{Au}} = 1,35 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ keine Streuung mehr erfolgt?

Aufgabe 6. Rutherfordsche Streuformel (2)

Berechnen Sie den minimalen Abstand r_{min} eines α -Teilchens auf der Sonnenoberfläche (kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_B T$, wobei $T \simeq 5800 \text{ K}$) bei Streuung an einem Kohlenstoffatom $^{12}_6\text{C}$. (Der Einfachheit halber wird angenommen, dass E_{kin} die kinetische Energie im Schwerpunktsystem des α - $^{12}_6\text{C}$ Paares ist.) Wie heiß müsste es mindestens sein, damit sich die Kerne berühren? Benutzen Sie für die Kernradien $R = 1,3A^{1/3}$.¹

Aufgabe 7. Rutherfordsche Streuformel (3)

Zur Beschreibung einer Streuung wird oft der Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ eingeführt:



Zeigen Sie (Tipp: die Streuung ist elastisch!), dass sich die Rutherfordsche Streuformel (1) auch in der Form

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}\right)_{\text{punkt}}(\vec{q}) = \frac{(2zZ\alpha\hbar mc)^2}{|\vec{q}|^4} \quad (2)$$

umschreiben lässt, wobei $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ die elektromagnetische Feinstrukturkonstante ist.

¹Werte für die quadratisch gemittelten Radien R_{rms} dieser Kerne können sie auch der Nuklidkarte auf der Webseite der IAEA entnehmen, wenn Sie die Werte finden!

Aufgabe 8. Elektrischer Formfaktor

Im Fall der Streuung elektrischer Ladungen an einem ausgedehnten geladenen Target wird der sogenannte elektrische Formfaktor $F^2(\vec{q})$ eingeführt, wobei $\vec{q}$ der Impulsübertrag ist.

$F^2(\vec{q})$ ist² der quadrierte Betrag der Fourier-Transformierten der Ladungsdichteverteilung $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Ze} \int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} d^3\vec{r} \right|^2, \quad (3)$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet dann

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = \left(\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} \right)_{\text{punkt}}(\vec{q}) \cdot F^2(\vec{q}).$$

- i. Was ist der elektrische Formfaktor einer Punktladung?
- ii. Zeigen Sie, dass im Fall einer kugelsymmetrischen Ladungsdichteverteilung $\rho(r)$ die Gl. (3) gibt

$$F^2(\vec{q}) = \left| \frac{1}{Ze} \int_0^\infty \rho_{\text{el.}}(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} 4\pi r^2 dr \right|^2.$$

- iii. Berechnen Sie den Formfaktor der Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel:

$$\rho_{\text{el.}}(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R, \end{cases}$$

mit dem Kugelradius $R > 0$.

Aufgabe 9. Woods–Saxon Verteilung

Die Woods–Saxon (Ladungsdichte-)Verteilung ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_{1/2}}{\delta}}},$$

wobei δ die Dicke des Kernrands bestimmt.

- i. Ermitteln Sie über welche Distanz (in Einheiten von δ) die Ladungsdichte von 80% auf 20% absinkt.
- ii. Berechnen Sie den Wert der Verteilung im Zentrum des Kerns in der Näherung $\delta \ll R_{1/2}$.

²bis auf einen Faktor $1/Z^2 e^2$