Übung Nr. 12

Diskussionsthema: Welche wichtigen Unterschiede existieren zwischen den häufigsten Uran-Isotopen ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ und ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ bezüglich der durch ein Neutron induzierten Spaltung?

Aufgabe 41. „Exotische" Zerfallsarten

i. Suchen Sie auf einer Nuklidkarte den schwersten Kern, der hauptsächlich über Neutronenemission zerfallen kann, und den schwersten Kern, der hauptsächlich über Protonenemission zerfallen kann. Wie lauten die entsprechenden Prozesse? Was können Sie ohne Berechnung über die kinetische Energie des emittierten Neutrons bzw. Protons sagen?

ii. Entnehmen Sie einer Nuklidkarte die Bindungsenergien (pro Nukleon) von ${}^{54}\mathrm{Zn}$, ${}^{53}\mathrm{Cu}$ und ${}^{52}\mathrm{Ni}$. Berechnen Sie die Separationsenergien eines Protons S_p (vgl. Aufgabe **11.**) für ${}^{54}\mathrm{Zn}$ und ${}^{53}\mathrm{Cu}$, sowie die Separationsenergie $S_{2p}({}^{54}\mathrm{Zn})$ für die Abspaltung zweier Protonen (wie definieren Sie S_{2p} überhaupt?). Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse: Stabilität / Zerfallsart von ${}^{54}\mathrm{Zn}$ und ${}^{53}\mathrm{Cu}$. Finden Sie eine plausible Erklärung für den Unterschied zwischen $S_p({}^{54}\mathrm{Zn})$ und $S_p({}^{53}\mathrm{Cu})$.

Aufgabe 42. Elektrische Dipolstrahlung

In dieser Übung wollen wir einige Elemente der Theorie des γ-Zerfalls ohne Herleitung einführen und untersuchen. Sei $E_\gamma = \hbar\omega$ die Energie des emittierten γ-Quants, und Ψ_i bzw. Ψ_f die Wellenfunktion des Kerns im Anfangs- bzw. Endzustand, d.h. vor bzw. nach dem Zerfall.

Die Zerfallsrate für die Emission elektrischer Dipolstrahlung ($\ell_\gamma = 1$) lautet

$$\frac{1}{\tau_{E1}} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left|\mathscr{M}_{E1}\right|^2, \tag{1}$$

mit einem Matrixelement $\mathscr{M}_{E1}$, das von den Wellenfunktionen Ψ_i, Ψ_f und von den Positionen $\vec{r}_p$ der Protonen im Kern abhängt:[1]

$$\mathscr{M}_{E1} = \int \Psi_\mathrm{f}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\})^* \left(\sum_p \vec{r}_p\right) \Psi_\mathrm{i}(\{\vec{r}_p\},\{\vec{r}_n\}) \prod_{p=1}^{Z} \mathrm{d}^3\vec{r}_p \prod_{n=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{r}_n. \tag{2}$$

i. Warum müssen die Wellenfunktionen Ψ_i, Ψ_f entgegengesetzte Paritäten haben?

ii. Das Matrixelement $\mathscr{M}_{E1}$ hat die Dimension einer Länge (warum?), d.h. es kann in fm ausgedrückt werden. Berechnen Sie die Zerfallsrate (in s^{-1}) für ein γ-Quant der Energie $E_\gamma = 1$ MeV unter der Annahme $|\mathscr{M}_{E1}| = 1$ fm.

Aufgabe 43. Bindungsenergie eines deformierten Kerns

In dieser Übung wollen wir die Bindungsenergie eines prolaten (= zigarrenförmigen) Atomkerns anhand der Bethe–Weizsäcker-Formel berechnen und damit die Stabilität von Kernen gegen Deformationen abschätzen.

Der Kern sei durch einen prolaten Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = R(1+\varepsilon)$ und $b = R/\sqrt{1+\varepsilon}$ modelliert: sein Volumen ist gegeben durch

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi ab^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

und $\varepsilon \ll 1$ bestimmt die Größe der Deformation. Wie gewöhnlich ist der „Radius" $R \propto A^{1/3}$.

[1] Streng genommen ist $\mathscr{M}_{E1}$ — wie die Summe der Ortsvektoren $\vec{r}_p$ — vektoriell! Eigentlich kommt in der Berechnung das Skalarprodukt $\mathscr{M}_{E1} \cdot \vec{\mathscr{E}}_0$ aus diesem Vektor mit einem elektrischen Feld, dessen Betrag proportional zu $(\hbar\omega)^{1/2}$ ist, vor.

i. Oberflächenenergie

Berechnen Sie die Oberfläche

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{b}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2} + \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$$

des Ellipsoids in Abhängigkeit von R und ε bis einschließlich zur Ordnung ε^2.

Was ist dann die Differenz zwischen der Oberflächenenergie $B_O(\varepsilon)$ des deformierten Kerns und der Oberflächenenergie $B_O(0)$ des sphärischen Kerns mit demselben Volumen? Was bedeutet physikalisch das Vorzeichen dieser Differenz?

ii. Coulomb-Energie

Man kann zeigen, dass die Coulomb-Energie des deformierten Kerns lautet

$$B_C(\varepsilon) = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[1 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right].$$

Was ist die Differenz zwischen dieser Coulomb-Energie und jener des kugelförmigen Kerns mit demselben Volumen?

iii. Gesamte Bindungsenergie

Berechnen Sie die gesamte Bindungsenergie $B(\varepsilon)$ des deformierten Atomkerns, sowie die Differenz $\Delta B(\varepsilon) \equiv B(\varepsilon) - B(0)$. Diskutieren Sie, in Abhängigkeit von $\Delta B(\varepsilon)$, wann der Kern stabil gegenüber (kleinen) Deformationen ist. Für welche Werte vom Spaltungsparameter Z^2/A wird der Kern instabil? Was kann dann mit dem Kern passieren?