

## Übung Nr. 11

### Diskussionsthemen:

- Fassen Sie für jede der drei häufigsten Zerfallsarten ( $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Emission) zusammen, welche Erhaltungssätze jeweils gelten und welche deren Folgen sind.
- Auf welchem Phänomen beruht die Emission eines  $\alpha$ -Teilchens durch einen Kern? Wie wird die entsprechende Zerfallskonstante bzw. Halbwertszeit berechnet und welche experimentelle Beobachtung bestätigt die (grobe) Gültigkeit der Berechnung?
- Informieren Sie sich über den Mössbauer-Effekt und dessen Anwendungen.

### Aufgabe 36. $\alpha$ -Zerfall für breite Zerfallsbarrieren

i. In der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck für die Zerfallskonstante

$$\lambda_\alpha = J_0 e^{-G}, \quad G = \frac{2Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sqrt{\frac{2m_\alpha c^2}{\epsilon_\alpha}} \pi \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right), \quad \mathcal{G}(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} \right]$$

hergeleitet, wobei  $R$  bzw.  $r_c$  der Kernrand bzw. der Austrittsabstand ist und  $Z_T$  die Kernladungszahl des Tochterkerns. Außerdem ist  $J_0 = v_{\text{in}}/(2R)$  die Frequenz, mit der das  $\alpha$ -Teilchen gegen die Potentialbarriere stößt. Zeigen Sie durch Entwicklung in  $\sqrt{x}$  bis zur ersten Ordnung, dass für Kerne mit  $R/r_c \ll 1$  (d.h. mit einer „breiten Zerfallsbarriere“) die Zerfallskonstante durch

$$\lambda_\alpha = \frac{v_{\text{in}}}{2R} \exp \left( -\frac{Z_T e^2}{\epsilon_0 \hbar v_\alpha} + \frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{Z_T m_\alpha R}{\pi \epsilon_0}} \right)$$

gegeben ist, wobei  $v_\alpha$  die Geschwindigkeit des emittierten  $\alpha$ -Teilchens ist.

ii. Wir wollen im Folgenden eine Modifikation der Tunnelbarriere durch Zentrifugalkräfte betrachten: Die Schrödinger-Gleichung für den Radialteil dieses Problems lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r) u(r) = E, \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{2Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m_\alpha r^2},$$

wobei  $\psi(\vec{r}) = u(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \varphi)/r$  die Wellenfunktion des  $\alpha$ -Teilchens ist und  $\ell$  seine Bahndrehimpulsquantenzahl. Berechnen Sie, um welchen Bruchteil die Höhe  $B$  der Potentialbarriere bei  $r = R$  in Abhängigkeit von  $\ell > 0$  zunimmt. Berechnen Sie auch das Verhältnis der Zerfallskonstanten  $\lambda_\alpha(\ell)/\lambda_\alpha(0)$  für  $\ell = 1, 2, 3$ .

### Aufgabe 37. $\beta$ -Zerfall

i. Der Kern  ${}^{62}_{30}\text{Zn}$  kann sowohl durch  $e^+$ -Emission als auch durch Elektroneneinfang zerfallen. Die maximale kinetische Energie des Positrons sei 0,66 MeV. Wie groß ist die maximale Energie des Neutrinos im  $\beta^+$ -Zerfall? Wie groß ist die maximale Energie des Neutrinos im Elektroneneinfang? (Rückstoß- und Elektronen-Bindungsenergie dürfen vernachlässigt werden.)

ii. Entnehmen Sie einer Nuklidkarte die  $Q$ -Werte der folgenden  $\beta^-$ -Zerfälle: (a)  ${}^{11}\text{Be} \rightarrow {}^{11}\text{B}$ , (b)  ${}^{65}\text{Ni} \rightarrow {}^{65}\text{Cu}$ , und der  $\beta^+$ -Zerfälle: (c)  ${}^{10}\text{C} \rightarrow {}^{10}\text{B}$ , (d)  ${}^{89}\text{Zr} \rightarrow {}^{89}\text{Y}$ .

### Aufgabe 38. $\gamma$ -Zerfall

Bei  $\gamma$ -Zerfall wird der emittierten Strahlung eine „Multipolarität“ zugeordnet. Sei  $\hat{J}_\gamma = \hat{L}_\gamma + \hat{S}_\gamma$  der Gesamtdrehimpuls des Photons, und  $j_\gamma$  bzw.  $\ell_\gamma$  die mit  $\hat{J}_\gamma$  bzw.  $\hat{L}_\gamma$  assoziierte Quantenzahl.

Definitionsgemäß hat ein Photon mit „elektrischer“  $2^{\ell_\gamma}$ -Multipolarität die Parität  $P_\gamma = (-1)^{j_\gamma}$ , während „magnetische“  $2^{\ell_\gamma}$ -Multipolarität der Parität  $P_\gamma = -(-1)^{j_\gamma}$  entspricht. Zur Erinnerung ist die Parität des Photons  $P_\gamma = -(-1)^{\ell_\gamma}$ .

Der Kern  $^{43}\text{Ca}$  sei im Zustand mit  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = \frac{3}{2}^-$  angeregt und gehe durch  $\gamma$ -Zerfall in den Grundzustand mit  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = \frac{7}{2}^-$  über, wobei die Anregungsenergie  $E^* = 593 \text{ keV}$  beträgt.

- i. Welche Multipolaritäten kann die  $\gamma$ -Strahlung haben?
- ii. Welche Wellenlänge hat die emittierte  $\gamma$ -Strahlung?

### Aufgabe 39. Kinematik

Ein isolierter ruhender Atomkern emittiert ein Photon ( $\gamma$ ) der Energie  $\hbar\omega$ . Ein anderer ruhender Kern soll dieses  $\gamma$ -Quant wieder absorbieren. Welche Energiedifferenz muss zwischen dem Niveau der Emission und jenem der Absorption vorhanden sein?

### Aufgabe 40. Langlebiger Isomierzustand

Der Kern  $^{108}_{47}\text{Ag}$  (Spin und Parität  $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = 1^+$ ) ist  $\beta$ -instabil mit einer Halbwertszeit 2,38 min. Er besitzt einen Isomierzustand (Anregungsenergie  $E^* = 109 \text{ keV}$ ) mit Spin und Parität  $6^+$  und einer Halbwertszeit 438 Jahre. Erklären Sie, wieso ein angeregter Zustand eines Kerns mehr stabil als der Grundzustand sein kann.



*Frohe Weihnachtsfeiertage und einen guten Rutsch!*