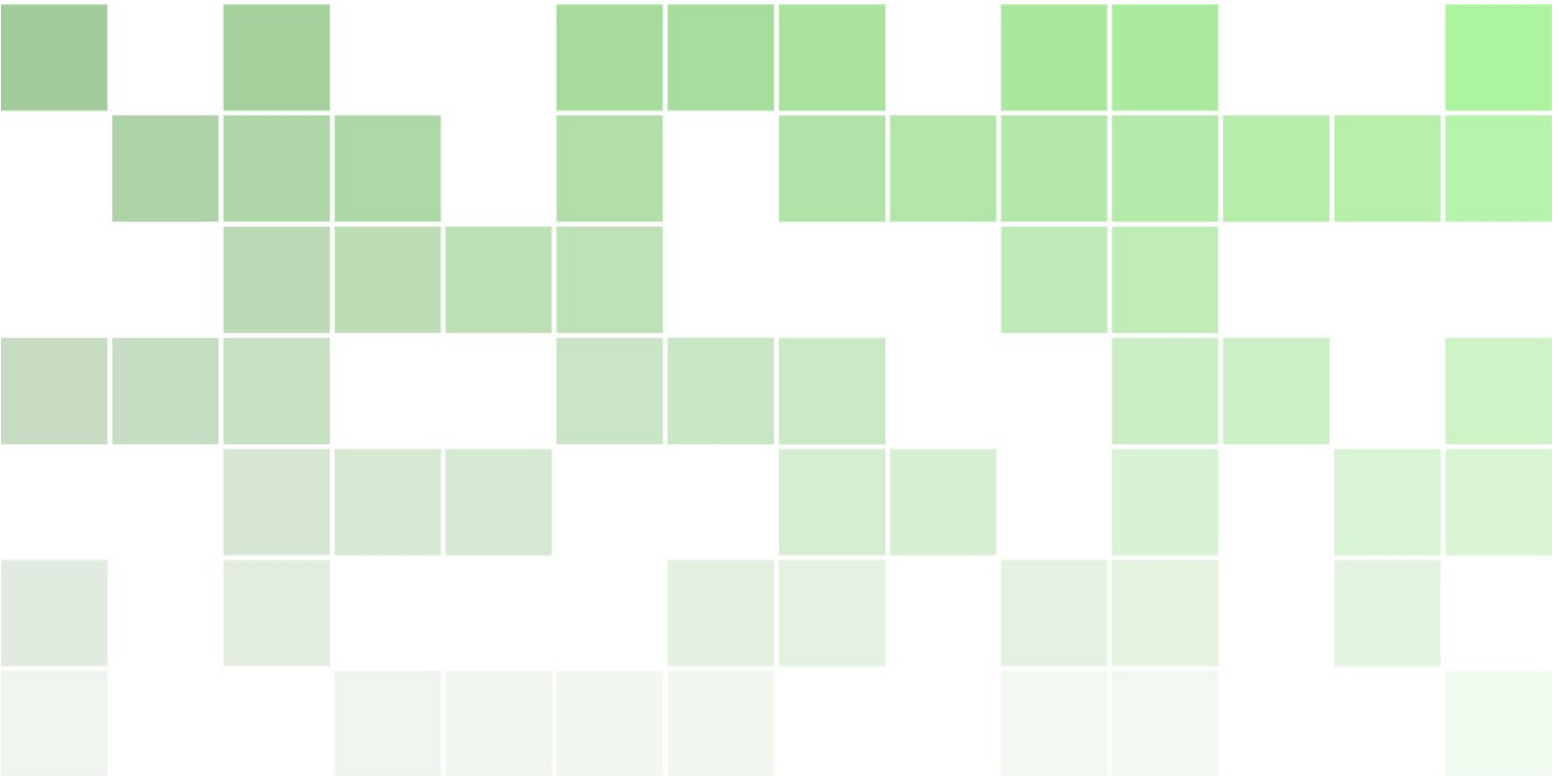
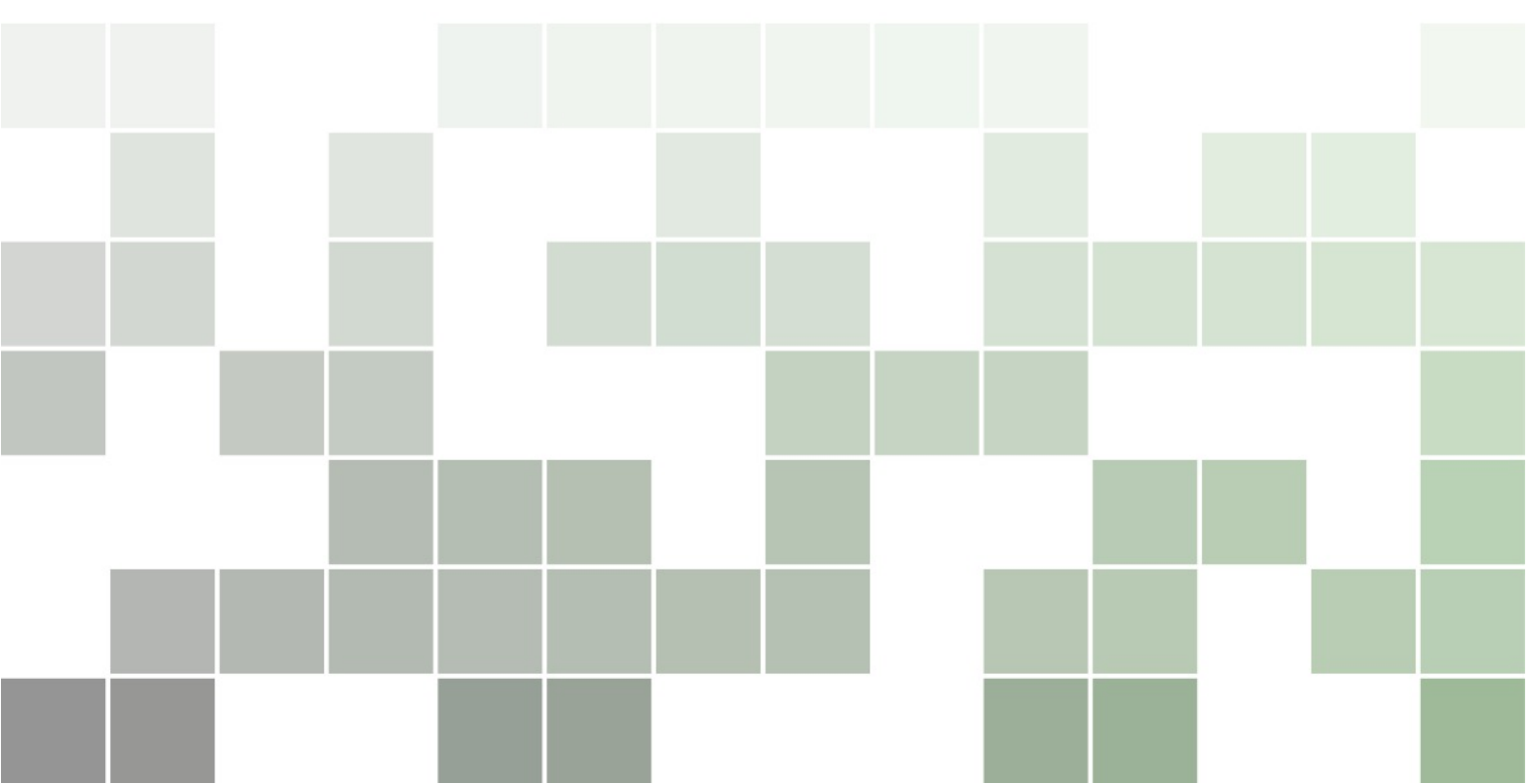




Elemente der Kernphysik

Nicolas Borghini

Version vom 24. November 2025



Nicolas Borghini

Universität Bielefeld, Fakultät für Physik

Homepage: <http://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/>

Email: borghini@physik.uni-bielefeld.de

Vorwort

Die vorliegenden Seiten waren ursprünglich knappe handgeschriebene Notizen, um mir in der Vorlesung zu helfen, nichts wichtiges zu vergessen. Mit der Zeit häuften sich immer mehr Anmerkungen, weshalb ich angefangen habe, die schnell unlesbar werdenden geschmierten Blätter Papier durch eine elektronische Version zu ersetzen. Wieder wurden zusätzliche Ergänzungen oder sogar ganze Paragraphen fast willkürlich hinzugefügt, und das vorläufige Ergebnis ist, was Sie jetzt unter Ihren Augen haben: ein nicht durchdachter Plan; manchmal unterbrochene Sätze; lückenhafte Beweisführungen bzw. Berechnungen — weil die fehlenden Schritte mir klar sind —; nicht-so-schön-aussehende Abbildungen; eine unvollständige Quellenangabe; usw. Vor allem gibt es mit Sicherheit Grammatik- und Rechtschreibfehler,^(*) sowie die üblichen unvermeidbaren Tippfehler.^(†)

Kurz gesagt: die hier gesammelten Kapitel sind kein eigentliches Skript und können keinesfalls ein Lehrbuch und die Teilnahme an einer Vorlesung (und Tutorien) ersetzen.

^(*) ... die wahrscheinlich mir mehr ärgerlich sind, als Ihnen.

^(†) Kommentare und Korrekturen sind willkommen!

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	1
I Eigenschaften von Atomkernen	2
I.1 Bausteine von Atomkernen	2
I.2 Größe des Atomkerns	4
I.2.1 Klassische Streutheorie	4
I.2.2 „Rutherford'sches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns	8
I.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen	12
I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen	14
I.3 Masse des Atomkerns	18
I.3.1 Grundlagen der Massenmessung	18
I.3.2 Bindungsenergie	19
I.3.3 Separationsenergien	21
I.4 Quantenmechanische Eigenschaften des Atomkerns	21
I.4.1 Spin	21
I.4.2 Parität	22
I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente	22
I.5 Eigenschaften der leichtesten Atomkerne	25
I.5.1 Praktische Einheiten in der Kernphysik	25
I.5.2 $Z = 1, N = 0$: Proton (p)	26
I.5.3 $Z = 0, N = 1$: Neutron (n)	26
I.5.4 $Z = 1, N = 1$: Deuteron (${}^2\text{H} \equiv d$)	27
I.5.5 Schwerere Kerne	27
II Struktur von Kernen. Kernmodelle	29
II.1 Phänomenologie	29
II.2 Tröpfchenmodell	30
II.2.1 Bethe–Weizsäcker Massenformel	31
II.2.2 Stabilität im Tröpfchenmodell	33
II.2.3 Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation	35
II.3 Atomkern als ideales Fermi-Gas	36
II.3.1 Ideales Fermi-Gas	36
II.3.2 Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen	37
II.3.3 Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas	39
II.3.4 Mögliche Verbesserungen des Modells	41
II.4 Schalenmodell des Atomkerns	41
II.4.1 Motivation für ein Schalenmodell	42
II.4.2 Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns	44
II.4.3 Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung	51
II.4.4 Konstruktion des A -Teilchen-Zustands	54
II.4.5 Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	54
II.4.6 Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells	58

Anhänge	.61
A Der Drehimpuls in Quantenmechanik	.61
A.1 Bahndrehimpuls - Algebra	61
A.2 Eigenwerte, Kugelflächenfunktionen	61
A.2.1 Eigenwerte	61
A.2.2 Kugelflächenfunktionen	61
A.3 Spin	61
A.4 Kopplung von Drehimpulsen	61
Literaturverzeichnis	.62

Vorbemerkungen

Notationen, Konventionen, usw.

Literatur

Allgemeine einführende Lehrbücher zum Thema sind z.B. (in alphabetischer Ordnung und ohne Anspruch auf Vollständigkeit)

- Basdevant, Rich & Spiro, *Fundamentals in nuclear physics* [1]
- Bethge, Walter & Wiedemann, *Kernphysik* [2]
- Cottingham & Greenwood, *An introduction to nuclear physics* [3]
- Friedmann, *Einführung in die Kernphysik* [4]
- Mayer-Kuckuk, *Kernphysik* [5]
- Povh, Rith, Scholz & Zetsche, *Teilchen und Kerne* [6]

In den drei Bänden von Bodenstein, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung* [7, 8, 9] sind 100 relevante Experimente bis etwa 1970 beschrieben und erläutert. Schließlich werden in Hering, *Angewandte Kernphysik* [10] wichtige praktische Anwendungen dargestellt.

KAPITEL I

Eigenschaften von Atomkernen

-
- I.1 Bausteine von Atomkernen 2
 - I.2 Größe des Atomkerns 4
 - I.2.1 Klassische Streutheorie 4
 - I.2.2 „Rutherford'sches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns 8
 - I.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen 12
 - I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen 14
 - I.3 Masse des Atomkerns 18
 - I.3.1 Grundlagen der Massenmessung 18
 - I.3.2 Bindungsenergie 19
 - I.3.3 Separationsenergien 21
 - I.4 Quantenmechanische Eigenschaften des Atomkerns 21
 - I.4.1 Spin 21
 - I.4.2 Parität 22
 - I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente 22
 - I.5 Eigenschaften der leichtesten Atomkerne 25
 - I.5.1 Praktische Einheiten in der Kernphysik 25
 - I.5.2 $Z = 1, N = 0$: Proton (p) 26
 - I.5.3 $Z = 0, N = 1$: Neutron (n) 26
 - I.5.4 $Z = 1, N = 1$: Deuteron (${}^2\text{H} \equiv d$) 27
 - I.5.5 Schwerere Kerne 27
-

In diesem ersten Kapitel werden die grundlegenden Charakteristika von Atomkernen gesammelt, beginnend mit deren Zusammensetzung (Abschn. I.1). Danach fokussiert sich die Diskussion erstens auf klassische Aspekte des Kerns — Radius (Abschn. I.2) und Masse (Abschn. I.3) —, wobei die experimentellen Methoden zu deren Bestimmung kurz diskutiert werden. Dagegen befasst sich Abschnitt I.4 mit eher quantenmechanischen Eigenschaften. Schließlich werden die leichtesten stabilen Atomkerne in Abschn. I.5 kurz dargestellt.

Das ganze Kapitel bleibt eher phänomenologisch und beschränkt sich darauf, die Eigenschaften zu beschreiben, ohne irgendein Modell zu ihrer Erklärung in Betracht zu ziehen. Solche Modelle werden im Kap. II diskutiert.

I.1 Bausteine von Atomkernen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der wahrscheinlich schon bekannten Zusammensetzung von Atomkernen. Dazu werden ein paar wichtige Begriffe definiert und Notationen eingeführt.

Vom Altertum bis zum 19. Jahrhundert haben zuerst Philosophen, danach Naturwissenschaftler die Atomtheorie postuliert und allmählich experimentell nachgewiesen (für eine kurze Übersicht dieser historischen Entwicklung, s. den ersten Vortrag von W. Heisenberg^(a) in Ref. [11]). Zwischen

^(a)W. HEISENBERG, 1901–1976

der Entdeckung des Elektrons durch J. J. Thomson^(b) in 1897 und der Entdeckung des Neutrons durch J. Chadwick^(c) in 1932 (vgl. Experiment 11 in Ref. [7]) hat sich dann ein genaueres Bild des Atoms kristallisiert: In einem Atom ist die Hülle negativ geladener Elektronen (Symbol: e^-) um einen positiv geladenen Atomkern⁽ⁱ⁾ gebunden, der fast die gesamte Masse des Atoms trägt. Wiederum besteht der Atomkern aus zwei Arten von Bausteinen, und zwar aus *Protonen* (Symbol: p) und *Neutronen* (Symbol: n), die zusammen als *Nukleonen*⁽ⁱⁱ⁾ (Symbol: N) bezeichnet werden.

Bemerkungen:

* Im Folgenden wird das Symbol N nur selten für Nukleon verwendet, um die mögliche Verwechslung mit der Neutronenzahl [Gl. (I.1a)] zu vermeiden.

* Hier wurde Nukleon nur als Sammelbegriff für Proton und Neutron verwendet, wie meistens der Fall ist. Manchmal hat Nukleon einen präziseren Sinn.

* Bekannterweise sind das Proton und das Neutron keine Elementarteilchen, sondern sie bestehen aus Quarks — die nach dem heutigen Wissen elementar sind — und Gluonen — die die starke Wechselwirkung zwischen Quarks vermitteln. Somit stellt sich die Frage, ob man den Atomkern als gebundenen Zustand von Quarks betrachten sollte. Für manche Probleme der Kernphysik — grob gesagt, solange die typisch ausgetauschten Energien kleiner als etwa 100 MeV bleiben — stellen jedoch die Nukleonen die geeigneten Freiheitsgrade dar.

Genauso wie ein chemisches Element durch die Anzahl seiner Protonen charakterisiert wird, lässt sich ein gegebener Atomkern, auch *Nuklid*⁽ⁱⁱⁱ⁾ genannt,⁽¹⁾ durch die Anzahlen seiner Bestandteile gekennzeichnet, und zwar durch

Ordnungs-, Kernladungs-^(iv) oder *Protonenzahl* Z : Anzahl der Protonen im Atomkern;
Neutronenzahl N : Anzahl der Neutronen im Atomkern;
Massen-^(v) oder *Nukleonenzahl* A : gesamte Anzahl der Protonen und Neutronen im Kern.

(I.1a)

Natürlich gilt die triviale Gleichung

$$Z + N = A. \quad (\text{I.1b})$$

Mithilfe dieser Zahlen lautet die übliche Schreibweise für ein Nuklid

$${}^A_Z\text{X}_N \quad \text{oder einfacher} \quad {}^A_Z\text{X} \quad \text{oder} \quad {}^A_Z(), \quad (\text{I.1c})$$

wobei X das „chemische“ Symbol des Periodensystems für das Element mit Ordnungszahl Z ist. Wird dieses Symbol verwendet, so ist die Ordnungszahl Z schon festgelegt: somit kann sie weggelassen werden. Beispielsweise bezeichnen ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ und ${}^{208}\text{Pb}$ das gleiche Nuklid mit 82 Protonen und 126 Neutronen.

Fast alle Kerne können angeregt werden, wie Atome, so dass es manchmal verschiedene Nuklide mit denselben Z und N und einer Lebensdauer größer als 10^{-9} s existieren kann, sogenannte *Isomere*,^(vi) die unterschiedliche Eigenschaften besitzen.⁽²⁾

⁽¹⁾ Als „Nuklid“ wird manchmal — wie z.B. durch die IUPAC, vgl. die **entsprechende Seite** in der online-Version des „Gold Book“ — explizit ein elektrisch neutrales Objekt definiert, d.h. nicht nur der Atomkern sondern das ganze Atom einschließlich der Elektronen. Dahingegen werden in der Liste der Energiezustände solcher Nuklide die atomaren Anregungszustände nicht berücksichtigt, was dem Autor dieser Zeilen inkonsequent aussieht. Hiernach wird Nuklid Synonym für Atomkern sein.

⁽²⁾ Die untere Grenze der Lebensdauer ist natürlich rein konventionell und hängt vom Autor ab. Dazu beschränken einige die Bezeichnung „Isomer“ auf angeregte Zustände.

(i) nucleus (ii) nucleon (iii) nuclide (iv) atomic number, nuclear charge number (v) (atomic) mass number (vi) nuclear isomer

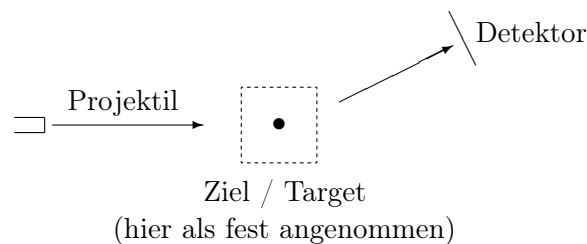
^(b) J. J. THOMSON, 1856–1940 ^(c) J. CHADWICK, 1891–1974

Atomkerne mit gleicher Protonenzahl und unterschiedlichen Neutronenzahlen werden *Isotope* genannt, z.B. ^{12}C und ^{14}C . Nuklide mit derselben Neutronenzahl und unterschiedlichen Protonenzahlen werden *Isotone* genannt, z.B. ^{14}C und ^{16}O mit je 8 Neutronen. Schließlich werden Nuklide mit der gleichen Massenzahl und unterschiedlichen Anzahlen von Protonen (und daher auch von Neutronen) werden *Isobare* genannt, z.B. ^{14}C und ^{14}N .^(vii)

Die bekannten Nuklide⁽³⁾ werden in einer *Nuklidkarte*^(viii) eingetragen, die ihre wichtigen Eigenschaften zusammenfasst: Stabilität bzw. Halbwertszeit für instabile Atomkerne (vgl. Kap. Radioaktivität); Häufigkeit der unterschiedlichen Isotope für natürlich vorkommende Nuklide; Zerfallsarten, mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten falls der Atomkern verschiedenen Zerfallskanälen folgen kann (vgl. Kap. Radioaktivität). Frei zugängliche Nuklidkarten mit zusätzlichen Informationen findet man im Internet z.B. auf <http://www.nndc.bnl.gov/nudat3/> oder <https://www-nds.iaea.org/livechart/>.

1.2 Größe des Atomkerns

Zur experimentellen Messung der Größe eines Atomkerns werden meistens Streuexperimente^(ix) durchgeführt: Dabei werden leichtere Projektilteilchen, deren Eigenschaften bekannt sind, an einem zu charakterisierenden Ziel (auch Target genannt) beschleunigt. Nach der Wechselwirkung zwischen Projektilen und Target werden die ersteren detektiert, wobei Informationen über das Target sowie über die eigentliche Art der Wechselwirkung können gewonnen werden.



In diesem Abschnitt werden zunächst einige Begriffe und Ergebnisse der Streutheorie dargestellt, wobei die Diskussion auf eine klassische (d.h. nicht-quantenmechanische) Beschreibung beschränkt wird (§ I.2.1). Diese Resultate werden in § I.2.2 aufgewandt auf den Fall der Streuung an dem Coulomb^(d)-Potential, erzeugt durch eine punktförmige elektrische Ladung, entsprechend den Bedingungen des historischen Rutherford'schen^(e) Streuexperimentes. Die Verallgemeinerung des Formalismus auf die Streuung an ausgedehnten Zielen wird in § I.2.3 diskutiert. Schließlich werden in § I.2.4 die experimentell gewonnenen Ergebnisse zur Größe von Atomkernen vorgestellt.

1.2.1 Klassische Streutheorie

Die Streuprozesse, die hiernach von Interesse sein werden, sind elastisch, d.h. die zwei Teilnehmer im Anfangszustand bleiben nach dem Stoß unverändert. Dazu wird das Potential, das die relevante Wechselwirkung vermittelt, nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen. Bekannterweise lässt sich dann das Zwei-Körper-Problem nach Einführung der Relativkoordinate und der reduzierten Masse als Ein-Körper-Problem beschreiben, und zwar als die Streuung eines Teilchens an einem festen *Streuzentrum*.^(x) Konventionell wird das Projektilteilchen als punktförmig angenommen. Im für das Folgende relevanten Fall ist das Zieleteilchen — entsprechend dem zu untersuchenden

⁽³⁾ Im Oktober 2025 sind mehr als 4000 Nuklide, inklusive Isomere, bekannt, darunter etwa 3300 „wohl charakterisiert“ sind.

^(vii) isotope / isotone / isobar ^(viii) table/chart of nuclides ^(ix) scattering experiment ^(x) scattering center

^(d) C.-A. COULOMB, 1736–1806 ^(e) E. RUTHERFORD, 1871–1937

Atomkern — viel schwerer als das Projektil, so dass die reduzierte Masse fast gleich der Masse des letzteren ist, während das Streuzentrum mit der Position des Atomkerns übereinstimmt.

I.2.1 a Definitionen

In der klassischen Mechanik folgt ein Teilchen in seiner Bewegung einer Bahnkurve, mit deren Hilfe sich einige charakteristischen Größen definieren lassen (vgl. Abb. I.1). Die asymptotischen

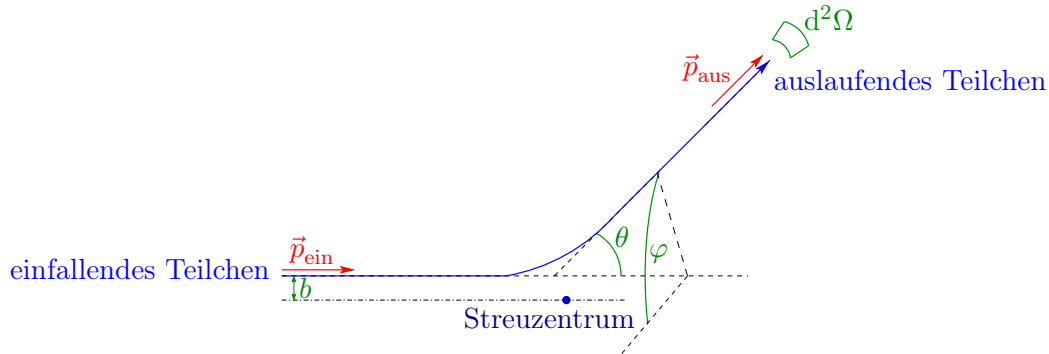


Abbildung I.1 – Darstellung einiger Größen zur Charakterisierung eines klassischen Streuprozesses.

Richtungen der Flugbahn vor dem Stoß („einfallendes Teilchen“ mit Impuls $\vec{p}_{\text{ein}}$) und nach dem Stoß („auslaufendes Teilchen“ mit Impuls $\vec{p}_{\text{aus}}$) definieren die *Streuebene*.^(xi) Der Winkel θ zwischen $\vec{p}_{\text{ein}}$ und $\vec{p}_{\text{aus}}$, d.h. um den das einfallende Teilchen abgelenkt wird, heißt *Streuwinkel* oder auch *Ablenkwinkel*.^(xii) Man sollte darauf aufpassen, dass der Streuwinkel vom Bezugssystem abhängt, in dem die Streuung untersucht wird.

Führt man eine Referenzrichtung senkrecht zur (experimentell bekannten!) Flugrichtung der einfallenden Teilchen ein, so wird der Impuls eines auslaufenden Teilchens neben θ auch durch einen Azimutwinkel φ charakterisiert. Dann kennzeichnen θ und φ die auslaufende Flugrichtung Teilchens vollständig. Echte Detektoren decken eine endliche Fläche, entsprechend endlichen θ - und φ -Intervallen bzw. einem Raumwinkel Ω . Im idealen Fall eines infinitesimal kleinen Detektors ist das zugehörige Raumwinkelement^(xiii) $d^2\Omega$ durch

$$d^2\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{I.2})$$

gegeben.

In klassischer Streutheorie definiert man noch den *Stoßparameter*^(xiv) b , entsprechend dem minimalen Abstand des einfallenden punktförmigen Teilchens zum Streuzentrum für den fiktiven Fall, wo es sich geradlinig bewegen würden, statt abgelenkt zu werden, d.h. bei ausgeschalteter Wechselwirkung.

Berücksichtigt man auch den Azimutwinkel der Flugrichtung des einfallenden Teilchens, so kann man den Stoßparameter als Vektor betrachten: $\vec{b}$. Der Zweck der klassischen Streutheorie ist, die Beziehung zwischen den für auslaufende Teilchen charakteristischen Größen (θ, φ) und dem Stoßparameter $\vec{b}$, d.h. die Funktionen $(\theta(\vec{b}), \varphi(\vec{b}))$, festzulegen.

Bemerkungen:

* In der Quantenmechanik, wo Teilchen keiner Bahnkurve folgen, verliert der Begriff des Stoßparameters an Bedeutung.

* Eigentlich ist der vektorielle Stoßparameter $\vec{b}$ völlig durch seinen Betrag und einen Winkel charakterisiert, und zwar durch den (Polar)Winkel in einer Ebene senkrecht zur Flugrichtung der einfallenden Teilchen. Es handelt sich somit um einen „nur“ zweidimensionalen Vektor.

^(xi) scattering plane ^(xii) scattering angle, deflection angle ^(xiii) differential solid angle ^(xiv) impact parameter

* Wenn das Projektilteilchen nicht punktförmig ist, ist der Stoßparameter der minimale Abstand zwischen dessen Schwerpunkt und dem Streuzentrum.

Zur Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit für bestimmte Prozesse werden Wirkungsquerschnitte benutzt. Somit charakterisiert der *differentielle Wirkungsquerschnitt*^(xv) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Streuprozess die gestreuten Teilchen in ein Raumwinkelement $d^2\Omega$ um eine Richtung (θ, φ) emittiert werden (vgl. Abb. I.2).

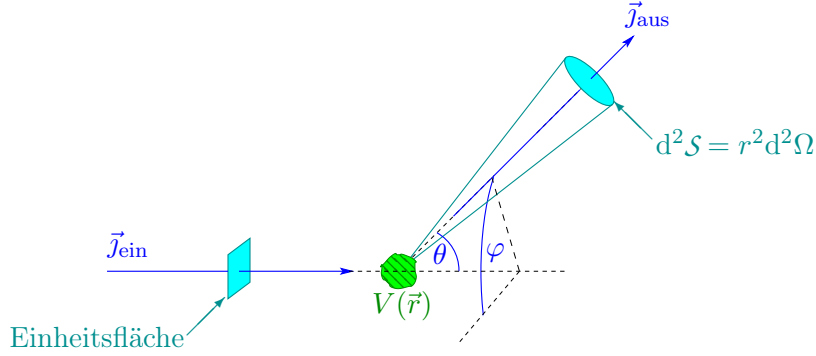


Abbildung I.2 – Darstellung einiger Größen zur Definition (I.4) des differentiellen Wirkungsquerschnitts.

Genauer wird $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi)$ definiert durch

$$d^2\sigma = \frac{\text{Anzahl der pro Zeiteinheit in } d^2S \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit}}.$$

Zum Ausdrücken der Anzahl d^3N_{ein} bzw. d^3N_{aus} der in einem Zeitintervall dt auf eine Fläche d^2S' einfallenden bzw. durch eine Fläche d^2S ausfliegenden Teilchen führt man den einfallenden bzw. auslaufenden Teilchenfluss^(xvi) $\vec{j}_{\text{ein}}$ bzw. $\vec{j}_{\text{aus}}$ ein. Es wird daran erinnert, dass ein Teilchenfluss die Anzahl der in der Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche fliegenden Teilchen darstellt. Dann gelten

$$d^3N_{\text{ein}} = |\vec{j}_{\text{ein}}| d^2S' dt \quad \text{bzw.} \quad d^3N_{\text{aus}} = |\vec{j}_{\text{aus}}| d^2S dt = |\vec{j}_{\text{aus}}| r^2 d^2\Omega dt, \quad (\text{I.3})$$

wobei r den Abstand von d^2S vom Streuzentrum bezeichnet, und damit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{j}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| r^2}{|\vec{j}_{\text{ein}}|}. \quad (\text{I.4})$$

Bemerkung: Die Teilchenzahlerhaltung für die Projektilteilchen hat zwei einfache Folgen, und zwar die Proportionalität $|\vec{j}_{\text{aus}}| \propto |\vec{j}_{\text{ein}}|$ — je mehr Teilchen am Target stoßen, desto mehr gestreut werden — und $|\vec{j}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| \propto 1/r^2$ — entsprechend der Erhaltung der Anzahl der in ein gegebenes Raumwinkelement emittierten Teilchen. Somit ist die Definition (I.4) in der Tat unabhängig vom Abstand r sowie vom absoluten einfallenden Teilchenfluss.

Die Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitt über den ganzen Raumwinkel ergibt den *totalen (elastischen) Wirkungsquerschnitt*:^(xvii)

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) d^2\Omega. \quad (\text{I.5})$$

^(xv) differential cross section ^(xvi) incoming / outgoing particle (number) flux ^(xvii) total elastic cross section

Klassisch handelt es sich dabei um die (effektive) Schnittfläche des Ziels aus der Sicht eines einfallenden Teilchens, wie sich am Beispiel der Streuung eines klassischen punktförmigen Teilchens an einer harten Kugel illustrieren lässt.

Bemerkungen:

* Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche; die typische Einheit in der Kern- und Teilchenphysik ist das Barn, $1 \text{ b} \equiv 10^{-28} \text{ m}^2$, sowie seine Teile (mb, μb , nb, usw.).

* In der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts treten nur die *gestreuten* Teilchen auf. In der Vorwärtsrichtung $\theta = 0$ können diese nicht von den durchlaufenden Teilchen experimentell unterschieden werden, so dass der zugehörige Vorwärtswirkungsquerschnitt nicht direkt messbar ist, sondern nur durch Extrapolation des Wirkungsquerschnitts bei $\theta \neq 0$. Dazu können Detektoren nie den ganzen 4π -Raumwinkel um einen Streuzentrum decken. Somit ist der totale Wirkungsquerschnitt mehr ein theoretischer Begriff als eine messbare Größe.

I.2.1 b Geometrische Betrachtungen

Im Folgenden wird angenommen, dass das für die Streuung verantwortliche Potential kugelsymmetrisch ist. Dann ist der Azimutwinkel des auslaufenden Teilchens gleich demjenigen vor der Streuung, d.h. φ ist auch der Polarwinkel von $\vec{b}$ in der Ebene senkrecht zu $\vec{p}_{\text{ein}}$, während der Streuwinkel θ nur vom Betrag b abhängt. Somit braucht man nur die Abhängigkeit $\theta(b)$. Im Prinzip hängt θ auch von der Geschwindigkeit bzw. kinetischen Energie der Projektile ab; hier wird angenommen, dass alle einfallenden Teilchen dieselbe kinetische Energie haben.

Im nächsten Abschnitt werden wir eine Kraft zwischen Projektil und Ziel betrachten, deren Stärke mit dem relativen Abstand abnimmt. Infolgedessen wird der Streuwinkel θ mit steigendem Stoßparameter b kleiner, d.h. $d\theta/db < 0$.

Sei ein Flächenelement d^2S' , abgegrenzt durch die Stoßparameter b und $b + db$ mit $db > 0$ und die Azimutwinkel φ und $\varphi + d\varphi$: $d^2S' = b db d\varphi$. Die auf d^2S' einfallenden Teilchen werden alle in ein Raumwinkelement $d^2\Omega$ gestreut, das bei dem Abstand r einer Fläche d^2S entspricht: geometrisch steht $d^2\Omega$ in eindeutiger Beziehung zu d^2S' , vgl. Abb. I.3. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $d\theta$ negativ für $db > 0$ ist, lautet die Beziehung (I.2) einfach $d^2S = -r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

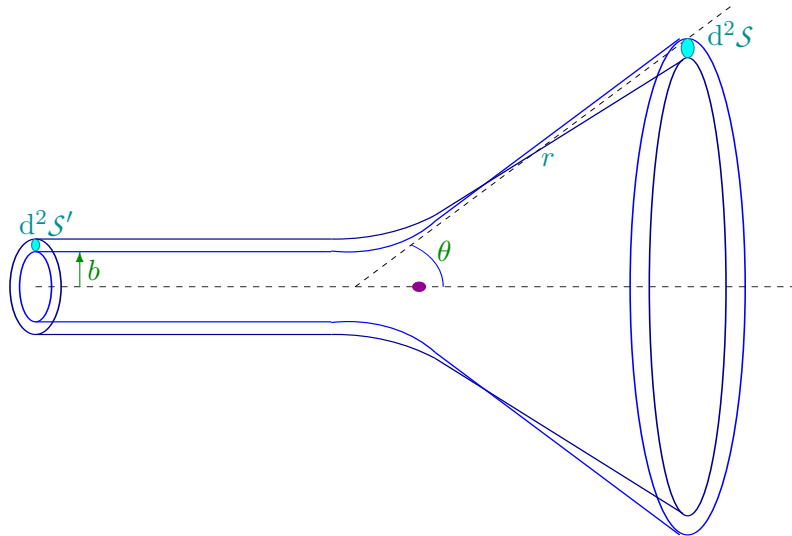


Abbildung I.3 – Geometrischer Zusammenhang zwischen den durch die Projektilteilchen vor bzw. nach der Streuung durchgeflogenen Flächenelementen, d^2S' bzw. d^2S .

Da das Streuprozess elastisch ist, und somit die Teilchenzahl erhält, sind die Anzahlen der in dt durch die Flächen d^2S und d^2S' fliegenden Teilchen gleich. Unter Nutzung der Beziehungen (I.3)

ergibt sich dann

$$|\vec{j}_{\text{ein}}| b db d\varphi = -|\vec{j}_{\text{aus}}(r, \theta, \varphi)| r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Nach einfacher Umschreibung dieser Gleichung und Einsetzen in die Definition (I.4) erhält man die Beziehung

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}, \quad (\text{I.6})$$

unabhängig von der spezifischen Wechselwirkung zwischen Projektil und Ziel. Somit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt völlig durch die Funktion $b(\theta)$ bzw. durch die Umkehrfunktion $\theta(b)$ und ihre Ableitung bestimmt.

1.2.2 „Rutherfordsches“ Streuexperiment und Entdeckung des Atomkerns

Ein wichtiges Beispiel von Anwendung der klassischen Streutheorie ist die elastische Streuung von elektrischen Punktladungen q mit Masse m an einem punktförmigen Ziel mit der elektrischen Ladung Q und einer sehr viel größeren Masse.

In diesem Fall herrscht zwischen den an den Stoß teilnehmenden Teilchen die elektromagnetische Wechselwirkung. Genauer unterliegen die Projektile der Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{I.7})$$

mit dem Abstand r zum Ziel und dem radialen Einheitsvektor $\vec{e}_r$ in Richtung vom Ziel zum Projektil.

Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze — hier Energie und Drehimpuls⁽⁴⁾ — und Anwendung des Newtonschen^(f) Gesetzes findet man die Beziehung zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel θ

$$b(\theta) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (\text{I.8})$$

wobei v der Betrag der asymptotischen Geschwindigkeit des Projektils ist.

Sei ϕ der (Polar-)Winkel zwischen der asymptotischen Flugrichtung des Projektils und $\vec{e}_r$. Die Position $\vec{r}(t)$ des Projektils zur Zeit t wird von r und ϕ charakterisiert und seine Geschwindigkeit lautet

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{e}_r + r(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\phi,$$

wobei $\vec{e}_\phi$ senkrecht auf $\vec{e}_r$ ist (vgl. Abb. I.4).

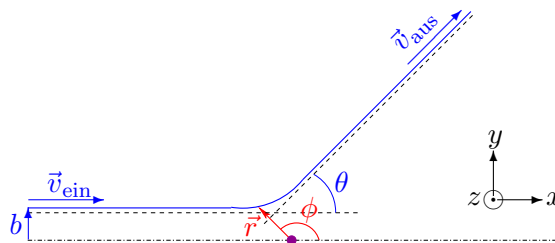


Abbildung I.4 – Koordinatensysteme für die Beschreibung der Streuung.

Im „Anfangszustand“ vor dem Streuprozess ($t = -\infty$) ist das Projektil bei $r = \infty$, $\phi = \pi$, mit Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{ein}} = |\vec{v}_{\text{ein}}| \vec{e}_x$. Im Endzustand ($t = +\infty$) gelten $r = \infty$, $\phi = \theta$, und $\vec{v}_{\text{aus}} = |\vec{v}_{\text{aus}}|(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$.

⁽⁴⁾ Wegen der Annahme, dass das Zielteilchen unendlich schwer ist, und damit fest bleibt, lässt sich die Impulserhaltung nicht gut ausdrücken.

^(f) I. NEWTON, 1642–1727

Die Erhaltung der gesamten Energie $\frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{ein}}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{aus}}^2$ — im Unendlichen verschwindet die Coulombsche potentielle Energie — gibt sofort $|\vec{v}_{\text{ein}}| = |\vec{v}_{\text{aus}}| \equiv v$.

Wiederum lautet der Bahndrehimpuls

$$\vec{L}(t) = m\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = mr(t)^2 \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_z,$$

so dass seine Erhaltung zwischen dem Anfangszustand $[\vec{L}(-\infty) = -mb|\vec{v}_{\text{ein}}|\vec{e}_z = -mbv\vec{e}_z]$ und dem Zeitpunkt t führt zur Gleichung

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{bv}{r(t)^2}. \quad (\text{I.9})$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung $m d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_{\text{Coul.}}$. Nach Projektion auf die x -Achse kommt für die x -Komponente $v_x(t)$ der Geschwindigkeit $d\vec{r}(t)/dt$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mr(t)^2} \cos\phi(t).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gl. (I.9), so ergibt sich

$$\frac{dv_x}{d\phi} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mbv} \cos\phi,$$

d.h. die Bahnkurve wird nicht mehr durch die Zeit t , sondern durch den Polarwinkel ϕ parametrisiert. Die Integration von $\phi = \pi$, entsprechend $v_x = v$, bis $\phi = \theta$, d.h. $v_x = v \cos\theta$, gibt

$$v(\cos\theta - 1) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mbv} \sin\theta,$$

d.h.

$$b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta},$$

was unter Verwendung üblicher trigonometrischer Identitäten zur Gl. (I.8) führt.

Nach Ableiten von $b(\theta)$ [Gl. (I.8)] liefert Gl. (I.6) den differentiellen Wirkungsquerschnitt für das Problem und zwar

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2}mv^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10a})$$

Führt man die kinetische Energie des Projektils $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ ein, so ergibt sich die sogenannte *Rutherfordsche Streuformel*

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}. \quad (\text{I.10b})$$

Tatsächlich hat E. Rutherford diese Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts benutzt, um die Ergebnisse von durch H. Geiger^(g) und E. Marsden^(h) durchgeführten Experimenten [12] zu interpretieren.⁽⁵⁾ Die charakteristische $(\sin\frac{\theta}{2})^{-4}$ -Abhängigkeit in Gl. (I.10b) stimmt nämlich mit der Verteilung des Streuwinkels gemessen in der Streuung von α -Teilchen — d.h. ${}^4\text{He}$ -Kerne — an dünnen Gold- bzw. Silber-Folien überein, vgl. Abb. I.5.

Dabei hat Rutherford argumentiert, dass jedes α -Teilchen dank der Dünne der Targets in den meisten Fällen nur an einem einzelnen Atomkern stößt. Somit wird „Vielfachstreuung“^(xviii) vermieden, was die Modellierung vereinfacht. Der Stoß zwischen einem α -Projektil und einem Gold- bzw. Silber-Atomkern wurde dann als elektromagnetische Streuung einer Punktladung $q = ze$ mit $z = 2$ an einer Punktladung $Q = Ze$ mit $Z = 79$ bzw. $Z = 47$ modelliert, wobei $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ die Elementarladung ist. Dementsprechend sollte der Wirkungsquerschnitt (I.10b) für Stöße an Gold größer als für Stöße an Silber sein, was auch experimentell gefunden wurde.

⁽⁵⁾Die Experimente sind in Ref. [7] Experiment 6 beschrieben.

^(xviii)multiple scattering

^(g)H. GEIGER, 1882–1945 ^(h)E. MARSDEN, 1889–1970

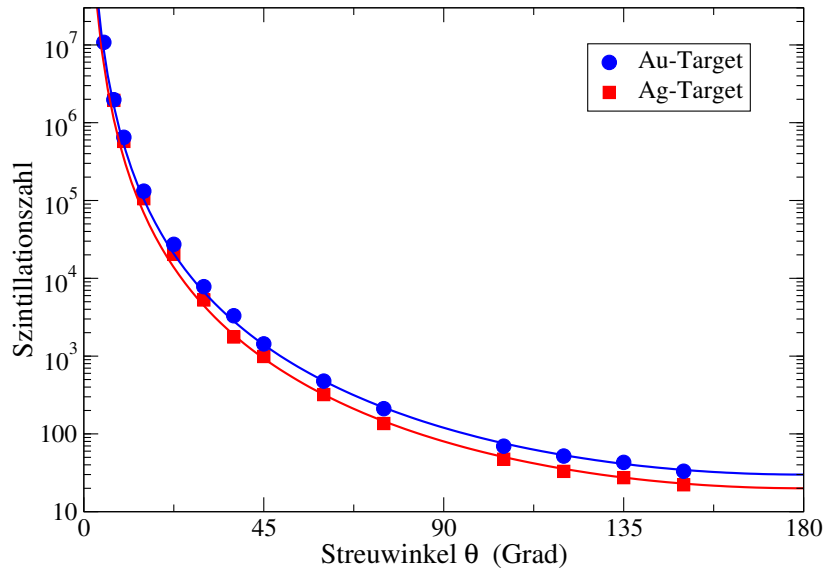


Abbildung I.5 – Winkelverteilung elastisch gestreuter α -Teilchen an Gold bzw. Silber — Daten aus dem historischen Artikel von Geiger und Marsden [12] —, verglichen mit den entsprechenden Rutherford'schen Wirkungsquerschnitten, Gl. (I.10b).

Einfache Überlegungen liefern den kleinsten Abstand — bei gegebener kinetischer Energie des Projektils — zwischen Projektil und Streuzentrum in einem Stoß. Offensichtlich wird dieses Minimum für Stöße mit verschwindendem Stoßparameter $b = 0$ erreicht, d.h. wenn das Projektil direkt auf das Ziel fliegt. Die zugehörige Bahnkurve wird in Abb. I.6 dargestellt: indem sich das Projektil dem Streuzentrum nähert, wird es durch die Coulomb-Abstoßung abgebremst, bis seine Geschwindigkeit v_x null wird und sich ihr Vorzeichen ändert, was genau im Punkt des kleinsten Abstands $r_{\min}(b = 0)$ passiert. Danach fliegt das Projektil zurück, entsprechend einem Streuwinkel $\theta = \pi$.

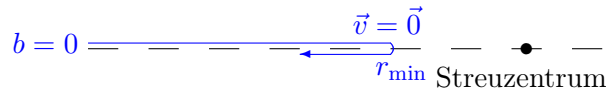


Abbildung I.6 – Flugbahn eines Projektilteilchens mit Stoßparameter $b = 0$.

Drückt man die Energieerhaltung $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r) + E_{\text{kin}}(r)$ für das Projektilteilchen aus, so ist die Gesamtenergie lange vor oder nach dem Stoß $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}}(r = \infty)$ und im Punkt $\vec{r}_{\min}(b = 0)$ des minimalen Abstands $E_{\text{tot}} = E_{\text{Coul}}(r_{\min}(b = 0))$. Unter Berücksichtigung der Form der potentiellen Energie im Coulomb-Feld $E_{\text{Coul}}(r) = qQ/(4\pi\epsilon_0 r)$ kommt

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}(b=0)} = E_{\text{kin}}(r = \infty). \quad (\text{I.11})$$

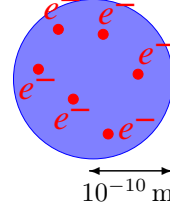
Im Geiger–Marsden-Experiment galten $q = 2e$, $Q = 79e$ (für Streuung an Au-Atomen) und für die kinetische Energie der α -Teilchen $E_{\text{kin}}(\infty) = 7,7 \text{ MeV}$. Diese Werte führen zu einem minimalen Abstand $r_{\min}(b=0) \simeq 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 30 \text{ fm}$.⁽⁶⁾

Aus der Übereinstimmung zwischen den experimentellen Ergebnissen und seiner Modellierung konnte Rutherford schließen, dass positive Ladungsträger in Gold-Atomen sich in einem kleinen Bereich mit Radius kleiner als etwa 30 fm befinden. Dazu konzentriert sich fast die ganze Atommasse in diesem Bereich, dessen elektrische Ladung Ze genau gleich das Negative deren der Z Elektronen des Atoms ist. Anhand dieser Ergebnisse hat Rutherford sein planetarisches Atommodell vorgeschlagen [13], in welchem Atome aus einem kleinen positiv geladenen Kern und einer Elektronenhülle mit typischem Radius von etwa 10^{-10} m bestehen.

⁽⁶⁾Die für die Kernphysik günstigen Einheiten und ihr Zusammenhang zu denen des SI-Systems werden in § I.5.1 zusammengefasst.

Die charakteristische Größe von Atomen ließ sich schon früher abschätzen. Laut dem Gesetz von Avogadro⁽ⁱ⁾ (1811) enthalten Gase bei gegebenen Drucken und Temperaturen in gleichen Volumina die gleiche Teilchenzahl. In 1865 konnte Loschmidt^(j) die Anzahl der in einer Volumeneinheit enthaltenen Molekülen — oder äquivalent die Loschmidt- / Avogadro-Zahl — ermitteln und somit für Atome eine Größenordnung von ca. 10^{-10} m berechnen.

Nach seiner Entdeckung des Elektrons (1897) schlug J. J. Thomson^(k) in 1904 sein „plum-pudding model“ des Atoms vor, in dem sich die Elektronen — ähnlich den Rosinen in einem Teig — in einem kontinuierlichen Medium positiver Ladung homogen verteilen, das so groß wie das ganze Atom ist. Die Masse eines solchen Atoms sammelt sich nicht in einem geringen Bereich, so dass das Modell durch die Geiger–Marsden-Experimente widerlegt war.



Bemerkungen:

* Die Rutherford-Streufel (I.10b) lässt sich günstig mithilfe der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante $\alpha \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ umschreiben, indem die Ladungen q und Q durch ze und Ze ersetzt werden. Im System „natürlicher Einheiten“ der theoretischen Physik, in dem $\hbar = c = 1$, gilt somit

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \left(\frac{zZ\alpha}{E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4}.$$

* Die Rutherfordsche Streufel führt zu einem unendlichen totalen Wirkungsquerschnitt: für kleine Streuwinkel θ ist $\sin \frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2}$, während $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, so dass das Integral in Gl. (I.5) wie θ^{-2} divergiert. Der Grund dafür ist die „unendliche Reichweite“ des durch den isolierten Atomkern erzeugten Coulomb-Potentials.⁽⁷⁾

In einem Atom schirmen die negativ geladenen Elektronen die positive Ladung des Kerns für Abstände größer als die typische Größe des Atoms ab. Diese Abschirmung des Potentials führt zu einer Änderung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für kleine Streuwinkel, woraus $d^2\sigma/d^2\Omega$ nicht mehr divergiert. Die entsprechende Änderung ist für übliche Energien in der Kernphysik vernachlässigbar.

Wiederum war die kinetische Energie der α -Teilchen in den Geiger–Marsden-Experimenten hoch genug, damit sie tief in die Atome eindringen und die „nackten“ Atomkerne sehen konnten. Der kleinste Abstand $r_{\min}(b)$ der Bahn des α -Teilchens vom Kern beträgt nämlich

$$r_{\min}(b) = \frac{1}{2} \left[r_{\min}(b=0) + \sqrt{r_{\min}(b=0)^2 + 4b^2} \right], \quad (\text{I.12})$$

wobei $r_{\min}(b=0)$ durch Gl. (I.11) gegeben ist, kann wie folgt berechnet werden. Dabei kann der Stoßparameter durch den Streuwinkel ausgedrückt werden, vgl. Gl. (I.8), die sich leicht umschreiben lässt als $b(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \cot \frac{\theta}{2}$, woraus

$$r_{\min}(\theta) = \frac{1}{2} r_{\min}(b=0) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \quad (\text{I.13})$$

folgt. Auch für den kleinsten durch Geiger und Marsden gemessenen Streuwinkel ($\theta = 5^\circ$) kommen α -Teilchen weniger als 500 fm nah am Kern, d.h. tief ins Innere des Atoms.

Beweis der Beziehung (I.12):

folgt aus der Erhaltung des Bahndrehimpulses: $L(\infty) = L(r_{\min})$.

* Die oben dargestellte Berechnung von Rutherford erfolgte im Rahmen der klassischen Mechanik. Im Nachhinein stellt sich die Frage, ob eine quantenmechanische Beschreibung des Streuprozesses nicht sinnvoller wäre. In diesem besonderen Fall ergibt jedoch eine solche Berechnung dank einigen Umständen dasselbe Ergebnis (in der „Bornschen^(l) Näherung“, d.h. in Störungsrechnung zur erster

⁽⁷⁾ ... was technisch bedeutet, dass $rV(r)$ für $r \rightarrow \infty$ nicht gegen Null geht.

⁽ⁱ⁾ A. AVOGADRO, 1776–1856 ^(j) J. J. LOSCHMIDT, 1821–1895 ^(k) J. J. THOMSON, 1856–1940 ^(l) M. BORN 1882–1970

Ordnung) wie die klassische Beschreibung:

- Erstens war im historischen Rutherford'schen Streuexperiment die mit dem α -Teilchen assoziierte de Broglie^(m)-Wellenlänge $\lambda = \hbar c / \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$ viel kleiner als der kleinste Abstand zwischen Projektil und Ziel: für $E_{\text{kin}} = 7,7 \text{ MeV}$ ist $\lambda \simeq 1 \text{ fm} \ll r_{\text{min}}$, so dass die „wellenartige“ Natur der α -Teilchen hier keine Rolle spielt.
- Dazu hat das α -Teilchen den Spin 0: für die Streuung spinbehafteter Teilchen nimmt der Wirkungsquerschnitt eine (leicht) unterschiedliche Form an — obwohl der Unterschied nur für relativistische Projektile eine Rolle spielt.

Die Verallgemeinerung der Rutherford-Streuformel auf die elastische Streuung von relativistischen Elektronen (Masse m_e , Ladung $q = -e$, Spin $\frac{1}{2}$) an einem Spin-0-Atomkern mit Z Protonen ist unter Vernachlässigung des Rückstoßes des Kerns durch die Mott⁽ⁿ⁾-Streuformel gegeben:

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) \right|_{\text{Mott}} = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 m_e^2 v^2} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{\theta}{2})^4} \left(m_e^2 + \frac{\gamma^2 m_e^2 v^2}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (\text{I.14a})$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ der Lorentz^(o)-Faktor des Elektrons im Ruhesystem des Kerns ist.⁽⁸⁾ Nach einigen Umformungen lautet dies noch

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) \right|_{\text{Mott}} = \left. \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi) \right|_{\text{Rutherford}} \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{I.14b})$$

Für ultrarelativistische Elektronen ($v \simeq c$) wird dieser differentielle Wirkungsquerschnitt im Limes $\theta \rightarrow \pi$ „klein“, d.h. die Rückwärtsstreuung solcher Elektronen am Kern wird stark unterdrückt. Im nicht-relativistischen Fall $v/c \ll 1$ ergibt sich die Rutherford-Streuformel wieder.

Aus den Geiger–Marsden-Experimenten lässt sich nicht auf eine endliche Größe des Atomkerns schließen, da die Ergebnisse mit denen für Streuung an einem punktförmigen Ziel übereinstimmen. Somit ist nur bekannt, dass der Kernradius kleiner als der kleinste Abstand r_{min} zwischen α -Teilchen und Kernen ist.

1.2.3 Streuung an ausgedehnten Verteilungen

Die Beziehung (I.11) weist darauf hin, wie Information über die Ausdehnung des Atomkerns kann gewonnen werden. Somit kann man entweder Kerne mit kleinerer Ladungszahl $Z = Q/e$ verwenden, um die Coulomb-Abstoßung zu verringern, oder Projektile mit höherer kinetischer Energie benutzen. In beiden Fällen kann das Projektil näher am Kern kommen und den Einfluss eines nicht-verschwindenden Radius spüren, woraus eine Abweichung von der Rutherford'schen Streuformel folgt.

Sei zunächst angenommen, dass die an Atomen gestreuten Projektile mit dem Atomkern nur elektromagnetisch wechselwirken. Im Nachhinein ist bekannt, dass dies nicht der Fall für α -Teilchen ist, die auch mit dem Kern durch die starke Kernkraft wechselwirken. Im Gegensatz dazu unterliegen Elektronen nicht der starken Wechselwirkung, so dass ihre Streuung meistens durch die elektromagnetische Kraft verursacht wird.⁽⁹⁾ Qualitativ gesehen wird das in den Kern eindringende Projektil eine geringere elektrische Ladung spüren, als wenn der Kern punktförmig wäre, so dass es weniger abgestoßen bzw. gestreut ist. Somit kann man bei festem Streuwinkel θ erwarten — vorausgesetzt dieser Winkel groß genug ist, damit der mit Gl. (I.13) berechnete entsprechende Wert des kleinsten Abstands des Projektils vom Streuzentrum $r_{\text{min}}(\theta)$ kleiner als der Kernradius ist —, dass der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$ vom Wert für Streuung an einem punktförmigen Ziel abweicht. Genauer sollte $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta)$ kleiner sein als für Stöße an Punktladungen: das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

⁽⁸⁾Zur Erinnerung ist $\gamma m_e \vec{v}$ der Impuls des Elektrons.

⁽⁹⁾Eigentlich unterliegen Elektronen auch der schwachen Wechselwirkung, die hier aber vernachlässigbar gegenüber der elektromagnetischen Wechselwirkung ist.

^(m)L. DE BROGLIE, 1892–1987 ⁽ⁿ⁾N. MOTT, 1905–1996 ^(o)H. A. LORENTZ, 1853–1926

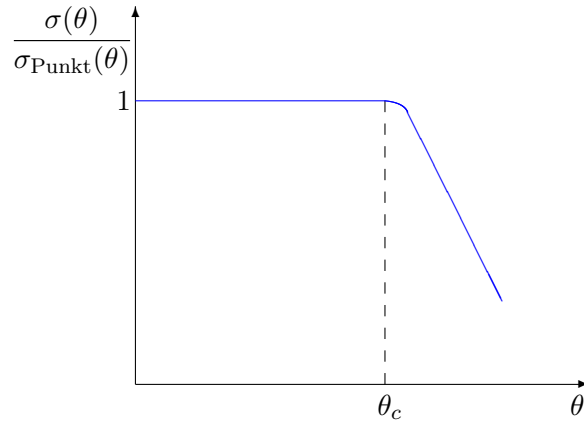


Abbildung I.7 – Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnitts [hier der Kurze halber als $\sigma(\theta)$ bezeichnet] für Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zu jenem für Streuung an einer Punktladung.

zum Wirkungsquerschnitt für Streuung an einer Punktladung sollte ab einem gewissen Wert von θ kleiner als 1 werden, wie in Abb. I.7 schematisch dargestellt wird.

Eigentlich wurde ein solches Verhalten experimentell beobachtet, z.B. in Streuexperimenten mit α -Teilchen mit $E_{\text{kin}} = 22$ MeV an verschiedenen Kernen wie Gold (^{197}Au) oder Blei (^{208}Pb) [14]. Dabei wird das Verhältnis kleiner als 1 für $\theta_c \simeq 90^\circ$, entsprechend dank Gl. (I.11) und (I.13) einem kleinen Abstand der α -Teilchen vom Kernzentrum von etwa 10 fm.

Bemerkung: Anstatt einer Abweichung vom punktförmigen Fall ab einem gewissen Streuwinkel bei fester kinetischer Energie zu betrachten, kann man auch den Streuwinkel θ_0 festlegen und die kinetische Energie der Projektile variieren lassen. Dann soll die Abweichung ab einem Wert E_c von E_{kin} auftreten. Genauer soll der differentielle Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/d^2\Omega(\theta_0)$ für $E_{\text{kin}} \leq E_c$ wie E_{kin}^{-2} skalieren, wie in Gl. (I.10b) zu sehen ist, während das Skalenverhalten für höhere kinetische Energien nicht mehr gilt (s. Abb. I.8). Aus dem Wert E_c der kinetischen Energie, ab dem das E_{kin}^{-2} -Skalieren verletzt wird, kann die Größe des Kernradius abgeschätzt werden.

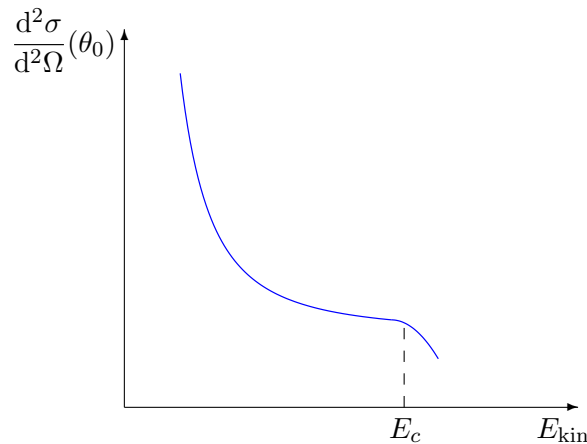


Abbildung I.8 – Verletzung des E_{kin}^{-2} -Skalierens des Rutherford'schen differentiellen Wirkungsquerschnitts (I.10b) bei festem Streuwinkel θ_0 .

Elektrischer Formfaktor

Für eine mehr quantitative Beschreibung der Ausdehnung des Ziels sowie der zugehörigen Ladungsverteilung ist es zunächst günstig, den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch den *Impulsübertrag*^(xix) zu beschreiben. Dabei ist der Letztere durch $\vec{q} \equiv \vec{p}_{\text{ein}} - \vec{p}_{\text{aus}}$ definiert, mit $\vec{p}_{\text{ein}}$ bzw.

^(xix) momentum transfer

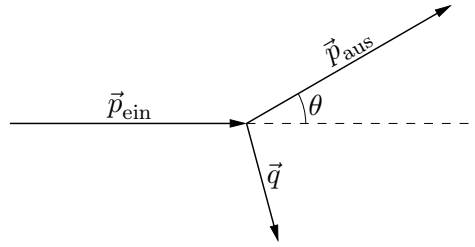


Abbildung I.9 – Zur Definition des Impulsübertrags.

$\vec{p}_{\text{aus}}$ dem Impuls des einfallenden bzw. gestreuten Projektils, s. Abb. I.9. Bei elastischer Streuung gilt $|\vec{p}_{\text{aus}}| = |\vec{p}_{\text{ein}}|$, so das Dreieck mit Seiten $\vec{p}_{\text{ein}}$, $\vec{p}_{\text{aus}}$ und $\vec{q}$ gleichschenkelig ist. Daraus folgt $|\vec{q}| = 2|\vec{p}_{\text{ein}}| \sin \frac{\theta}{2}$.

Mithilfe der nicht-relativistischen Beziehung $E_{\text{kin}} = |\vec{p}_{\text{ein}}|^2/2m$ und der obigen Beziehung zwischen $\vec{p}_{\text{ein}}$ und $\vec{q}$ lässt sich die Rutherfordsche Streuformel (I.10b) leicht durch $\vec{q}$ ausdrücken als

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{|\vec{q}|^4}. \quad (\text{I.15})$$

Allgemeiner kann man jeden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die durch die Coulomb-Kraft vermittelte elastische Streuung an einem punktförmigen Streuzentrum durch den Impulsübertrag ausdrücken, egal, ob man relativistische oder quantenmechanische Effekte berücksichtigt. Sei $d^2\sigma/d\Omega(\vec{q})|_{\text{Punkt}}$ dieser Wirkungsquerschnitt. Für die Streuung an ausgedehnten Zielen gilt

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) = F^2(\vec{q}) \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\vec{q}) \Big|_{\text{Punkt}} \quad (\text{I.16})$$

wobei $F^2(\vec{q})$ der *elektrische Formfaktor*^(xx) des Ziels ist, der mit der im nächsten Paragraph diskutierten elektrischen Ladungsdichteverteilung $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$ verknüpft ist:

$$F^2(\vec{q}) \equiv \left| \frac{1}{Q} \int \rho_{\text{el}}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r} \right|^2. \quad (\text{I.17})$$

Bemerkung: Der Ausdruck (I.16) des Wirkungsquerschnitts gilt noch im relativistischen Fall, vorausgesetzt das Projektil oder der Atomkern (oder beide) den Spin 0 hat. Falls beide einen nicht-verschwindenden Spin und dementsprechend ein magnetisches Dipolmoment haben, werden diese Dipolmomente miteinander wechselwirken. Um dies zu berücksichtigen, wird neben dem elektrischen noch ein magnetischer Formfaktor eingeführt.

I.2.4 Dichteverteilungen von Atomkernen

I.2.4 a Ladungsdichteverteilung

Zur Beschreibung eines ausgedehnten elektrisch geladenen Bereichs, insbesondere eines Atomkerns, ist mehr als seine Gesamtladung Q erforderlich. Die ganze nötige Information ist in der *elektrischen Ladungsdichteverteilung*^(xxi) $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$ enthalten, die so definiert ist, dass das Produkt $\rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$ die Ladung im Volumenelement $d^3\vec{r}$ um den Punkt $\vec{r}$ darstellt. Integriert über den ganzen Raum soll die Ladungsdichteverteilung die gesamte Ladung Q ergeben, entsprechend der Normierung

$$\int \rho_{\text{el}}(\vec{r}) d^3\vec{r} = Q. \quad (\text{I.18})$$

Experimentell liefern differentielle Wirkungsquerschnitte nicht genau $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$, sondern das Betragsquadrat deren Fourier^(p)-Transformierten, Gl. (I.17). Solche Wirkungsquerschnitte für Streuungen verschiedener elektrisch geladener Projektils — insbesondere von Elektronen, die der starken

^(xx) electric form factor ^(xxi) electric charge distribution

^(p) J. FOURIER, 1768–1830

Wechselwirkung nicht unterliegen — an unterschiedlichen Atomkernen wurden sorgfältig gemessen, z.B. durch R. Hofstadter^(q) und seine Mitarbeiter⁽¹⁰⁾ woraus sich die elektrischen Formfaktoren der Kerne durch Gl. (I.16) gewinnen lassen. Aus $F^2(\vec{q})$ ergibt sich dann die Ladungsdichteverteilung jedes einzelnen Kerns.

Für „leichte“ Atomkerne mit Massenzahl $A < 20$ lassen sich die so erhaltenen Ladungsdichteverteilungen in erster Näherung günstig mit Gaußschen^(r) Verteilungen

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \rho_0 \left(\frac{1}{\pi R^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-r^2/R^2} \quad (\text{I.19})$$

anpassen, wobei wie üblich $r \equiv |\vec{r}|$.

Zur Beschreibung des elektrischen Formfaktors bei schwereren Kernen mit $A \geq 20$ und Ladung Ze wird die in Abb. I.10 dargestellte *Woods–Saxon*^(s)-Verteilung

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\infty}(Z, A)}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.20})$$

benutzt, die man in der Literatur auch unter den Bezeichnungen *Fermi*^(t)-Verteilung — denn sie ist ähnlich der Fermi–Dirac^(u)-Verteilung der statistischen Physik — oder sogar *Zwei-Parameter-Fermi-Verteilung*⁽¹¹⁾ (2pF) findet.

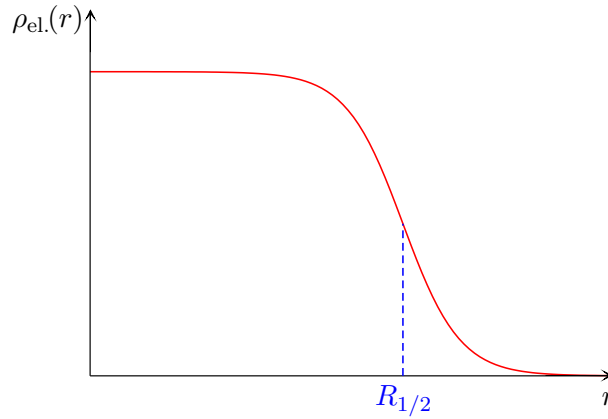


Abbildung I.10 – Verlauf einer Woods–Saxon-Verteilung (I.20).

Dabei hängen die Parameter wie folgt von Massen- und Ladungszahl ab.⁽¹²⁾

- $\rho_{\infty}(Z, A) = 0,17 Ze/A \text{ C fm}^{-3}$ ist ungefähr gleich der Ladungsdichte im Zentrum des Kerns;
- der *Halbdichteradius*^(xxii) $R_{1/2}$ — entsprechend dem Abstand bei welchem die Ladungsdichte auf $\frac{1}{2}\rho_{\infty}(Z, A)$ d.h. etwa die Hälfte ihres Werts im Zentrum abgefallen ist — nimmt mit der Massenzahl A zu;
- die Dicke δ der Randzone (*Oberflächendicke*) kann als unabhängig vom Kern angenommen werden, $\delta = 0,545 \text{ fm}$.

Bemerkungen:

* Für einige Atomkerne, deren Ladungsdichte ein lokales Minimum im Zentrum aufzeigt, wird noch eine Drei-Parameter-Fermi-Verteilung (3pF) eingeführt, wobei der Zähler der Verteilung (I.20) mit

⁽¹⁰⁾Vgl. Experimente 19–20 in Ref. [7] sowie Ref. [15].

⁽¹¹⁾Die Zwei Parameter der Bezeichnung sind $R_{1/2}$ und δ .

⁽¹²⁾Eine nützliche Erfassung von Parametrisierungen der Ladungsdichteverteilungen verschiedener stabiler Atomkerne befindet sich in Ref. [16].

^(xxii)half-density radius

^(q)R. HOFSTADTER, 1915–1990 ^(r)C. F. GAUSS, 1777–1855 ^(s)D. S. SAXON, 1920–2005 ^(t)E. FERMI, 1901–1954

^(u)P. A. M. DIRAC, 1902–1984

einem Faktor $1 + w(R/R_{1/2})^2$ multipliziert wird, mit dem zusätzlichen Parameter w . Dabei ist $R_{1/2}$ aber nicht mehr der Abstand, bei dem $\rho_{\text{el.}}$ die Hälfte des Werts bei $r = 0$ annimmt.

* Die oben angegebenen Ladungsdichteverteilungen (I.19)–(I.20) beschreiben offensichtlich kugelsymmetrische Kerne, denn die Verteilungen hängen nur vom Abstand zum Kernzentrum r ab. Wie im § I.4.3 hiernach detaillierter diskutiert wird, ist diese Annahme für den großen Teil der stabilen Kerne eine gute Näherung. Bei manchen sog. *deformierten* Kernen treten jedoch erhebliche Abweichungen von der Kugelsymmetrie auf, z.B. bei Uran. Dann ist z.B. ein Umdrehungsellipsoid eine bessere Approximation an der (durch die Ladungsverteilung dargestellten) Gestalt des Kerns.

Diese Deformationen lassen sich nicht aus den hier beschriebenen elastischen Streuexperimenten gewinnen, weil die „Orientierung“ des Atomkerns im Raum — z.B. die Richtung dessen langen Achse, falls es sich um einen prolaten Kern handelt — in den Experimenten nicht festgelegt wird, sondern zufällig ist. Dann ändert sich diese Orientierung bei jedem einzelnen Projektil-Kern-Streuereignis, so dass der aus vielen Ereignissen erhaltene Wirkungsquerschnitt eine Mittelung über alle möglichen Orientierung darstellt.

I.2.4b Kernradien

Aus Streuungen bei kleinen Impulsüberträgen $|\vec{q}|$ lässt sich tatsächlich nur der quadratisch gemittelte^(xxiii) Radius gewinnen:⁽¹³⁾

$$R_{\text{rms}}^2 \equiv \frac{\int r^2 \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r}}{\int \rho(\vec{r})_{\text{el.}} d^3\vec{r}} \equiv \langle \vec{r}^2 \rangle.$$

Dieser Radius R_{rms} stimmt weder mit dem Parameter R der Gaußschen Verteilung (I.19) noch mit dem Halbdichteradius $R_{1/2}$ der Woods–Saxon-Verteilung (I.20) überein.

Oft gibt man anstatt R_{rms} den äquivalenten Radius R_e einer homogen geladenen Kugel mit demselben $\langle r^2 \rangle$ an, d.h. $R_e^2 = \frac{5}{3} R_{\text{rms}}^2$. Experimentell gilt $R_e \simeq r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1,3 \pm 0,1$ fm.

Schließlich wird noch ein zusätzlicher Radius eingeführt: R_s ist der äquivalente Radius einer homogen geladenen Kugel, die überall die Ladungsdichte $\rho_\infty(Z, A)$ hat, so dass $Ze = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \rho_\infty(Z, A)$. Mit dem oben gegebenen experimentell gewonnenen Wert für $\rho_\infty(Z, A)$ ist $R_s = 1,128 A^{1/3}$ fm.

Bemerkungen:

* Der Definition nach ist R_s genau proportional zu $A^{1/3}$ für alle Atomkerne, während die entsprechende Proportionalität für $R_{1/2}$ oder R_e nur annähernd ist.

* Durch das Ersetzen von einem Elektron eines Atoms durch ein Myon — Elementarteilchen mit elektrischer Ladung $-e$ und Masse $m_\mu \simeq 207m_e$ — wird ein myonisches Atom erzeugt. Wegen seiner viel größeren Masse ist das Myon stärker gebunden am Kern als ein Elektron, sodass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Inneren des Atomkerns groß wird. Beispielsweise beträgt der Bohrsche Radius der Myonenbahn um einen Blei-Kern etwa 3 fm, im Vergleich mit dem Kernradius $R_s \simeq 7$ fm. Somit spürt das Myon während eines großen Teils seiner Bahn ein schwächeres Coulomb-Potential, als wenn der Kern punktförmig wäre, was seine Bindungsenergie verringert. Folglich liefert die Messung der Bindungsenergie des Myons eine Abschätzung des Kernradius [17] — oder genauer von R_{rms} .

⁽¹³⁾Die Taylor^(v)-Entwicklung des Formfaktors (I.17) bei $\vec{q} = \vec{0}$ gibt nämlich $F^2(\vec{q}) = \left| 1 + i \frac{\vec{q} \cdot \langle \vec{r} \rangle}{\hbar} - \frac{\langle \vec{r}^2 \rangle}{6\hbar^2} |\vec{q}|^2 + \dots \right|^2$, wobei der lineare Term für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung verschwindet.

^(xxiii)root mean square = rms

^(v)B. TAYLOR, 1685–1731

I.2.4 c Kerndichteverteilung

Der große Vorteil der Streuexperimente von Elektronen an Kernen besteht darin, dass dabei die einzige relevant Wechselwirkung zwischen Projektil und Target die gut bekannte elektromagnetische Wechselwirkung ist. Andererseits sind solche Streuungen nur gegenüber der Verteilung der elektrisch geladenen Protonen empfindlich, liefern aber keine Auskunft über die Neutronen.⁽¹⁴⁾

Kollisionen von relativistischen Protonen mit kinetischer Energie $E_{\text{kin}} \approx 1 \text{ GeV}$ ermöglichen jedoch die Messung der gesamten Teilchendichteverteilung im Kern unter Berücksichtigung der elektromagnetischen Kraft zwischen dem gestreuten Proton und denjenigen im Kern, deren Verteilung unabhängig durch Elektronenstreuung messbar ist [17]. Somit erhält man auch die Verteilung der Neutronen. Bei Kernen in der Nähe des β -Stabilitätslinie (s. Abschn. II.2.2 a) und einem geringen Neutronenüberschuss wird in guter Näherung kein Unterschied zwischen den Protonen- und Neutronenverteilungen beobachtet.

Anhand neuerer Methoden — Paritätsverletzende Elektronstreuung [18] oder die Photoerzeugung von π^0 -Mesonen [19] — wurde eine kleine „neutron skin“, entsprechend einem größeren Radius für die Verteilung von Neutronen als für jene von Protonen, im neutronenreichen ^{208}Pb -Atomkern beobachtet, wobei die Differenz der Radien je nach dem Experiment zwischen etwa 0.15 und 0.3 fm beträgt.

In Zusammenfassung ist die Nukleonendichte in einem nicht-deformierten stabilen Atomkern mit $A \gtrsim 20$ in guter Näherung durch

$$n(\vec{r}) = \frac{n_\infty}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{\delta}\right)} \quad (\text{I.21})$$

gegeben, wobei $R_{1/2}$ mit der Massenzahl A zunimmt, während n_∞ , entsprechend ungefähr der Teilchendichte im Kernzentrum, unabhängig von A ist: $n_\infty = 0,17 \text{ Nukleon/fm}^3$, was zum oben angegebenen Wert von $\rho_\infty(Z, A)$ [s. unter Gl. (I.20)] führt. n_∞ wird *Sättigungsdichte*^(xxiv) genannt.

Bemerkung: Da die Masse eines Nukleons etwa $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ beträgt, vgl. § I.5.2 und I.5.3, entspricht n_∞ einer Massendichte von $2,8 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$.

I.2.4 d Weitere Bemerkungen

In diesem Abschnitt wurden (beinahe) sphärische Atomkerne betrachtet, entsprechend der angenommenen Kugelsymmetrie der Dichteverteilungen (I.19), (I.20) oder (I.21), die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen. Manche Nuklide sind aber „deformiert“, sogar im Grundzustand, was bedeutet, dass ihre Gestalt stark von derjenigen einer Kugel abweicht. Experimentell spiegeln sich solche Abweichungen von der Kugelsymmetrie in Momenten der Ladungsdichteverteilung wider (§ I.4.3 a).

Die oben beschriebene Methode zur Messung der (Ladungs-)Dichteverteilung eines Kerns mit Hilfe von Streuexperimenten beruht stillschweigend auf der Annahme, dass der zu messende Atomkern lange genug lebt, um als Ziel benutzt zu werden. Bei manchen Nukliden ist diese Annahme nicht erfüllt, insbesondere bei denjenigen, die in der Nähe der Grenzen des Stabilitätsbereichs liegen.

Solche Kerne, wenn sie sehr neutronenreich bzw. protonenreich sind, besitzen manchmal seltene Zerfallsarten durch die gleichzeitige Emission zweier Neutronen bzw. Protonen (§ ??). Durch eine sorgfältige Analysis der gemessenen Kinematik der Zerfallsprodukte kann Information über die Struktur des zerfallenden Kerns gewonnen werden. Somit wurde bei einigen Kernen ungewöhnlich langreichweitige Dichteverteilungen entdeckt: dabei bewegen sich ein paar Neutronen bzw. Protonen im Mittel sehr weit vom Kernzentrum — sollte man schreiben, weit vom Kern des Atomkerns? — und bilden somit eine Art „Halo“ um den Rest der Nukleonen [20]. Beispiele solcher sog. *Halo-Kerne* sind $^{11}_3\text{Li}$ (Halo aus zwei Neutronen) oder ^8_3B (Halo aus einem einzelnen Proton).

⁽¹⁴⁾ Eigentlich erzeugen die magnetischen Dipolmomente der Neutronen Dipolfeldpotentiale, deren Stärke aber viel kleiner ist, als jene des durch die Protonen erzeugten Coulomb-Potentials.

^(xxiv) saturation density

In der Kernphysik sind Dichteverteilungen, wie die Wirkungsquerschnitte, statistische Größen, gewonnen aus der Wiederholung vieler identischer Experimente. Dementsprechend können sie als (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen interpretiert werden: die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Nukleon im Volumenelement $d^3\vec{r}$ um den Punkt $\vec{r}$ befindet, ist proportional⁽¹⁵⁾ zum Produkt $n(\vec{r}) d^3\vec{r}$, mit n der Nukleonendichteverteilung im Kern. In Übereinstimmung mit dieser Interpretation ist $n(\vec{r})$ in quantenmechanischen Modellierungen des Atomkerns proportional zum Betragsquadrat der Wellenfunktion der A Nukleonen des Kerns.

Dagegen ist die eigentliche Verteilung der Nukleonen in einem gegebenen Kern zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht durch $n(\vec{r})$ gegeben, sondern durch die Summe über alle Nukleonen von $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$ -Termen, wobei $\vec{r}_i(t)$ die Position zur Zeit t des i -ten Nukleons bezeichnet.

I.3 Masse des Atomkerns

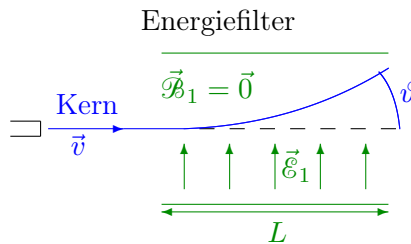
Eine zweite Grundeigenschaft von Atomkernen, neben ihrer Größe, ist ihre Masse, deren Messung für eine gegebene relative Genauigkeit in der Tat einfacher ist. Eigentlich spielt die Masse des Kerns schon eine Rolle in der Bestimmung des Radius, denn sie legt die reduzierte Masse für das äquivalente Ein-Körper-Problem für die Streuung eines Projektils am Kern fest. Dazu stellt sich die Masse als wichtig heraus, weil sie Auskunft über die Stabilität des Nuklids gibt.

Bemerkung: Hiernach bezeichnet $m(Z, N)$ bzw. $m(Z, A)$ die Masse der „nackten“ Atomkerns, d.h. von völlig ionisierten Atomen. In manchen Lehrbüchern wird an deren Stelle die Masse $m'(Z, A)$ des Atoms, einschließlich der Z Elektronen, verwendet. Dies führt zu einigen Unterschieden, die im Folgenden rechtzeitig diskutiert werden.

I.3.1 Grundlagen der Massenmessung

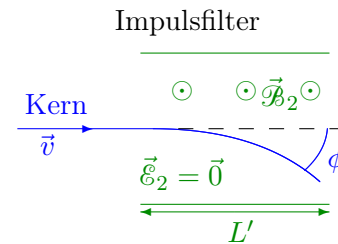
Die ersten Messungen der Masse des Atomkerns fanden parallel zu dessen Nachweis statt und führten schnell zur Entdeckung der Existenz von Isotopen (J. J. Thomson 1912) und zu ihrer systematischen Untersuchung (Aston^(w) 1919, vgl. Experiment 9 in Ref. [7]).

Die meisten frühen Methoden zur Massenbestimmung berühren auf demselben einfachen Grundprinzip, das in mehreren Messapparaten — Massenspektrometer bzw. Massenspektrographen — implementiert wurden, insbesondere durch Mattauch.^(x)⁽¹⁶⁾ Dabei fliegt der Kern durch zwei aufeinanderfolgende Filter, die seine kinetische Energie E_{kin} (Energiefilter) und seinen Impuls $|\vec{p}|$ (Impulsfilter) präzise auswählen, wie unten schematisch dargestellt wird. Dann wird die Masse einfach durch $m = |\vec{p}|^2 / 2E_{\text{kin}}$ — im nicht-relativistischen Fall — gegeben (vgl. Experiment 26 in Ref. [7]).



Der Ablenkwinkel ϑ der Flugrichtung des Kerns (Ladung q) am Ausgang des Gebiets (Länge L , gleichmäßiges elektrisches Feld $\vec{E}_1$, verschwindendes magnetisches Feld $\vec{B}_1$) ist gegeben durch

$$\tan \vartheta = \frac{qE_1 L}{2mv^2} = \frac{qE_1 L}{4E_{\text{kin}}}.$$



Der Ablenkwinkel ϕ am Ausgang des Gebiets (Länge L' , elektrisches Feld $\vec{E}_2 = \vec{0}$, gleichmäßiges magnetisches Feld $\vec{B}_2$) ist gegeben durch

$$\sin \phi = \frac{qB_2 L'}{mv} = \frac{qB_2 L'}{|\vec{p}|}.$$

⁽¹⁵⁾ Der Proportionalitätsfaktor ist einfach $1/A$, denn $n(\vec{r})$ ist auf die Nukleonenzahl A des Kerns normiert.

⁽¹⁶⁾ Vgl. Ref. [21, Kap. 3] für einen Überblick über verschiedene Methoden und die entsprechenden Messapparate.

^(w) F. ASTON, 1877–1945 ^(x) E. MATTAUCH, 1895–1976

Mit solchen Methoden werden relative Genauigkeiten von etwa 10^{-4} – 10^{-5} erreicht. Genauere Messungen sind mit sog. *Flugzeitmassenspektrometern* nötig; dabei werden die Kerne in einem Bereich (Länge L) durch eine konstante Spannung beschleunigt, und die Zeit zum Durchlaufen des Gebiets liefert das Masse-zu-Ladung-Verhältnis m/q .

Um eine noch höhere Genauigkeit zu erreichen sind andere Messmethoden nötig [22], wie z.B. die Verwendung einer Penning^(y)-Falle (vgl. Ref. [23] und das darin enthaltene Literaturverzeichnis).

I.3.2 Bindungsenergie

Die Masse eines Nuklids mit A Nukleonen ist ungefähr proportional zu A — was die Bezeichnung „Massenzahl“ rechtfertigt —, entsprechend den fast gleichen Massen von Proton und Neutron (vgl. § I.5.2 und I.5.3).

Genauer ist die Masse $m(Z, N)$ eines *gebundenen* Atomkerns mit Z Protonen und N Neutronen immer kleiner als die Summe der Massen seiner Bausteine:

$$m(Z, N) = Zm_p + Nm_n - \Delta m(Z, N), \quad (\text{I.22})$$

wobei m_p bzw. m_n die Masse des Protons bzw. Neutrons bezeichnet und $\Delta m(Z, N) > 0$ der sog. *Massendefekt*^(xxv) ist. Indem die Neutronenzahl N durch $A - Z$ ersetzt wird, erhält man die alternative Schreibweise

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta m(Z, A). \quad (\text{I.23})$$

Ausgehend vom Massendefekt ist die *Bindungsenergie*^(xxvi) des Kerns definiert durch

$$B(Z, A) \equiv \Delta m(Z, A) c^2. \quad (\text{I.24})$$

$B(Z, A)$ stellt die Energie dar, die freigesetzt wird, als die den Kern bildenden Nukleonen zu einem gebundenen Zustand „kondensieren“. Deshalb gewährt sie Einsicht in die Stabilität der aus Nukleonen bestehenden Zustände. Somit ist ein aus festen Protonen- bzw. Neutronenzahlen Z bzw. $N = A - Z$ bestehender Zustand umso stabiler, je größer die zugehörige freigesetzte Energie $B(Z, A)$ ist.

Sei z.B. angenommen, dass mehr Energie freigesetzt wird, wenn Z Protonen und N Neutronen die zwei Kerne (Z_1, N_1) und $(Z_2 = Z - Z_1, N_2 = N - N_1)$ bilden, als wenn sie das einzige Nuklid (Z, N) bilden: dann ist $m(Z_1, N_1) + m(Z_2, N_2) < m(Z, N)$, d.h. $B(Z_1, N_1) + B(Z_2, N_2)$ ist größer als $B(Z, N)$. Dementsprechend ist der Zerfall des schwereren Nuklids (Z, N) in die zwei leichteren energetisch bevorzugt.

Bemerkung: Wenn man nicht die Kernmasse $m(Z, A)$, sondern die Atommasse $m'(Z, A)$ betrachtet, dann tragen neben die Massen und Bindungsenergie der Nukleonen auch solche der Elektronen bei:

$$m'(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B(Z, A)}{c^2} + Zm_e - \frac{B_e(Z, A)}{c^2}, \quad (\text{I.25})$$

mit m_e der Elektronenmasse und $B_e(Z, A)$ der Bindungsenergie der Elektronenhülle.

Bindungsenergie pro Nukleon B/A

Viele Eigenschaften der bekannten Nuklide, insbesondere ihre Massen und Bindungsenergien pro Nukleon, werden in Ref. [24] zusammengestellt. In Abb. I.11 ist die Bindungsenergie pro Nukleon $B(Z, A)/A$ gegen die Massenzahl A aufgetragen für verschiedene gegenüber β -Zerfall stabile Kerne. Genauer handelt es sich dabei um die Kerne mit der kleinsten Masse $m(Z, A)$ — entsprechend in

^(xxv) mass defect ^(xxvi) binding energy

^(y) F. M. PENNING, 1894–1954

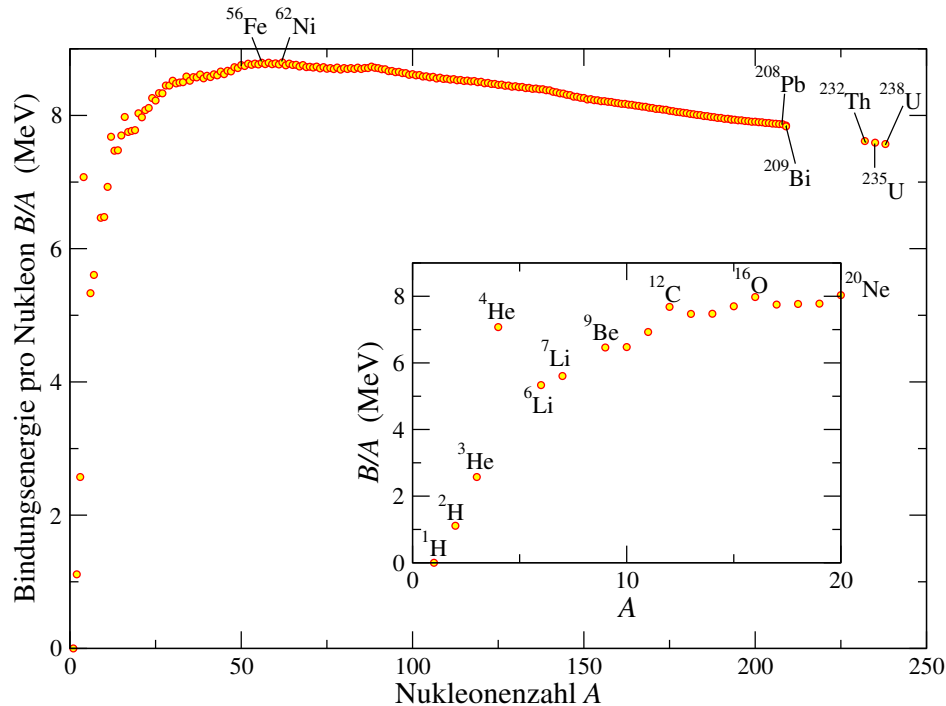


Abbildung I.11 – Bindungsenergie pro Nukleon B/A verschiedener Kerne (Daten aus Ref. [24]). In jeder Isobarenreihe wird nur der gegenüber β -Zerfall stabile Kern mit der höchsten B/A dargestellt, vorausgesetzt seine mittlere Lebensdauer gegenüber α -Zerfall bzw. spontane Spaltung größer als 10^{15} s ist. (Zerfälle werden nur für ^{209}Bi , ^{232}Th , ^{235}U und ^{238}U beobachtet.)

guter Näherung der größten $B(Z, A)/A$ — in der zugehörigen Isobarenreihe, vgl. § II.2.2 a. Drei Haupteigenschaften tauchen auf:

- Die Größenordnung der Bindungsenergie pro Nukleon ist etwa 5–10 MeV, d.h. $B(Z, A)$ beträgt ungefähr 0,5–1% der Kernmasse.
Die typische Bindungsenergie ist somit um einen Faktor 10^4 – 10^6 größer als in der Atomphysik, weshalb kernphysikalische Prozesse viel mehr Energie freisetzen können als chemische Reaktionen.
- Bei den leichten Kernen mit $A < 10$ ist $B(Z, A)/A$ annähernd proportional zu $A - 1$ — bis auf einer bemerkenswerten Spitze bei ^4_2He , entsprechend der besonders hohen Stabilität dieses Kerns.
- Andererseits bleibt die Bindungsenergie pro Nukleon näherungsweise konstant für $A \geq 20$: $B/A \approx 7,5 - 8,5$ MeV.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich wichtige Informationen über die Kernkräfte erhalten, die für die Kohäsion des Kerns verantwortlich sind. Insbesondere besitzen diese Kräfte eine *Sättigung*-Eigenschaft [25].

Den A Nukleonen entsprechen nämlich $A(A-1)/2$ Nukleon–Nukleon Paare, d.h. auf erster Sicht $A(A-1)/2$ Nukleon–Nukleon Bindungen. Wenn die Erzeugung jeder dieser N – N -Bindungen die gleiche Energie freisetzt, wächst die gesamte Bindungsenergie $B(Z, A)$ linear mit deren Anzahl, d.h. sie ist annähernd proportional zu A^2 . Das ist tatsächlich was bei Kernen mit wenigen Nukleonen beobachtet wird. Bei schwereren Atomkernen bindet sich aber jedes Nukleon nicht mit allen anderen, sondern nur mit einer kleinen Anzahl davon (möglicherweise mit nur einem einzelnen Partner),

sodass $B(Z, A)$ proportional zu A wird. Es sieht so aus, als ob die Bindungsfähigkeit des Nukleons nach ein paar Bindungen gesättigt wäre.

Diese Sättigungseigenschaft erinnert an die analoge Eigenschaft der möglichen Bindungen eines chemischen Elements: z.B. kann ein Kohlenstoff-Atom nur vier Bindungen eingehen, weil es auf der Valenzschale vier ungepaarte Elektronen besitzt, die mit anderen Atomen können ausgetauscht werden. Analog haben Heisenberg und Majorana^(z) ausgehend von der beobachteten Sättigung der Kernkräfte vorgeschlagen, dass diese Kräfte durch den Austausch eines Teilchens zwischen *zwei* Partnern vermittelt werden [25, 26].

I.3.3 Separationsenergien

Ausgehend von den Kernmassen wird die *Separationsenergie*^(xxvii) $S_n(Z, N)$ bzw. $S_p(Z, N)$ für die Abspaltung eines Neutrons bzw. eines Protons definiert:

$$S_n(Z, N) \equiv [m(Z, N - 1) + m_n - m(Z, N)]c^2, \quad (\text{I.26a})$$

$$S_p(Z, N) \equiv [m(Z - 1, N) + m_p - m(Z, N)]c^2. \quad (\text{I.26b})$$

S_n bzw. S_p ist die Energie, die zugeführt werden muss, um ein Neutron bzw. ein Proton aus dem Kern freizusetzen: somit ist die Separationsenergie analog zur Ionisierungsenergie der Atome.

Eine positive Separationsenergie S_n bzw. S_p bedeutet, dass es energetisch günstiger ist, den Kern (Z, N) zu bilden, als den Zustand mit einerseits dem Nuklid $(Z, N - 1)$ bzw. $(Z - 1, N)$ und andererseits einem freien isolierten Neutron bzw. Proton. Umgekehrt ist ein Zustand mit negativer S_n bzw. S_p nicht gebunden und wird spontan ein Neutron bzw. ein Proton verlieren: in der $(N - Z)$ -Ebene begrenzen die Linien $S_n = 0$ und $S_p = 0$ (die sog. Neutron- und Proton-*drip lines*) das Gebiet der gebundenen Zustände.

Die Separationsenergien (I.26) lassen sich durch die Bindungsenergien des betroffenen Kerns und eines Nachbarkerns leicht ausdrücken:

$$S_n(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N - 1), \quad (\text{I.27a})$$

$$S_p(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N). \quad (\text{I.27b})$$

Analog zu den Separationsenergien S_n , S_p definiert man die Separationsenergien S_α für die Abspaltung eines α -Teilchens, oder S_{2n} bzw. S_{2p} für die Abspaltung zweier Neutronen bzw. Protonen. Diesen Größen werden wir in Kap. ?? wieder begegnen.

I.4 Quantenmechanische Eigenschaften des Atomkerns

Nuklide besitzen noch weitere Charakteristika, die nur nicht-triviale Werte annehmen, wenn der Kern nicht kugelsymmetrisch ist. Teilweise haben diese Eigenschaften kein klassisches Pendant, weshalb sie hier etwas missbräuchlich als „quantenmechanisch“ gekennzeichnet werden.

I.4.1 Spin

Als *Spin* bezeichnet man im engeren Sinn den Drehimpuls eines Körpers in seinem eigenen Ruhesystem — d.h. in einem Bezugssystem, wo der Bahndrehimpuls $\vec{r} \times \vec{p}$ verschwindet.⁽¹⁷⁾

Die Bausteine des Kerns — Protonen und Neutronen — sind Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$, entsprechend Drehimpulsen $\vec{S}_i$. Dazu bewegt sich jedes Nukleon im Inneren des Nuklids und besitzt

⁽¹⁷⁾Die quantenmechanische Behandlung des Drehimpulses wird kurz im Anhang A dargestellt.

^(xxvii)separation energy

^(z)E. MAJORANA, 1906–??

daher einen Bahndrehimpuls $\vec{L}_i$ um das Kernzentrum, auch im Ruhesystem des Kerns. Die Kopplung aller individuellen Nukleonenspins und -bahndrehimpulse führt zu einem gesamten Drehimpuls $\vec{J}_{\text{Kern}}$ (oder oft $\vec{I}$) im Ruhesystem des Kerns, der auch als *Kernspin* oder Spin des Kerns bezeichnet wird. Insbesondere besitzen Atomkerne mit einer ungeraden Nukleonenzahl A automatisch einen halbzahligen Spin.

Die Existenz eines nicht-verschwindenden Kernspins signalisiert eine Abweichung von der Kugelsymmetrie des Atomkerns, so dass die (Ladungs)Dichteverteilung nicht durch die einfache Woods–Saxon-Verteilung (I.20)–(I.21) gegeben sein kann.

Der Kernspin trägt zum gesamten Drehimpuls eines Systems bei, der in jedem Typ von Prozess eine erhaltene Größe ist.

Experimentell kann der Kernspin durch die Hyperfeinausspaltung der Spektrallinien der Atomhülle in einem Magnetfeld ermittelt werden, vgl. Experimente 54–56 in Ref. [8].

I.4.2 Parität

Eine andere wichtige Eigenschaft von Atomkernen ist ihre Parität P (oder manchmal Π). Dabei handelt es sich um die multiplikative Quantenzahl, die das Verhalten der Wellenfunktion — bzw. des quantenmechanischen Zustands — unter der Raumspiegelungstransformation $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ charakterisiert. Kerne sind Eigenzustände des entsprechenden Operators und besitzen somit eine bestimmte Parität, entweder positiv (Eigenwert $+1$) oder negativ (-1).

Eine übliche Notation fasst Spin und Parität zusammen: J_{Kern}^P , wobei die Parität mit $+$ oder $-$ bezeichnet wird.

Die Parität eines Systems ist in den meisten Elementarprozessen eine erhaltene Größe, mit der einzigen doch wichtigen Ausnahme der durch die schwache Wechselwirkung vermittelten Prozesse (vgl. § ??).

I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente

I.4.3a Elektrische Momente

Bei Kernen mit einem nicht-verschwindenden Kernspin definiert dieser eine bevorzugte Richtung und verletzt daher automatisch die Kugelsymmetrie.

Um die Abweichung der elektrischen Ladungsdichteverteilung $\rho_{\text{el.}}$ von der Kugelgestalt werden ihre *elektrische Multipolmomente* eingeführt (vgl. z.B. Ref. [27, Kap. 4]). Die Verteilung erzeugt an einem Aufpunkt M im Abstand $|\vec{X}|$ von ihrem Schwerpunkt ein elektrostatisches Potential $\Phi(\vec{X})$, das mithilfe dieser Momente als Summe verschiedener Terme geschrieben werden kann (damit die höheren Terme der Entwicklung vernachlässigbar sind, muss $|\vec{X}|$ viel größer als die Ausdehnung der Verteilung sein):

$$\Phi(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{X}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{D} \cdot \vec{X}}{|\vec{X}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij} X_i X_j}{|\vec{X}|^5} + \dots, \quad (\text{I.28})$$

wobei die X_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ die kartesischen Koordinaten des Punkts M bezüglich eines Systems mit dem Verteilungsschwerpunkt als Ursprungspunkt bezeichnen. In Gl. (I.28) ist Q die gesamte elektrische Ladung der Verteilung, während der Vektor $\vec{D}$ bzw. der (spurlose) Tensor zweiter Stufe Q_{ij} das elektrische Dipol- bzw. Quadrupolmoment ist. Diese werden jeweils gegeben durch

$$\vec{D} = \int \vec{r} \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (\text{I.29})$$

und

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \vec{r}^2 \delta_{ij}) \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (\text{I.30})$$

wobei δ_{ij} das Kronecker^(aa)-Symbol ist: $\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$, 0 sonst.

^(aa)L. KRONECKER, 1823–1891

Der Ausdruck (I.28) des Potentials ergibt sich sofort aus dem Integral der Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) \equiv [(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2]^{-1/2} = 1/|\vec{X} - \vec{x}|$ in der Nähe des Ursprungspunkts $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{0}) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial f(\vec{0})}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} \frac{\partial^2 f(\vec{0})}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \\ &= \frac{1}{|\vec{X}|} + \frac{1}{|\vec{X}|^3} \sum_{i=1}^3 x_i X_i + \frac{1}{|\vec{X}|^5} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} [3X_i X_j - \vec{X}^2 \delta_{ij}] + \dots, \end{aligned}$$

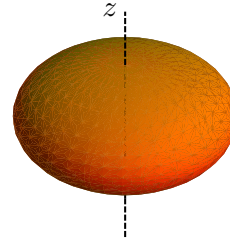
zusammen mit der Beziehung $\sum_{i,j} x_i x_j \vec{X}^2 \delta_{ij} = \sum_{i,j} X_i X_j \vec{x}^2 \delta_{ij}$.

Auf den Ausdrücken (I.29)–(I.30) kann man leicht prüfen, dass das elektrische Dipol- und das elektrische Quadrupolmoment von sphärischen Kernen verschwinden. In § II.4.5 c wird allgemeiner gezeigt, dass Kerne wegen ihrer wohldefinierten Parität kein elektrisches Dipolmoment besitzen. Sie können aber noch ein Quadrupolmoment haben, so dass das Letztere die einfachste Abweichung von der Kugelgestalt der Dichteverteilung parametrisiert.

Es sei jetzt ein Kern mit einem nicht-verschwindenden Spin $\vec{J}_{\text{Kern}}$; die Richtung dieses Spins definiert die z -Achse. Die zz -Komponente des elektrischen Quadrupolmoments Q_{zz} bestimmt die Deformation des Kerns entlang dieser Achse.⁽¹⁸⁾ Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, je nach dem Vorzeichen von Q_{zz} :

$Q_{zz} > 0$: prolater Kern (= zigarrenförmig)

$Q_{zz} < 0$: oblater Kern (= linsenförmig)



I.4.3 b Magnetisches Dipolmoment

In der klassischen Elektrodynamik erzeugt eine rotierende elektrische Ladung — z.B. in einer Stromschleife — ein magnetisches Feld gleich dem eines magnetischen Dipols $\vec{\mu}$. Ähnlich wird in der Quantenmechanik mit der Rotation einer Ladung — genauer, mit dem zugehörigen Bahndrehimpulsoperator $\hat{L}$ — ein magnetisches Dipolmoment $\hat{\mu}_L$ assoziiert, das proportional zu $\hat{L}$ ist.

Neben dem Bahndrehimpuls existiert in der Quantenmechanik ein weiterer Drehimpuls, und zwar der Spin $\hat{S}$, zu dem ebenfalls ein magnetisches Dipolmoment $\hat{\mu}_S$ zugeordnet wird. Das gesamte magnetische Dipolmoment wird dann durch die Kopplung von $\hat{\mu}_L$ und $\hat{\mu}_S$ gegeben:

$$\hat{\mu} \equiv \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S. \quad (\text{I.31})$$

Die typische Größenordnung eines Drehimpulses bzw. eines magnetischen Dipolmoments in der Kernphysik ist $\hbar$ bzw. das sog. *Kernmagneton*^(xxviii)

$$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}, \quad (\text{I.32})$$

⁽¹⁸⁾ Wenn die Gestalt des Kerns durch ein Umdrehungsellipsoid dargestellt wird, ist diese z -Achse eine der Hauptachsen des Ellipsoids. Im Hauptachsensystem verschwinden dann die nicht-diagonalen Komponenten des elektrischen Quadrupolmoments, während $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$.

^(xxviii) nuclear magneton

wobei e bzw. m_p die Elementarladung bzw. die Masse des Protons bezeichnet. μ_N ist gleich dem Wert des magnetischen Dipolmoments für ein mit dem Drehimpuls $\hbar$ rotierendes Proton bei klassischer Rechnung.

Mithilfe des Kernmagnetons lassen sich die mit dem Bahndrehimpuls und dem Spin assoziierten magnetischen Dipolmomente als

$$\hat{\mu}_L \equiv g_L \mu_N \frac{\hat{L}}{\hbar}, \quad \hat{\mu}_S \equiv g_S \mu_N \frac{\hat{S}}{\hbar} \quad (\text{I.33})$$

schreiben, wobei die *Landé^(ab)-Faktoren* g_L und g_S Zahlen von der Größenordnung 1 sind. Im allgemeinen Fall ist $g_L \neq g_S$, sodass das magnetische Dipolmoment $\hat{\mu}$ nicht parallel zum Gesamtdrehimpuls $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ ist. Wichtig ist aber nur die Komponente des Dipolmoments entlang der Richtung von $\hat{J}$. Im Fall eines Atomkerns ist somit der (messbare) Wert μ_{Kern} des magnetischen Dipolmoments durch die Gleichung

$$\langle \hat{\mu} \cdot \hat{J}_{\text{Kern}} \rangle \equiv \mu_{\text{Kern}} \frac{\langle \hat{J}_{\text{Kern}}^2 \rangle}{j\hbar} = \mu_{\text{Kern}}(j+1)\hbar. \quad (\text{I.34})$$

definiert. Dabei ist j die mit dem Betragsquadrat $\hat{J}_{\text{Kern}}^2$ des Gesamtdrehimpulses assoziierte Quantenzahl (vgl. Anhang A), während $\langle \cdot \rangle$ den Erwartungswert von Operatoren bezeichnet.

Die Begründung der auf erster Sicht überraschenden Definition (I.34) ist, dass nur die Projektion von $\hat{\mu}$ auf $\hat{J}_{\text{Kern}}$ beobachtbar ist.

In der Tat bleibt der Erwartungswert von $\hat{\mu}$ nicht konstant in der Bewegung, sondern nur der von $\hat{J}_{\text{Kern}}$. Genauer sind das Betragsquadrat $\hat{J}_{\text{Kern}}^2$ und die Komponente $\hat{J}_{\text{Kern},z}$ entlang einer Richtung — konventionell der z -Achse — Operatoren, die mit dem Hamilton-Operator des Kerns kommutieren, so dass die zugehörigen Erwartungswerte Erhaltungsgrößen sind. Daher kann nur die z -Komponente $\hat{\mu}_z$ von Relevanz sein.

Manchmal wird anstatt Gl. (I.34) einfacher

$$\langle \hat{\mu}_z \rangle \equiv \mu_{\text{Kern}} \frac{\langle \hat{J}_{\text{Kern},z} \rangle}{j\hbar}, \quad (\text{I.35})$$

geschrieben, wobei j wieder die mit $\hat{J}_{\text{Kern}}^2$ assoziierte Quantenzahl ist, woraus sich in Analogie mit Gl. (I.33) $\mu_{\text{Kern}} = g_{\text{Kern}} \mu_N j$ ergibt. Eigentlich muss aber der Erwartungswert im Zähler von Gl. (I.35) für den Zustand mit maximaler „magnetischer“ Quantenzahl $m_j = j$ betrachtet werden, damit die Gleichung wirklich äquivalent zur Definition (I.34) sei.

Kernspinresonanz

In Anwesenheit eines Magnetfeldes $\vec{\mathcal{B}}_0$ liegt der Kernspin $\vec{J}_{\text{Kern}}$ längs der Richtung des Feldes. Die magnetische potentielle Energie des Kerns ist dann durch den Erwartungswert von $-\hat{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0$ gegeben, d.h. laut Gl. (I.34) für einen Zustand mit der magnetischen Quantenzahl m_j , wobei $-j \leq m_j \leq j$, durch

$$E_{\text{mag.}} = -\langle \hat{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 \rangle = -\mu_{\text{Kern}} \frac{m_j}{j} |\vec{\mathcal{B}}_0|.$$

Im Magnetfeld gibt es somit $2j+1$ äquidistante Energieniveaus, zwischen denen ein senkrechtes zu $\vec{\mathcal{B}}_0$ oszillierendes Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_1$ periodische Übergänge induzieren kann, vorausgesetzt dessen Frequenz genau abgestimmt ist, und zwar für den Übergang zwischen zwei Nachbarniveaus, auf der *Larmor^(ac)-Frequenz* $\nu_L = \omega_L/(2\pi)$ mit

$$\omega_L = \frac{\mu_{\text{Kern}} |\vec{\mathcal{B}}_0|}{j\hbar}. \quad (\text{I.36})$$

^(ab)A. LANDÉ, 1888–1976 ^(ac)J. LARMOR, 1857–1952

Bei dieser (Kreis)Frequenz findet in der Übergangswahrscheinlichkeit eine Resonanz statt,⁽¹⁹⁾ die sog. *Kernspinresonanz*,^(xxix) die viele Anwendungen in der Physik, der Chemie und der Biologie hat, wie z.B.:

- präzise Bestimmungen des Werts des magnetischen Dipolmoments in einem bekannten Magnetfeld $\vec{\mathcal{B}}_0$ (I. Rabi^(ad) 1938; F. Bloch^(ae) und E. M. Purcell^(af) 1946);
- bei bekanntem μ_{Kern} , präzise Messungen des Magnetfelds $|\vec{\mathcal{B}}_0|$, um welches der Kern präzediert, und dadurch Ermittlung der Umgebung (chemische Bindungen und Zusammensetzung) dieses Korns: dabei handelt es sich um das Grundprinzip der *Magnetresonanztomographie* (MRT)^(xxx) bzw. *Kernspintomographie* als zerstörungsfreies bildgebendes Verfahren in der Medizin (P. Lauterbur^(ag) 1971; P. Mansfield^(ah)).

I.5 Eigenschaften der leichtesten Atomkerne

In diesem letzten Abschnitt werden zunächst einige Einheiten, danach die Charakteristika der leichtesten Kerne zusammengefasst.

I.5.1 Praktische Einheiten in der Kernphysik

Die Einheiten des SI-Systems sind nicht besonders geeignet, um die mikroskopischen Größen der Kernphysik günstig zu beschreiben. Daher werden entweder eher Teile davon benutzt, oder sogar andere Einheiten verwendet. Hiernach werden einige davon zusammengefasst.

- Länge: $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \equiv 1 \text{ Fermi}$ ($\sim$ Radius des Protons).
Dementsprechend sind typische Flächen bzw. Volumina der Ordnung ein paar fm^2 bzw. fm^3 ; für Wirkungsquerschnitte werden das Barn ($1 \text{ b} \equiv 100 \text{ fm}^2$) und seine Teile benutzt.
- Zeit: manchmal wird das fm/c für sehr kurze Zeitdauer benutzt ($1 \text{ fm}/c \simeq 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ s}$), mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c .
- Energie: $1 \text{ MeV} \equiv 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ (typische Energie, die in einem kernphysikalischen Prozess ausgetauscht wird).
- Masse: wird entweder in MeV/c^2 bzw. GeV/c^2 ausgedrückt, mit $1 \text{ MeV}/c^2 \simeq 1,783 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ (Masse des Elektrons $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$), oder in *atomaren Masseneinheiten*^(xxxi) u ,⁽²⁰⁾ wobei

$$1 \text{ u} \equiv \frac{\frac{1}{12} M(^{12}\text{C})}{\mathcal{N}_A} = \frac{1 \text{ g mol}^{-1}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931,49 \text{ MeV}/c^2$$

mit der molaren Masse M und der Avogadro-Zahl $\mathcal{N}_A$.

Bis 1960, und somit in älteren Artikeln bzw. Lehrbüchern, war die atomare Einheit definiert durch $1 \text{ amu} \equiv \frac{1}{16} M(^{16}\text{O})/\mathcal{N}_A$.

- Elektrische Ladungen werden in Einheiten der Elementarladung e gegeben. Dann wird das elektrische Quadrupolmoment (Ladung $\times$ Fläche) eines Korns in e barns gemessen. Schließlich werden magnetische Dipolmomente in Einheiten des Kernmagnetons μ_N angegeben.

⁽¹⁹⁾ Im klassischen Bild ist dies die Frequenz der Präzession des magnetischen Dipolmoments $\vec{\mu}$ um die Richtung des Magnetfelds $\vec{\mathcal{B}}_0$.

⁽²⁰⁾ Relative Unsicherheiten über die Masse sind wegen der Messmethoden oft kleiner wenn ausgedrückt in atomaren Masseneinheiten.

^(xxix) nuclear magnetic resonance (NMR) ^(xxx) magnetic resonance imaging (MRI) ^(xxxi) atomic mass unit

^(ad) I. I. RABI, 1898–1988 ^(ae) F. BLOCH 1905–1983 ^(af) E. M. PURCELL, 1912–1997 ^(ag) P. LAUTERBUR, 1929–2007

^(ah) P. MANSFIELD, 1933–2017

Mithilfe dieser Einheiten beträgt das Produkt $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV fm}$, d.h. $1 \text{ fm} = \hbar c / (197 \text{ MeV})$.

Dieser Umrechnungsfaktor ist interessant aus (mindestens) zwei Gründen: Erstens sind potentielle elektrostatischen Energien der Form $qq'/(4\pi\epsilon_0 r) = \alpha\hbar c/r$ mit $\alpha \simeq 1/137$ der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante. Sind die Ladungen q, q' ausgedrückt in Einheiten von e und der Abstand r in fm, dann findet man einfach die Energie in MeV. Zweitens ist der Faktor nützlich, wenn man das System „natürlicher Einheiten“ mit $\hbar = c = 1$ benutzt, in welchem Masse und Energie bzw. Länge und Zeit in MeV (oder GeV) bzw MeV^{-1} (GeV^{-1}) gemessen werden.

1.5.2 $Z = 1, N = 0$: Proton (p)

Das Proton, mit Masse $m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2 = 1,0073 \text{ u}$, bildet den Kern des leichtesten Wasserstoff-Isotops ^1H . Rutherford erkannte 1917, dass der ^1H -Kern auch in anderen Atomkernen vorhanden ist, entsprechend der konventionellen „Entdeckung“ des Protons.

Dem heutigen Wissen nach ist das Proton stabil, was bedeutet, dass kein Zerfall bisher experimentell beobachtet wurde. Genauer beträgt die untere Grenze über dessen mittlere Lebensdauer $T_{1/2} > 9 \cdot 10^{29}$ Jahre mit der Aussagewahrscheinlichkeit (confidence level, CL) 90% [28].

Das Proton hat den Spin $\frac{1}{2}$ und eine (definitionsgemäß) positive Parität: $J^P(p) = \frac{1}{2}^+$.

Es hat kein messbares elektrisches Quadrupolmoment, während sein magnetisches Dipolmoment $\mu_p = +2,79\mu_N$ ist. Das Letztere entspricht einem Landé-Faktor $g_S = 5,59$ [Gl. (I.33)] sowie einer Larmor-Frequenz $\nu_L = 42,7 \text{ MHz} \cdot \text{T}^{-1}$ [vgl. Gl. (I.36) mit $|\vec{B}_0| = 1 \text{ T}, j = \frac{1}{2}$].

Wenn das Proton ein Elementarteilchen wäre, dann sollte er der Pauli^(ai)-Theorie nach das magnetische Dipolmoment $\mu_p = \mu_N$ haben, d.h. $g_S = 2$. Die große Abweichung von $g_S(p)$ von 2 zeigt, dass das Proton nicht elementar ist — was durch andere Beobachtungen bestätigt ist: eigentlich besteht ein Proton aus Quarks und Gluonen, davon 3 Valenzquarks (u, u, d).

Zum Spin bzw. magnetischen Dipolmoment des Protons tragen die Spins und Bahndrehimpulse bzw. die magnetischen Dipolmomente seiner Bestandteile bei. Ob der Spin des Protons mithilfe derjenigen seiner Bestandteile quantitativ erklärt werden kann, ist noch umstritten.

1.5.3 $Z = 0, N = 1$: Neutron (n)

Der andere Bestandteil von Atomkernen, das elektrisch neutrale Neutron, wurde 1932 durch J. Chadwick entdeckt [7, Experiment 11]. Seine Masse ist $m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2 = 1,0087 \text{ u}$.

Im Gegensatz zum Proton ist das freie Neutron nicht stabil, sondern es zerfällt durch β^- -Radioaktivität⁽²¹⁾

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\text{I.37})$$

mit der mittleren Lebensdauer $\tau_n = 878,4 \pm 0,5 \text{ s}$.

Bemerkungen:

* Da das Neutron keine elektrische Ladung trägt, kann seine Masse mit keiner der in § I.3.1 erwähnten Methoden gemessen werden. Stattdessen lässt sich m_n aus Messungen der Masse m_d und der Bindungsenergie $B(d)$ des Deuterons (s. unten) gewinnen: $m_n = m_d - m_p + B(d)/c^2$.

* Die mittlere Lebensdauer des freien Neutrons ist nicht gut bekannt: die oben angegebene relative Messunsicherheit beträgt etwa 0,1 %, während die Masse mit einer relativen Genauigkeit von weniger als 10^{-9} — wenn m_n in atomaren Masseneinheiten gemessen ist — bekannt ist. Der oben angegebene Wert ist der durch die Particle Data Group [28] ermittelte Mittelwert der Ergebnisse von Experimenten mit ultrakalten Neutronen, die eine Lebensdauer zwischen etwa 877,5 und 882,5 s

⁽²¹⁾ Auf dem Quarkniveau entspricht dieser Zerfall dem Prozess $d \longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$.

^(ai) W. PAULI, 1900–1958

finden. In anderen Experimenten, und zwar mit „fliegenden“ Neutronen, wurden etwa größere Werte im Bereich 886–889 s. Da diese Experimente meist älter sind, und die dabei gewonnen Lebensdauerwerte mit größeren Unsicherheiten kamen, werden heutzutage die Ergebnisse der Experimente mit der neueren Technik bevorzugt.

* Neben dem Zerfallskanal (I.37) wurde 2006 der seltene Zerfall $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma$ mit dem Verzweigungsverhältnis $3,09 \pm 0,34 \cdot 10^{-3}$ zum ersten Mal beobachtet [29].

Das Neutron hat Spin und Parität $J^P(n) = \frac{1}{2}^+$ und das magnetische Moment $\mu_n = -1,91\mu_N$.

Bemerkenswert ist, dass μ_n endlich ist, obwohl das Neutron elektrisch neutral ist! Es besteht aber aus geladenen Quarks, davon 3 Valenzquarks (u, d, d), deren Bahndrehimpulse zu seinem magnetischen Moment beitragen.

1.5.4 $Z = 1, N = 1$: Deuteron (${}^2\text{H} \equiv d$)

Ein einziger Zustand mit zwei Nukleonen ist gebunden, und sogar stabil, und zwar der Kern des durch Urey^(aj) 1932 entdeckten schweren Wasserstoff-Isotops ${}^2\text{H}$ (*Deuterium*), das Deuteron, mit Masse $m_d = 1875,613 \text{ MeV}/c^2$.

Dieser Kern, obzwar stabil, ist einer der einzigen Atomkernen ohne gebundenen angeregten Zustand: jede Energiezufuhr hat entweder keinen Einfluss — so lange $E < B(d)$ — oder zerstört den Kern in seine Bestandteile. Daher kann die Bindungsenergie $B(d) = 2,225 \text{ MeV}$ sehr präzise gemessen werden — was die Basis der Messung der Neutronenmasse bildet [7, Experiment 13]. Somit hat das Deuteron die kleinste Bindungsenergie pro Nukleon aller stabilen Kerne, wie in Abb. I.11 zu sehen ist, d.h. das Deuteron ist der gebrechlichste Kern.

Das Deuteron hat Spin und Parität $J^P = 1^+$, magnetisches Dipolmoment $\mu_d = 0,857\mu_N$, und elektrisches Quadrupolmoment $Q = +0,002860 e \text{ barns}$.

Bemerkung: Die $A = 2$ -Zustände mit $Z = 2, N = 0$ („Diproton“) bzw. $Z = 0, N = 2$ („Dineutron“) sowie der Zustand mit $Z = 1, N = 1$ und den Spin 0 sind ungebunden, und bilden daher keinen echten Kern. Diese Ergebnisse liefern Information über die Form der starken Kernkraft zwischen zwei Nukleonen.

1.5.5 Schwerere Kerne

Mit $A = 3$ Nukleonen gibt es zwei gebundene Kerne, beide ohne angeregte Zustände, und zwar ${}^3\text{H}$ (*Tritium*) und ${}^3\text{He}$. Beide Atomkerne haben Spin und Parität $J^P = \frac{1}{2}^+$, und ihre jeweiligen Massen sind $m({}^3\text{H}) = 2808,921 \text{ MeV}/c^2$ und $m({}^3\text{He}) = 2808,391 \text{ MeV}/c^2$. Somit ist ${}^3\text{He}$ stabiler, denn $m({}^3\text{He}) < m({}^3\text{H})$, und in der Tat zerfällt ${}^3\text{H}$ durch β^- -Zerfall in ${}^3\text{He}$, mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 12,32$ Jahre.

Es gibt einen einzigen stabilen Atomkern mit $A = 4$ Nukleonen, den ${}^4\text{He}$ -Kern, mit sowohl dem Grundzustand — entsprechend dem α -Teilchen — als angeregten Zuständen. Der Grundzustand ist im Vergleich mit den Nachbarkernen besonders stabil, vgl. die Vergrößerung in Abb. I.11, und hat Spin und Parität $J^P = 0^+$.

Die Nuklide ${}^4\text{H}$ und ${}^4\text{Li}$ könnten prinzipiell auch gebunden sein, denn ihre Bindungsenergien sind positiv. Wenn er erzeugt wird, emittiert aber ein ${}^4\text{H}$ - bzw. ${}^4\text{Li}$ -Kern sofort — d.h. in weniger als 10^{-15} s — ein Neutron bzw. Proton, weil die in § I.3.3 eingeführte Separationsenergie $S_n({}^4\text{H})$ bzw. $S_p({}^4\text{Li})$ negativ ist.

Auf Abb. I.11 erkennt man noch, dass es kein stabiles Nuklid mit $A = 5$ oder $A = 8$ gibt. Bei der Erzeugung der Kerne im frühen Universum und in Sternen (Kap. Nukleare Astrophysik) haben sich diese Lücken als äußerst wichtig erwiesen. Dagegen gibt es für $A = 6$ und $A = 7$ stabile

^(aj)H. C. UREY, 1893–1981

Lithium-Isotope, und ab $A \geq 9$ gibt es immer mindestens ein stabiles (oder zumindest langlebiges) Nuklid bis $A \simeq 150$.

Aus den Bindungsenergien könnten ${}^5\text{H}$, ${}^5\text{He}$, ${}^5\text{Li}$ und ${}^5\text{Be}$ existieren, die zwei ersten bzw. letzten dieser Kerne haben aber eine negative Separationsenergie S_p für Protonen bzw. S_n für Neutronen, so dass sie eigentlich ungebunden sind.

Mit $A = 8$ Nukleonen sind ${}^8\text{He}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^8\text{B}$ und ${}^8\text{C}$ bekannt, mit positiven Bindungsenergien, alle sind aber instabil: ${}^8\text{C}$ ist zu protonenreich und hat eine negative Separationsenergie für Protonen; ${}^8\text{He}$, ${}^8\text{Li}$ und ${}^8\text{B}$ wandeln sich in weniger als eine Sekunde durch β -Radioaktivität in ${}^8\text{Be}$ um, der die kleinste Masse hat und somit β -stabil ist. Schließlich zerfällt trotz seiner schon hohen Bindungsenergie pro Nukleon ${}^8\text{Be}$ instantan in zwei α -Teilchen, die noch stabiler sind.

Literatur zum Kapitel I

- Basdevant, Rich & Spiro, *Fundamentals in nuclear physics* [1], Kap. 1.1–1.2.
- Bethge, Walter & Wiedemann, *Kernphysik* [2], Kap. 2 & 3.
- Cottingham & Greenwood, *An introduction to nuclear physics* [3], Kap. 4.1–4.4.
- Friedmann, *Einführung in die Kernphysik* [4], Kap. 6 & 8.5–8.6.
- Mayer-Kuckuk, *Kernphysik* [5], Kap. 2.
- Povh, Rith, Scholz & Zetsche, *Teilchen und Kerne* [6], Kap. 2.1–2.2 & 5.

KAPITEL II

Struktur von Kernen. Kernmodelle

II.1	Phänomenologie	29
II.2	Tröpfchenmodell	30
II.2.1	Bethe–Weizsäcker Massenformel	31
II.2.2	Stabilität im Tröpfchenmodell	33
II.2.3	Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation	35
II.3	Atomkern als ideales Fermi-Gas	36
II.3.1	Ideales Fermi-Gas	36
II.3.2	Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen	37
II.3.3	Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas	39
II.3.4	Mögliche Verbesserungen des Modells	41
II.4	Schalenmodell des Atomkerns	41
II.4.1	Motivation für ein Schalenmodell	42
II.4.2	Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns	44
II.4.3	Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung	51
II.4.4	Konstruktion des A -Teilchen-Zustands	54
II.4.5	Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	54
II.4.6	Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells	58

II.1 Phänomenologie

- Es gibt ungefähr 250 stabile Kerne (d.h. Nuklide ohne bisherigen beobachteten Zerfall, entsprechend einer mittleren Lebensdauer $T_{1/2} \gtrsim 10^{20}$ Jahre), davon⁽²²⁾

Z	N	
gerade	gerade	145 „gg-Kerne“
gerade	ungerade	53 „gu-Kerne“
ungerade	gerade	48 „ug-Kerne“
ungerade	ungerade	5 „uu-Kerne“

Die stabilen uu-Kerne sind die leichtesten: ${}^2_1\text{H}$ (Deuterium), ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$. Dazu ist der angeregte Zustand mit $E^* = 77,1$ keV und $J_{\text{Kern}} = 9^-$ vom ${}^{180}_{73}\text{Ta}$ -Nuklide mit der Halbwertszeit $T_{1/2} > 2,9 \cdot 10^{17}$ Jahre besonders *metastabil*.

Außerdem gibt es 35 instabile Nuklide mit einer sehr langen Halbwertszeit größer als 10^8 Jahre (und sogar größer als 10^{10} Jahre für 32 davon). Darunter sind 23 gg-Kerne, 3 gu-Kerne, 5 ug-Kerne und 4 uu-Kerne (insbesondere ${}^{40}\text{K}$).

- Die meisten stabilen bzw. gebundenen Kerne haben $Z \leq N$: die Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen wirkt destabilisierend auf protonenreiche Kerne.

⁽²²⁾Referenz [24] beinhaltet eine moderne Datenbank von Kerneigenschaften, mit insbesondere dem Spin und der Parität der Kerne, sowie den Halbwertszeiten der instabilen Nuklide.

Der relative Neutronenüberschuss bzw. das Verhältnis N/Z wächst mit der Massenzahl A : N/Z nimmt von 1 bei den leichten stabilen Kernen auf 1,54 beim schwersten stabilen Kern $^{208}_{82}\text{Pb}$ und 1,59 bei dem langlebigen $^{238}_{92}\text{U}$ zu.

- Bindungsenergie (vgl. § I.3.2) $B(Z, A) \equiv [Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A)] c^2$

Die Bindungsenergie pro Nukleon $B(Z, A)/A$ ist in erster Näherung konstant für $A \gtrsim 20$: $B(Z, A)/A \approx 7,5 - 8,5 \text{ MeV}$ (Abb. I.11).

- Es gibt manchmal viele stabile Isotope mit einer der *magischen Zahlen* $Z = 8, 20, 28, 50, 82$ — z.B. 10 stabile $_{50}\text{Sn}$ -Isotope (Zinn) —, sowie viele stabile Isotone mit $N = 8, 20, 28, 50, 82, 126$. Außerdem sind solche Nuklide (und ^4_2He : $Z = N = 2$) besonders stabil im Bezug auf ihre Nachbarn (mehr dazu in § II.4.1).
- Aus der Systematik der gemessenen Spins und Paritäten (J_{Kern}^P) sowie magnetischen Dipolmomenten (μ) und elektrischen Quadrupolmomenten (Q) von Atomkernen (s. Ref. [24] oder Experimente 56-57 in Ref. [8]) lassen sich ein paar Regelmäßigkeiten beobachten:
 - für alle gg-Kerne sind $J_{\text{Kern}}^P = 0^+$ und $\mu = 0$;
 - die Parität der ug- bzw. gu-Kerne ändert sich oft bei einem der oben erwähnten magischen Protonen- bzw. Neutronenzahlen; sonst bleibt die Parität zwischen zwei aufeinanderfolgenden magischen Zahlen in den meisten Fällen unverändert;
 - die magnetischen Dipolmomente der ug-Kerne sind bis auf einige Ausnahmen immer positiv und nehmen mit wachsendem Kernspin zu; bei gu-Kernen existiert keine solche Tendenz;
 - bei den magischen Protonenzahlen ändert sich das Vorzeichen des elektrischen Quadrupolmoments: Q ist positiv unterhalb einer magischen Zahl, negativ oberhalb.

Verschiedene Kernmodelle werden eingeführt, um diese gemessenen Eigenschaften zu beschreiben bzw. zu erklären. Es soll aber sofort klar sein, dass „Various models of the nucleus emphasize different features of the nucleus. No single simple model explains all nuclear properties“ (E.Fermi: Kap. 8, Abschnitt H in Ref. [30]). Um die oben erwähnten Eigenschaften teilweise wiederzugeben werden in den drei folgenden Abschnitten drei Modelle des Atomkerns eingeführt, die unterschiedlichen Beschreibungsarten mit Betonung auf diversen Aspekten entsprechen.

II.2 Tröpfchenmodell

In Abschn. I.2 wurde die gute Beschreibung der Ladungsdichteverteilungen von (stabilen) Atomkernen mit $A \geq 20$ mithilfe der Woods–Saxon Verteilung (I.21) erwähnt. Dementsprechend ist die Teilchendichte $n(0)$ im Zentrum des Kerns in guter Näherung dieselbe für alle schweren Kerne: $n(0) \simeq n_\infty = 0,17 \text{ Nukleonen/fm}^3$. Diese Universalität liegt zugrunde dem Begriff der *Kernmaterie*,^(xxxii) d.h. einer Art Materie, die aus stark wechselwirkenden Nukleonen besteht.⁽²³⁾ Die *Sättigungsdichte* n_∞ ist dann die Dichte dieser Kernmaterie im Gleichgewicht bei verschwindender Temperatur T .⁽²⁴⁾

⁽²³⁾ Um eine Art von Materie puristisch zu definieren, muss man zuerst ein unendliches System von wechselwirkenden Nukleonen betrachten.

⁽²⁴⁾ Unter üblichen Bedingungen ist die Temperatur T solche, dass die kinetische Energie $\simeq k_B T$ der Nukleonen viel kleiner ist, als die typische Energie in der Kernphysik $\approx 1\text{--}10 \text{ MeV}$. Nicht-vernachlässigbare Temperaturen bzw. kinetische Energien werden nur in der allerletzten Phase des Lebens schwerer Sterne erreicht, oder in Kernkollisionen.

^(xxxii) nuclear matter

Die Eigenschaften der Kernmaterie sind bei $T = 0$ jene einer (kompressiblen) Flüssigkeit:
 – die Kohäsionskräfte sind stark genug, um spontane Verdampfung zu verhindern (es existieren stabile gebundene Kerne!); kein Gas;
 – die Kernmaterie besitzt kontinuierliche Rotations- und Translationssymmetrie, sie ist also kein Festkörper.

In diesem Bild ist ein Atomkern als ein Tröpfchen von Kernmaterie dargestellt: ein bestimmter Kern wird nur durch seine Massenzahl A (bzw. seinen Radius $\propto A^{1/3}$) und seine elektrische Ladung Z charakterisiert; der Rest seiner Eigenschaften sollen jene der Kernmaterie spiegeln. In diesem Modell besteht die Bindungsenergie des Kerns aus nur ein paar Beiträgen, und zwar zuerst einem Volumen- und einem Oberflächenterm mit umgekehrtem Vorzeichen. Da der Kern elektrisch geladen ist, soll auch ein betreffender „Coulomb“-Term der Energie beitragen.

Neben diesen Beiträgen können weitere Terme ins Modell eingeführt werden, um verschiedene Kerneigenschaften wiederzugeben. Im Folgenden werden nur zwei solche halb-phänomenologische Beiträge betrachtet, die Vorhersagen über die Stabilität von Kernen ermöglichen.

II.2.1 Bethe–Weizsäcker Massenformel

Die Bindungsenergie wird als die Summe verschiedener Beiträge geschrieben [31, 32]:

$$B = B_V + B_S + B_C + B_A + B_\delta, \quad (\text{II.1})$$

wobei $B_V, B_S, B_C, B_A, B_\delta$ von (A, Z) und von positiven Koeffizienten $a_V, a_S, a_C, a_A, a_\delta$ abhängen.

- Volumenenergie $B_V = a_V A$ (Nukleonenzahl $A \propto$ Volumen V)
 Dieser Term entspricht einer konstanten Energiedichte ($\Leftrightarrow$ konstanten Teilchendichte);
 a_V wird manchmal *Sättigungsenergie* genannt.
- Oberflächenterm $B_S = -a_S A^{2/3}$ (Oberfläche $S \propto R^2 \propto A^{2/3}$)
 Die Nukleonen an der Oberfläche sind weniger gebunden als solche im Inneren, weil sie weniger Nachbarn besitzen.
- Coulomb-Term $B_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$ ($\propto Q^2/R$)
 Die Z Protonen stoßen einander ab: verringerte Bindung.

Es sei eine homogen geladene Kugel mit dem Radius r' und der Ladungsdichte ρ_{el} . Für Abstände $r \geq r'$ erzeugt sie das elektrostatische Coulomb-Potential $U(r) = q'/4\pi\epsilon_0 r$, wobei $q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho_{\text{el}}$.

Um weitere Ladungen vom Unendlichen zuzuführen, z.B. eine Kugelschale mit dem inneren bzw. äußeren Radius r' bzw. $r' + dr'$, entsprechend einer Ladung $dq' = 4\pi r'^2 dr' \rho_{\text{el}}$, muss man eine Arbeit $\delta W = -dq' [U(\infty) - U(r')] = U(r') dq'$ leisten. Um einen Kern mit dem Radius $r' = R$ und der Ladung $Ze = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{el}}$ zu kondensieren benötigt man insgesamt eine Arbeit

$$W = \int_0^R dW = \frac{4\pi\rho_{\text{el}}^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r'^4 dr' = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}.$$

Mithilfe der Formel $R = r'_0 A^{1/3}$ wobei $r'_0 = 1,128$ fm erhält man also $a_V = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r'_0} = 0,77$ MeV.

Dieser Term kann experimentell mithilfe von sog. *Spiegelkernen*^(xxxi) bestimmt werden, d.h. einem Paar von Kernen mit (Z, N) und $(Z - 1, N + 1 = Z)$ [z.B. (${}^3_2\text{He}$, ${}^3_1\text{H}$), (${}^{13}_7\text{N}$, ${}^{13}_6\text{C}$)]: die Differenz zwischen den Bindungsenergien der Kerne lautet

$$\Delta B = a_C \left(\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{(Z-1)^2}{A^{1/3}} \right) = a_C \frac{2Z-1}{A^{1/3}} = a_C A^{2/3}.$$

Aus einer Anpassung der $\Delta B(A)$ -Abhängigkeit für die vorhandenen Spiegelkernpaare wird dann a_C erhalten (vgl. z.B. Ref. [33]).

^(xxxi)mirror nuclei

- Asymmetrie-Energie $B_A = -a_A(A/2 - Z)^2 A^{-1}$
Quantenmechanische Effekte (s. § II.3.3) im Bezug auf die gemessene annähernde Ladungsunabhängigkeit der Nukleon–Nukleon-Kräfte bevorzugen einen möglichst kleinen Neutronenüberschuss. Umgekehrt sind Kerne mit hohen Werten von $N - Z = A - 2Z$ weniger gebunden.

- Paarungsterm B_δ

Motiviert durch die Beobachtung, dass es mehr Kerne mit geraden Protonen- und Neutronenzahl gibt, als mit ungerader Z oder N :

$$B_\delta = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

wobei $\delta = a_\delta A^{-1/2}$ (oder manchmal $\propto A^{-3/4}$: die A -Abhängigkeit ist rein empirisch).

Insgesamt erhält man die Bethe^(ak)–Weizsäcker^(al) Massenformel

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A (Z - \frac{A}{2})^2 A^{-1} \pm \delta}{c^2}. \quad (\text{II.2})$$

Die verschiedenen Koeffizienten werden durch Anpassung den experimentellen Daten bestimmt. Man findet z.B. $a_V = 15,85$ MeV, $a_S = 18,34$ MeV, $a_C = 0,71$ MeV, $a_A = 92,86$ MeV, $a_\delta = 11,46$ MeV [34]. Der angepasste Wert des Parameters a_C ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der elektrostatischen Berechnung. Mit diesen Parametern liefert die Massenformel (II.2) eine sehr gute Beschreibung der gemessenen Massen bzw. Bindungsenergien stabiler Kerne, mit einer Genauigkeit von etwa 1% für $A > 30$, vgl. Abb. II.1.

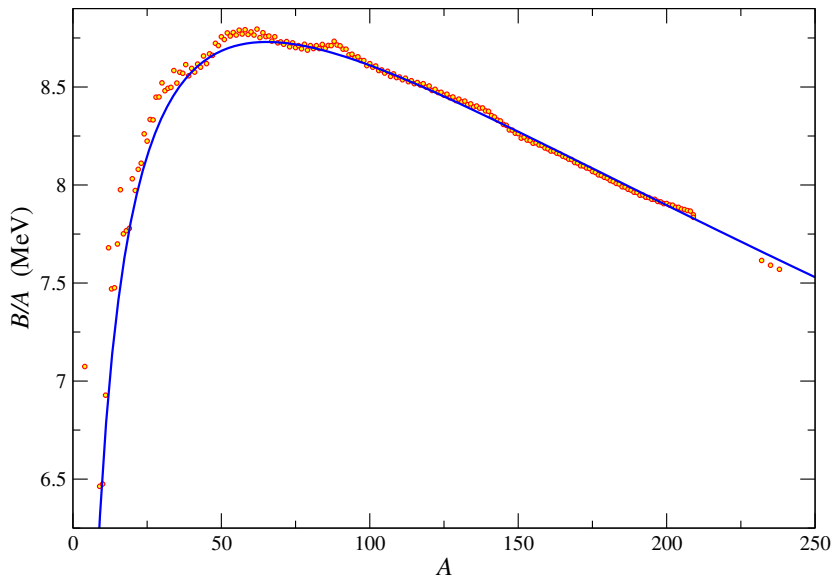


Abbildung II.1 – Bindungsenergien pro Nukleon stabiler Kerne (vgl. Bildtext von Abb. I.11) zusammen mit der durch Gl. (II.1) gegebenen Anpassung unter Auslassung des Paarungsterms B_δ .

Die jeweiligen Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie werden in Abb. II.2 dargestellt: Die Oberflächenenergie spielt die größte Rolle bei kleinen Kernen, B_S/A sinkt aber mit wachsender A . Im Gegensatz sind die relativen Höhen der Coulomb- und Asymmetrie-Terme bei leichten Kernen gering, nehmen aber bei schwereren Kernen zu.

^(ak)H. BETHE, 1906–2005 ^(al)C. F. VON WEIZSÄCKER, 1912–2007

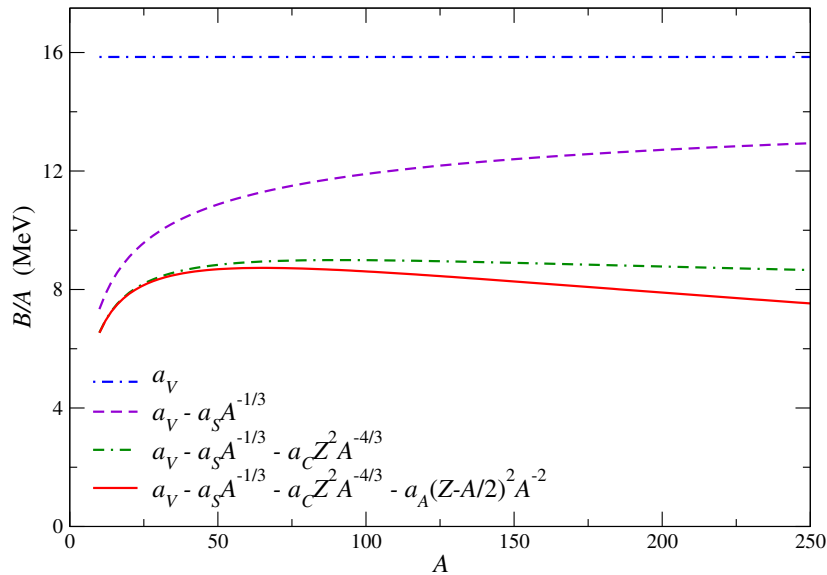


Abbildung II.2 – Jeweilige Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon. Für Z wurde der durch Gl. (II.3) gegebene Wert des stabilsten Kerns bei gegebener A benutzt.

In einigen Büchern wird der Coulomb-Beitrag als $B_C = -Z(Z-1)/A^{1/3}$ statt des oben gegebenen Terms geschrieben. Der angebliche Grund ist, die „Selbstwechselwirkung“ jedes Protons nicht zweimal zu zählen. Eine solche Verfeinerung wird im Folgenden nicht betrachtet: Erstens ist der Unterschied zwischen Z^2 und $Z(Z-1)$ nur bedeutsam bei kleinem Z , wo der Coulomb-Term immerhin eine geringe Rolle spielt. Zweitens ist es nicht klar, warum im Zähler der „Selbstenergie“ der Protonen der Kernradius vorkommt, und nicht etwa der Protonenradius.

II.2.2 Stabilität im Tröpfchenmodell

Aus der Massenformel (II.2) kann man die Stabilität eines Nuklids gegenüber verschiedenen möglichen Umwandlungen bestimmen.

II.2.2 a Stabilität in einer Isobarenreihe

Betrachte man zum Beispiel die Variation der Kernmasse innerhalb einer Isobarenreihe $A = \text{konst.}$ Nach Gl. (II.2) hängt für feste Massenzahl A die Masse quadratisch von Z ab. Dann gibt es zwei Möglichkeiten je nachdem, ob A ungerade oder gerade ist:

- ungerade A : Der Paarungsterm B_δ verschwindet für gu- und ug-Kerne, deren Massen auf einer einzigen Parabel zusammenliegen (Abb. II.3 links). Nur ein Kern mit der möglichst minimalen Masse ist stabil, in den die anderen durch vorlaufende β^+ - oder β^- -Zerfälle sich umwandeln können.⁽²⁵⁾
- gerade A : Der Massenformel nach liegen die Massen der gg- bzw. uu-Kerne auf zwei verschiedenen Parabeln (Abb. II.3 rechts). Da kein direkter Übergang zwischen Isobaren mit Z und $Z \pm 2$ möglich ist,⁽²⁶⁾ können mehrere stabile gg-Isobare existieren. Andererseits kann ein uu-Kern nur stabil sein, wenn es kein gg-Isobar mit einer niedrigeren Masse gibt.⁽²⁷⁾

Somit wird die 1934 experimentell entdeckte *Mattauchsche Isobarenregel* erklärt, dass der Unterschied der Protonenzahlen zweier stabiler Isobare mindestens 2 sein soll [35].

⁽²⁵⁾ Um genauer festzulegen, ob ein β^- - bzw. β^+ -Zerfall energetisch möglich ist, muss man auch die Masse des emittierten Elektrons bzw. Positrons berücksichtigen, s. § ??.

⁽²⁶⁾ Tatsächlich gibt es auch die Möglichkeit eines *doppelten* β -Zerfalls.

⁽²⁷⁾ Da die Breite der Parabeln mit A wächst, wird das mögliche Vorhandensein eines gg-Isobars mit niedrigerer Masse wahrscheinlicher mit steigender Massenzahl; deshalb sind die einzigen stabilen uu-Kerne die leichtesten.

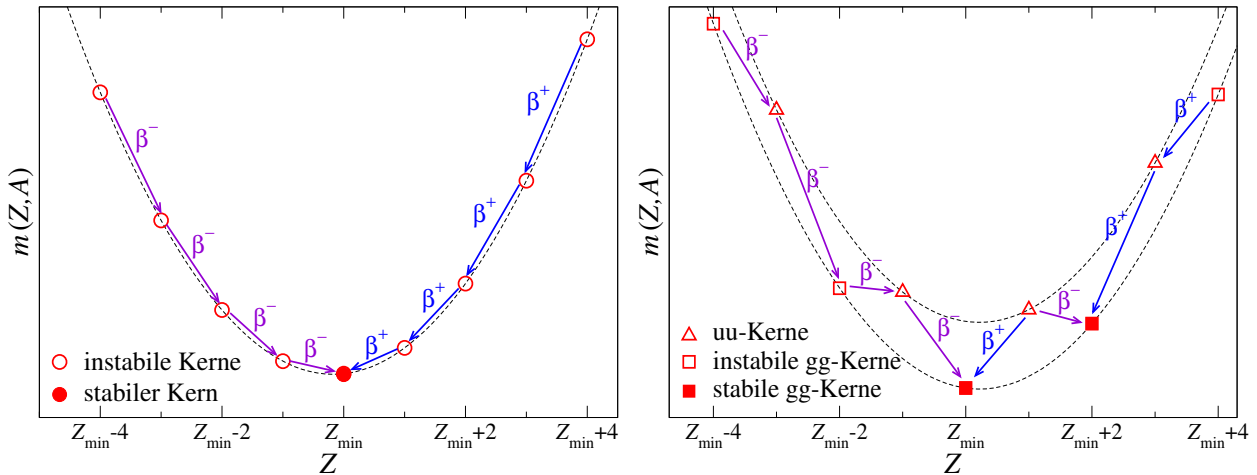


Abbildung II.3 – Variation mit Z der Masse $m(Z, A)$ in einer Isobarenreihe für ungerade (links) bzw. gerade (rechts) Massenzahl A .

Die Protonenzahl $Z_{\min}$ des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe wird durch die Bedingung $\partial m(Z, A)/\partial Z = 0$ gegeben. Mit Gl. (II.2) findet man

$$Z_{\min}(A) = \frac{A a_A + (m_n - m_p)c^2}{2 \frac{a_A + a_C A^{2/3}}{1,97 + 0,015 A^{2/3}}} = \frac{A}{1,97 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (\text{II.3})$$

Der entsprechende Verlauf (β -Stabilitätslinie, *Stabilitätstal*)^(xxxiv) wird in Abb. II.4 dargestellt. Für kleines A liefert diese Gleichung $Z_{\min} \simeq A/2$, während $Z_{\min}$ für größere Massenzahl immer kleiner als $A/2$ wird: somit wird der beobachtete zunehmende relative Neutronenüberschuß erklärt.

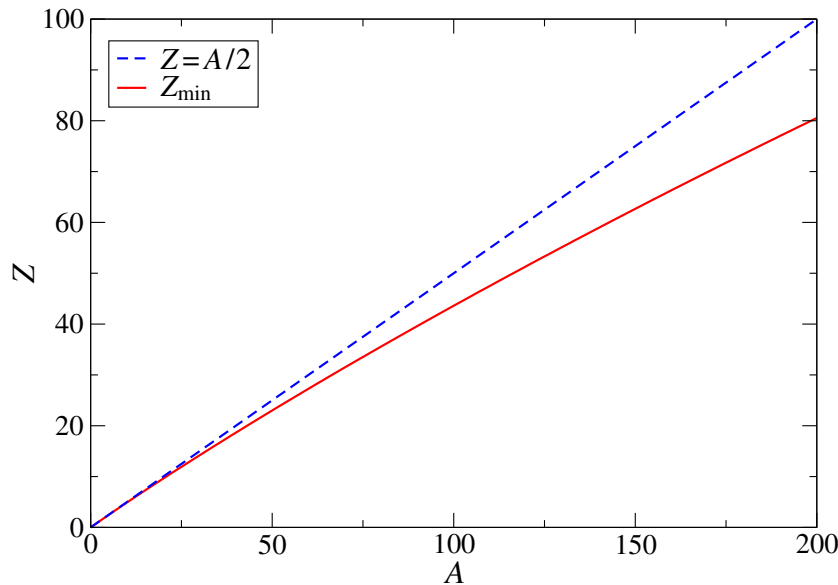


Abbildung II.4 – Protonenzahl $Z_{\min}$ des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe, Gl. (II.3).

II.2.2b Stabilität gegenüber α -Zerfall

Ein Kern ist gegenüber α -Zerfall (= Emission eines ${}^4_2\text{He}$ -Kerns) energetisch instabil, wenn seine Masse größer als die Summe der Massen eines ${}^4_2\text{He}$ -Kerns und des Kerns mit $Z - 2$ und $A - 4$ ist:

$$Q_\alpha \equiv [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m({}^4_2\text{He})]c^2 \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

Q_α ist dann die Summe der kinetischen Energien des emittierten α -Teilchens und des zurückstoßenden Tochterkerns (s. § ??).

^(xxxiv) valley of stability

Der Massenformel (II.2) nach wird Q_α positiv für die Kerne auf der β -Stabilitätslinie sobald $A \geq 166$ ($Z_{\min} = 68$): Kerne mit größerer Massenzahl sollten gegen die Emission von α -Teilchen instabil sein.⁽²⁸⁾ Der erste α -instabile Kern im Stabilitätstal ist tatsächlich ${}^{144}_{60}\text{Nd}$ mit $Q_\alpha = 1,9$ MeV und der Halbwertszeit $T_{1/2} = 2,3 \cdot 10^{15}$ Jahren (s. § ??).

II.2.2c Stabilität gegen spontane Spaltung

Betrachte man der Einfachheit halber die Spaltung eines Kerns in zwei identische Bruchstücke. Diese Spaltung ist energetisch möglich wenn der Q_{Sp} -Wert

$$Q_{\text{Sp}} \equiv \left[m(Z, A) - 2m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) \right] c^2 = 2B\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) - B(Z, A) \quad (\text{II.5})$$

positiv ist. Mithilfe der Massenformel (II.2) findet man unter Auslassung des Paarungsterms

$$Q_{\text{Sp}} = a_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}).$$

Dies wird positiv sobald $\frac{Z^2}{A} > \frac{(2^{1/3} - 1)a_S}{(1 - 2^{-2/3})a_C} = 18,14$, d.h. für Kerne im β -Stabilitätstal ab ${}^{95}_{42}\text{Mo}$.

Der leichteste β -stabile Kern mit beobachteter spontaner Spaltung ist aber erheblich schwerer: ${}^{232}_{90}\text{Th}$ (s. § ??).

II.2.3 Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation

Betrachten wir die Vorhersage des Tröpfchenmodells zur Stabilität eines makroskopisch großen Objekts aus Kernmaterie. Deswegen führen wir in die Bindungsenergie (II.1) einen zusätzlichen Beitrag ein, der der Gravitationsbindungsenergie des Objekts entspricht:

$$B_G \equiv \frac{3}{5} \frac{G_N m^2}{R},$$

wobei G_N die Newtonsche Konstante ist, und m bzw. R die Masse bzw. der Radius des Objekts ist. Dieser Beitrag ist für übliche Kerne vernachlässigbar.

Sei angenommen, dass das Objekt meistens aus Neutronen besteht, sodass $Z \ll N \approx A$ und der Coulomb-Term in Gl. (II.1) vernachlässigbar ist. Die Masse ist dann $m = A m_n$ (der Einfachheit halber wird der Beitrag der gesamten Bindungsenergie zu diesem Term vernachlässigt). Für ein großes Objekt ($A \gg 1$) werden der Oberflächenterm und der Paarungsterm viel kleiner als B_V , B_A und B_G . Mit dem Wert des „Kern“-Radius $R = r'_0 A^{1/3}$ erhält man

$$B \simeq a_V A - \frac{a_A}{4} A + \frac{3}{5} \frac{G_N m_n^2}{r'_0} A^{5/3}.$$

Das Objekt wird gebunden, wenn diese Bindungsenergie positiv ist, d.h. wenn

$$\frac{3}{5} \frac{G_N m_n^2}{r'_0} A^{2/3} > \frac{a_A}{4} - a_V = 7,4 \text{ MeV}.$$

Mit $r'_0 = 1,28$ fm entspricht diese Bedingung einem minimalen Wert $A > 4 \cdot 10^{55}$, d.h. einem Radius $R > 4$ km und einer Masse $m > 7 \cdot 10^{28}$ kg $\approx 0,035 M_\odot$ ($M_\odot$: Sonnenmasse): das Objekt ist also ein Neutronenstern.⁽²⁹⁾

⁽²⁸⁾ Wenn anstatt der nach der Massenformel berechneten Werte die gemessenen Kernmassen benutzt werden, schneidet die Kurve $Q_\alpha = 0$ die Stabilitätslinie bei $A \approx 145$.

⁽²⁹⁾ Das hier benutzte Modell ist viel zu vereinfacht, um einen echten Neutronenstern gut zu beschreiben. Zum Beispiel wurde stillschweigend angenommen, dass die den Neutronenstern bildende Kernmaterie inkompressibel ist (dies entspricht $a_V = \text{konst.}$, unabhängig von der Tiefe im Stern). Es ist aber hoch merkwürdig, dass die guten Größenordnungen des Radius (~ 10 km) und der Masse ($\approx 1 M_\odot$) erhalten werden, obwohl die Werte der Koeffizienten in Gl. (II.2) nur geeignet sind, um die Eigenschaften von Kernmaterie mit $A \lesssim 250$ zu beschreiben, nicht für A um ≈ 50 Zehnerpotenzen größer. Dies zeigt, dass die starke Wechselwirkung wahrscheinlich eine ganz ähnliche Rolle in Neutronensternen wie in Kernen spielt.

II.3 Atomkern als ideales Fermi-Gas

In diesem Abschnitt und dem folgenden wird die quantenmechanische Natur der einen Atomkern bildenden Nukleonen genauer berücksichtigt als im Tröpfchenmodell. Zu diesem Zweck wird ein Kern als eine Menge von in einem Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen beschrieben.

Die zugrundeliegende Idee der Modelle ist, dass sich die Wirkung aller anderen Nukleonen auf ein beliebiges Nukleon effektiv zu einem „mittleren“ Potential mitteln lässt, welches das Nukleon in einem kleinen Raumbereich — entsprechend dem Kernvolumen — einsperrt und identisch für alle Nukleonen ist. Löst man das quantenmechanische Problem eines Teilchens im mittleren Potential, so findet man verschiedene gebundene Ein-Teilchen-Zustände auf sukzessiven Energieniveaus, die das Nukleon besetzen kann. Ein den Atomkern darstellender Viel-Teilchen-Zustand ergibt sich dann, indem die A Nukleonen auf solche Ein-Teilchen-Zustände verteilt werden. Dabei soll der Spin $\frac{1}{2}$ der Protonen und Neutronen — die somit sog. *Fermionen* sind — berücksichtigt werden: wenn mehrere davon sich im Potentialtopf befinden, gehorchen sie dem Pauli-Prinzip, sodass jeder verfügbare quantenmechanische Ein-Teilchen-Zustand von maximal nur einem Proton bzw. Neutron besetzt werden darf.

Im Fermi-Gas-Modell verzichtet man auf das exakte Spektrum der gebundenen Energieniveaus. Stattdessen verwendet man eine statistische Beschreibung — die eigentlich nur im Fall einer unendlichen Zahl von Teilchen begründet ist — und betrachtet man die im Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen als ein quantenmechanisches „Gas“, wobei die letztere Bezeichnung bedeutet, dass die Wechselwirkungen zwischen den im Potential eingeschlossenen Teilchen klein⁽³⁰⁾ sind. Da es sich bei diesem Gas um Fermionen handelt, spricht man von einem *Fermi-Gas* (§ II.3.1). Hiernach wird der Atomkern zunächst als ideales Fermi-Gas aus Nukleonen (§ II.3.2), dann als ideale Mischung zweier idealer Fermi-Gase aus Protonen und Neutronen (§ II.3.3) beschrieben. Durch diesen Ansatz lassen sich einige Eigenschaften des Atomkerns erklären, wie hiernach am Beispiel der in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel phänomenologisch eingeführten Asymmetrie-Energie illustriert wird.

II.3.1 Ideales Fermi-Gas

Im Folgenden werden die elementaren Grundlagen der Theorie des idealen quantenmechanischen Fermi-Gases bei Null-Temperatur kurz dargelegt. Ausführlichere Darstellungen sind in Lehrbüchern der Statistischen Physik zu finden, z.B. in Refs. [36, 37].

Eine Menge aus $\mathcal{N}$ nicht-wechselwirkenden Teilchen — ein ideales Gas — sei in einem räumlichen Volumen $\mathcal{V}$ eingeschlossen, z.B. durch das Kastenpotential $V(\vec{r}) = 0$ wenn $\vec{r} \in \mathcal{V}$, $V(\vec{r}) = \infty$ sonst. Für große Volumina wird der Abstand zwischen sukzessiven Energieniveaus sehr gering und man kann annehmen, dass die Niveaus ein fast kontinuierliches Spektrum bilden. Genauer ergibt sich, dass die Anzahl von Teilchen mit einem Impuls zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + d^3\vec{p}$ durch

$$d\mathcal{N}(\varepsilon_{\vec{p}}) = g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\text{II.6})$$

gegeben ist, wobei $\varepsilon_{\vec{p}}$ die mit dem Impuls $\vec{p}$ assoziierte Energie ist: für nicht-relativistische Teilchen mit der Masse m , $\varepsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$, wobei die Massenenergie weggelassen wurde. g ist der *Entartungsgrad*^(xxxv) der Teilchen, d.h. die Zahl von unabhängigen (inneren) Freiheitsgraden einer bestimmten Teilchenart: für Teilchen mit dem Spin s gilt üblicherweise $g = 2s + 1$, entsprechend der Anzahl der möglichen Werte von m_s .⁽³¹⁾

⁽³⁰⁾ Genauer soll die mit diesen Wechselwirkungen assoziierte potentielle Energie klein gegenüber die kinetische Energie der Teilchen sein.

⁽³¹⁾ Es gibt aber wichtige Ausnahmen zu dieser Regel, wie z.B. bei Photonen, die in nur $g = 2$ Polarisationszuständen vorkommen können, obwohl sie Teilchen mit dem Spin 1 sind.

^(xxxv) degeneracy factor

Schließlich bezeichnet $f(\varepsilon)$ die mittlere Besetzungszahl eines Zustands mit der Energie ε . Die funktionale Form von $f(\varepsilon)$ hängt von der Teilchenart ab, und zwar davon, ob die Teilchen einen ganzzahligen (Boson) oder halbzahligen (Fermionen) Spin haben. Hiernach werden nur Protonen und Neutronen, also Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, betrachtet. Daher kann jeder Zustand laut dem Pauli-Ausschlussprinzip durch maximal ein Teilchen besetzt werden: die Besetzungszahl eines Zustands ist entweder 0 und 1, und die genaue mittlere Besetzungszahl hängt von der Temperatur ab. Hiernach wird angenommen, dass das die Nukleonen ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur Null bilden, was sich im Nachhinein prüfen lässt. In diesem Fall ist

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0 & \text{für } \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

wobei ε_F die sog. *Fermi-Energie* ist, die somit die Energie des höchsten besetzten Niveaus ist, während tiefere Energieniveaus voll besetzt sind.

Integriert man Gl. (II.6) über Energien ε von 0 bis ∞ , so soll man die Gesamtzahl von Teilchen $\mathcal{N}$ erhalten. Äquivalent kann man über alle Impulse $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ integrieren. Da die Besetzungszahl nur von $\varepsilon_{\vec{p}}$ und dadurch vom Betrag $p \equiv |\vec{p}|$ abhängt, eignen sich Kugelkoordinaten im Impulsraum für das Integral. Dabei kann man sofort über die Winkeln, die keine Rolle spielen, integrieren, und somit $d^3\vec{p}$ durch $4\pi p^2 dp$ ersetzen, wobei p von 0 bis ∞ läuft. Assoziiert man der Fermi-Energie einen *Fermi-Impuls* p_F , so kann man die obere Grenze des Integrals durch p_F ersetzen, denn die Niveaus mit höherem Impuls sind bei Null-Temperatur unbesetzt. Somit ergibt sich

$$\mathcal{N} = \int_0^\infty g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{g\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{g\mathcal{V}}{6\pi^2\hbar^3} p_F^3. \quad (\text{II.8})$$

Hiernach wird diese Formel für zwei verschiedene Modellierung des Atomkerns angewandt.

II.3.2 Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen

In diesem und im nächsten Abschnitt wird der Atomkern als ideales Fermi-Gas modelliert, d.h. die Kräfte zwischen den Nukleonen werden ignoriert — genauer besteht die einzige Rolle der Wechselwirkungen darin, den Potentialtopf zu erzeugen; im Potential wechselwirken die Nukleonen nicht mehr miteinander.

Die Beschreibung des Kerns als Gas von voneinander unabhängigen Teilchen kann wegen des kleinen Abstands zwischen Nukleonen und der entsprechenden starken Nukleon–Nukleon Wechselwirkung zwar überraschend wirken. Im Grundzustand des Kerns sind aber alle niedrigsten Zustände im (effektiven) Potentialtopf durch Nukleonen besetzt, sodass irgendeine Streuung zwischen Nukleonen kaum stattfinden kann: die in der Kollision beteiligten Nukleonen können nämlich nach dem Stoß keine vorhandene freie Zustände finden, was effektiv die Streuung verhindert. Deshalb liefert die Beschreibung als ein wechselwirkungsfreies System eine ziemlich gute Approximation.

Der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen kann in einem ersten Schritt vernachlässigt werden. In diesem Abschnitt wird somit ein ideales Gas aus zwei Fermionentypen mit je dem Spin $\frac{1}{2}$ und derselben Masse $m_p = m_n = m_N$, und ohne elektrische Ladung betrachtet. Der Entartungsgrad dieser Nukleonen ist somit $g = 4$, entsprechend 2 Spinzuständen für jede Teilchenart.

Verwendet man die Beziehung (II.8) mit der Nukleonenzahl A des Kerns als Gesamtzahl von Teilchen auf der linken Seite und mit $g = 4$ und dem Volumen $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Kern}}$, so ergibt sich

$$A = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,N}^3, \quad (\text{II.9})$$

wobei $p_{F,N}$ den Fermi-Impuls für das Fermi-Gas aus Nukleonen bezeichnet. Daraus folgen sofort

$$p_{F,N} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3} \quad (\text{II.10a})$$

und

$$\varepsilon_{F,N} = \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_N} \left(\frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad (\text{II.10b})$$

für die Fermi-Energie $\varepsilon_{F,N}$ des Nukleonen-Gases.

Mit dem Ansatz $\mathcal{V}_{\text{Kern}} = \frac{4}{3}\pi R_s^3 A$ für das Kernvolumen (vgl. § I.2.4 b) erhält man

$$p_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} A^{1/3} \frac{\hbar}{R_s}, \quad \varepsilon_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} A^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2}. \quad (\text{II.11})$$

Mit dem Wert $R_s = 1,128 A^{1/3}$ fm für den äquivalenten Radius ergeben sich $p_{F,N} = 265 \text{ MeV}/c$ und $\varepsilon_{F,N} \simeq 40 \text{ MeV}$. Die bisher nicht spezifizierte Tiefe V_0 des dem Kern bildenden Potentialtopfs muss mindestens diesen Wert haben, damit die Nukleonen im Topf eingeschlossen bleiben. Bei β -stabilen Kernen ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Nukleons etwa 8–10 MeV (§ I.3.3), so dass $V_0 \simeq 50 \text{ MeV}$ sein soll, wie schematisch in Abb. II.5 dargestellt wird.

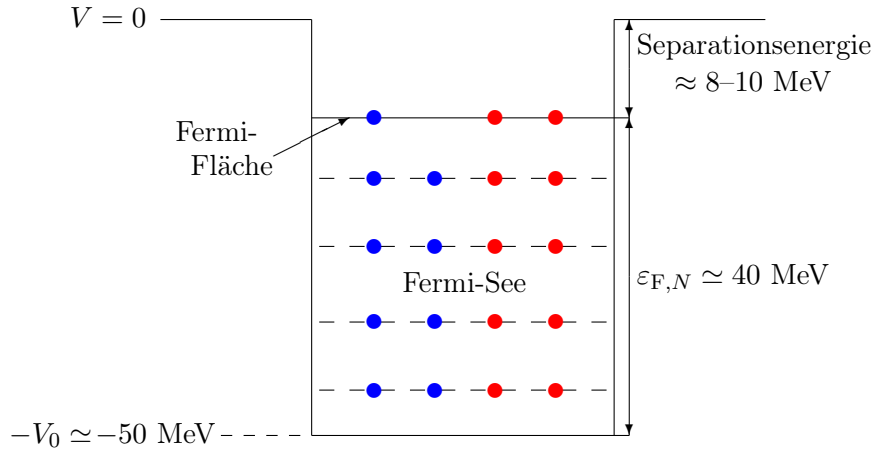


Abbildung II.5 – Schematisches Bild eines ug-Kerns als Einkomponenten-Fermi-Gas aus Nukleonen.

Bemerkungen:

* Man hätte auch die Nukleonendichte im Kern $A/\mathcal{V}_{\text{Kern}} \simeq n_\infty = 0,17 \text{ Nukleonen/fm}^3$ direkt in Gl. (II.10a) einsetzen können, um den Fermi-Impuls

$$p_{F,N} = \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{1/3} \hbar n_\infty^{1/3}$$

dadurch auszudrücken und zu berechnen.

* Wie zu erwarten war ist die Fermi-Energie der typischen Ordnung der Energien der Kernphysik. Definiert man über $k_B T_F \equiv \varepsilon_F$ eine *Fermi-Temperatur*, so ist diese für Atomkerne etwa $4,6 \cdot 10^{11} \text{ K}$. Somit sind übliche Temperaturen von 300 K oder sogar 3000 K viel kleiner als dieser Wert, was die Annahme eines Fermi-Gases bei Null-Temperatur rechtfertigt.

Die gesamte kinetische Energie der A Nukleonen im Kern ist⁽³²⁾

$$E_N = \int \varepsilon d\mathcal{N}(\varepsilon) = \int_0^{p_{F,N}} \frac{p^2}{2m_N} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = \frac{3}{5} \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} A. \quad (\text{II.12})$$

Mit der oben berechneten Fermi-Energie ist die durchschnittliche kinetische Energie pro Nukleon unabhängig von der Nukleonenzahl: $E_N/A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \simeq 24 \text{ MeV}$. Somit gilt $E_N/A \ll m_N c^2$: die

⁽³²⁾ Die letzte Identität folgt aus $\frac{d\mathcal{N}}{dp} \propto p^2$ und $\int_0^{p_{F,N}} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = A$.

Nukleonen sind also nicht relativistisch, wie stillschweigend in der Herleitung angenommen wurde (z.B. in Gl. II.10b).

II.3.3 Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas

Das einfache Modell eines idealen Fermi-Gases von undifferenzierten Nukleonen ist ja nützlich, um Größenordnungen zu erhalten; es leidet aber an einem wichtigen Problem, und zwar dass alle Nuklide in einer Isobarenreihe gleich stabil sind, was offensichtlich falsch ist.

Um diesen Mangel zu beheben wird der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen in diesem Abschnitt berücksichtigt werden. Statt eines einzigen Gases sind jetzt im Potentialtopf zwei verschiedene Fermi-Gase von Protonen bzw. Neutronen mit $m_p \neq m_n$ und unterschiedlichen Fermi-Energien $\varepsilon_{F,p}$ bzw. $\varepsilon_{F,n}$. Für jedes Gas ist der Entartungsgrad jetzt $g = 2$. Die elektrische Ladung des Protons und die daraus folgende Coulomb-Abstoßung wird aber in der Diskussion noch ausgelassen.

Die Beziehung (II.8) angewandt auf jedes Fermi-Gas führt jetzt zu

$$Z = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,p}^3, \quad N = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,n}^3, \quad (\text{II.13})$$

so dass die jeweiligen Fermi-Impulse der Gase durch

$$p_{F,p} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{Z}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3}, \quad p_{F,n} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{N}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3}, \quad (\text{II.14a})$$

und die Fermi-Energien durch

$$\varepsilon_{F,p} = \frac{p_{F,p}^2}{2m_p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_p} \left(\frac{Z}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_{F,n} = \frac{p_{F,n}^2}{2m_n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} \left(\frac{N}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3} \quad (\text{II.14b})$$

gegeben sind. Mit dem Ansatz $\mathcal{V}_{\text{Kern}} = \frac{4}{3} \pi R_s^3$ lautet dies noch

$$p_{F,p} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} Z^{1/3} \frac{\hbar}{R_s}, \quad p_{F,n} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} N^{1/3} \frac{\hbar}{R_s} \quad (\text{II.15a})$$

und

$$\varepsilon_{F,p} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} Z^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_p R_s^2}, \quad \varepsilon_{F,n} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} N^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_n R_s^2}. \quad (\text{II.15b})$$

In Analogie zum einkomponentigen Fermi-Gas ergeben sich die gesamten kinetischen Energien der beiden Gase:

$$E_p = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,p} Z \quad \text{und} \quad E_n = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,n} N. \quad (\text{II.16})$$

Die gesamte kinetische Energie $E \equiv E_p + E_n$ aller Nukleonen des Atomkerns lautet dann

$$E = \frac{3}{5} (\varepsilon_{F,p} Z + \varepsilon_{F,n} N) = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2R_s^2} \left(\frac{Z^{5/3}}{m_p} + \frac{N^{5/3}}{m_n} \right).$$

Dies lässt sich als $E = E_N + \Delta E$ umschreiben, wobei E_N die oben berechnete gesamte kinetische Energie (II.12) des Einkomponenten-Nukleonen-Gases ist. Schreibt man

$$E = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2} \left[A^{5/3} + 2^{2/3} \left(\frac{m_N}{m_p} Z^{5/3} + \frac{m_N}{m_n} N^{5/3} \right) - A^{5/3} \right],$$

so erhält man unter Vernachlässigung der geringen Massendifferenz zwischen Neutron und Proton

$$\Delta E \simeq \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(\frac{2}{A} \right)^{2/3} \left[Z^{5/3} + N^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]. \quad (\text{II.17})$$

Sei $T_3 \equiv \frac{1}{2}(Z - N) = Z - \frac{A}{2}$, was zu $Z = \frac{A}{2} + T_3$ und $N = \frac{A}{2} - T_3$ führt. Die Taylor-Entwicklung von ΔE für $|Z - N| \ll A$ gibt

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(\frac{2}{A} \right)^{2/3} \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \left[\left(1 + \frac{2T_3}{A} \right)^{5/3} + \left(1 - \frac{2T_3}{A} \right)^{5/3} - 2 \right] \\ &\simeq \frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \frac{T_3^2}{A} = \frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die kinetische Energie pro Nukleon E/A

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(1 + \frac{20}{9} \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A^2} \right). \quad (\text{II.18})$$

Für feste Nukleonenzahl A passen symmetrische Kerne in einem seichteren Potentialtopf als asymmetrische Kerne, bzw. wenn $Z - N \neq 0$ kann Energie durch β -Zerfälle kleiner werden: $Z \sim N$ ist eher stabil als $|Z - N|$ groß. Wir können jetzt verstehen, weshalb $Z \sim N$ energetisch günstiger ist. Dazu liefert Gl.(II.18) die Form des Asymmetrieterms in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel.

Da sich ein Neutron durch β -Zerfall in ein Proton umwandeln kann — und umgekehrt, wenn das energetisch möglich ist —, müssen die Fermi-Energien $\varepsilon_{F,p}$, $\varepsilon_{F,n}$ bei einem stabilen Kern wie in Abb. II.6 etwa gleich hoch liegen: es darf kein leeres Niveau zwischen den Fermi-Energien der beiden Gase sein.

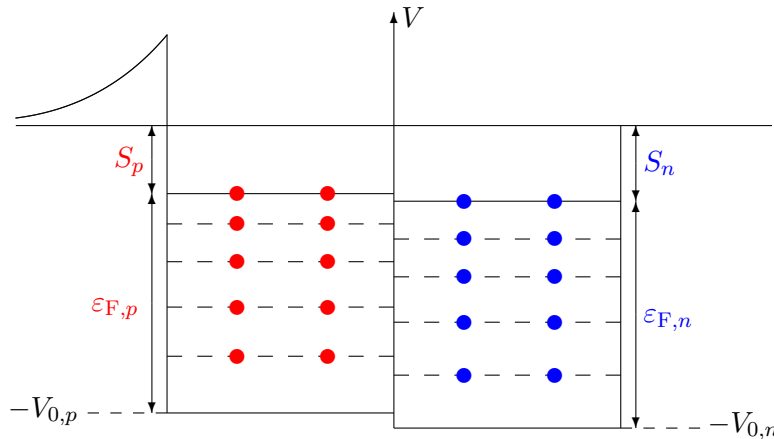


Abbildung II.6 – Schematisches Bild eines gg-Kerns als Fermi-Gas von Protonen und Neutronen unter Berücksichtigung der Korrektur, die durch die Coulomb-Abstoßung bedingt ist. S_p bzw. S_n ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Protons bzw. eines Neutrons.

Bemerkungen:

* Die kinetische Energie pro Nukleon (II.18) sollte mutmaßlich die Größe der in der Bethe–Weizsäcker Massenformel eingeführten Asymmetrie-Energie liefern: mit $\varepsilon_{F,N} \simeq 40$ MeV findet man $a_A = -\frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \simeq 52$ MeV. Das ist ungefähr um einen Faktor 2 kleiner als der durch Anpassung der Daten erhaltene Wert. Die Diskrepanz kommt daraus her, dass die Tiefe des Topfs $-V_0$ selbst vom Neutronenüberschuß $N - Z$ des Atomkerns abhängt.

* Höhere Ordnungen in der Taylor-Entwicklung der Energiedifferenz (II.17) liefern natürlich zusätzliche Terme, die in die Massenformel können eingeführt werden. Zum Beispiel hätte der nächste Beitrag zur Masse pro Nukleon eine Abhängigkeit $(Z - \frac{A}{2})^4/A^4$, was für Nuklide im Stabilitätstal nur eine geringe Korrektur darstellt.

II.3.4 Mögliche Verbesserungen des Modells

II.3.4 a Oberflächen- und Coulomb-Energien

Die Energie pro Nukleon (II.18) basiert letztendlich auf den Gleichungen (II.13), die selbst aus der Teilchenzahl in einem infinitesimalen Impulsraumelement (II.6) folgen. Man kann zeigen, dass diese Teilchenzahl leicht überschätzt ist, weil sie tatsächlich ein unendliches Volumen des Kerns im Ortsraum $\mathcal{V}_{\text{Kern}}$ voraussetzt. Die entsprechende Korrektur zur Energie des Fermi-Gases ist eigentlich proportional zur Oberfläche des Kerns und trägt der Gesamtenergie einen Term proportional zu $A^{2/3}$ bei, der der Oberflächenenergie in der Massenformel II.2 entspricht.

Wegen der Heisenbergschen Unschärferelation kann die Oberfläche eines mit dem endlichen Volumen reellen Kerns nicht fest sein: sonst hätten die Nukleonen an der Oberfläche eine bestimmte Position und $\vec{p} = \vec{0}$, was gleichzeitig unerlaubt ist. Somit fehlen die Zustände mit dem Abstand $|\vec{r}| = R_s$ vom Kernzentrum und dem Impuls $\vec{p} = \vec{0}$, sodass die Gesamtenergie um eine Korrektur $\propto R_s^2$ verringert ist. Eine quantitative Abschätzung der benötigten Korrektur zur Zahl der Zustände, befindet sich z.B. in Abschn. 2.3.1 von Ref. [1].

Dazu sollte die bisher ausgelassene Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen in Betracht gezogen werden. Eine erste einfache Folge dieser Abstoßung ist, dass der Potentialtopf, in dem die Protonen eingeschlossen sind, wegen des destabilisierend wirkenden Coulomb-Terms $\propto -Z^2/A^{1/3}$ (vgl. § II.2.1) seichter ist, d.h. $V_{0,p} < V_{0,n}$, wie in Abb. II.6 dargestellt wird.

II.3.4 b Berücksichtigung der Wechselwirkungen

Abweichung vom Modell des idealen Gases.

II.3.4 c Stärken und Mängel des Fermi-Gas-Modells

Die Beschreibung des Kerns als ein Fermi-Gas liefert zunächst nützliche Größenordnungen, z.B. die kinetische Energie der Nukleonen im Kern. Außerdem erlaubt die oben beschriebene schrittweise Verfeinerung eine Erklärung verschiedener Terme der Bethe-Weizsäcker Massenformel, insbesondere des Asymmetrie-Terms.

Dennoch läßt das Fermi-Gas-Modell die beobachtete bevorzugte Paarung von Protonen bzw. Neutronen in Kerne (d.h. den Paarungsterm B_δ) unerklärt. Des Weiteren kann das Modell keine Auskunft über die Verteilung der Energieniveaus geben: das Energiespektrum eines Fermi-Gases ist nämlich strukturlos bzw. gleichförmig, während die Anwesenheit einer bestimmten Struktur durch verschiedenen Beobachtungen angedeutet wird, z.B. durch die gemessenen Anregungsenergien unterschiedlicher Nuklide (s. Beispiel in § II.4.1).

II.4 Schalenmodell des Atomkerns

Wie gerade diskutiert wurde sind das Tröpfchen- und das Fermi-Gas-Modell statistische Modelle, die naturgemäß nur die globalen Eigenschaften eines statistischen Ensembles von Atomkernen beschreiben können, für individuelle Kerne aber weniger erfolgreich sind. Wie in Abschn. II.1 schon kurz erwähnt wurde, gibt es manchmal ziemlich erhebliche Abweichungen von diesem Durchschnittsverhalten, insbesondere für Nuklide mit einer magischen Protonen- oder Neutronenzahl, die auch müssen erklärt werden. Einige dieser besonderen Eigenschaften der „magischen Atomkerne“ werden erstens in § II.4.1 dargelegt.

Zur Erklärung dieser Eigenschaften sieht es in Analogie zur Atomphysik passend aus, einen Kern als Menge von Protonen und Neutronen in unterschiedlichen Ein-Teilchen-Zuständen zu beschreiben. Dabei befinden sich die Nukleonen auf sukzessiven entarteten Energieniveaus, die als aufeinander folgende Protonen- bzw. Neutronenschalen können betrachtet werden. Somit handelt es sich um ein *Schalenmodell* des Kerns. Der Unterschied mit dem Fermi-Gas-Modell des vorigen Abschnitts liegt darin, dass die genaue Struktur des Energiespektrums jetzt explizit soll betrachtet werden. Dementsprechend spielt die Form des mittleren Potentials, das die Teilchen einschließt, nun eine

Rolle, denn sie bestimmt die Reihenfolge des Energieniveaus (§ II.4.2). Die einfachsten Potentiale mit nur einer Ortsabhängigkeit können die experimentell gefundenen magischen Zahlen aber nicht reproduzieren und man muss ein zusätzliches Ingredienz einbauen, und zwar die Kopplung zwischen dem Spin jedes Nukleons und dessen Bahndrehimpuls II.4.3.

II.4.1 Motivation für ein Schalenmodell

Während die Bethe–Weizsäcker-Massenformel die Massen bzw. Bindungsenergien der stabilen Atomkerne erstaunlich gut wiedergibt, treten für Nuklide mit einer magischen Protonen- oder Neutronenzahl, d.h. $Z \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82\}$ oder $N \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126\}$, relativ große Abweichungen auf, wie in Abb. II.1 zu sehen ist. Genauer sind die Bindungsenergien pro Nukleon solcher Atomkerne größer als das durch die Formel (II.2) durchschnittliche Verhalten, d.h. diese Kerne sind besonders stabil.

Diese erhöhte Stabilität der magischen Kerne spiegelt sich in weiteren Eigenschaften wider:

- Im Vergleich mit ihren unmittelbaren Nachbarn gibt es mehr stabile Isotope bzw. Isotone mit einer magischen Z bzw. N , s. Abb. II.7.

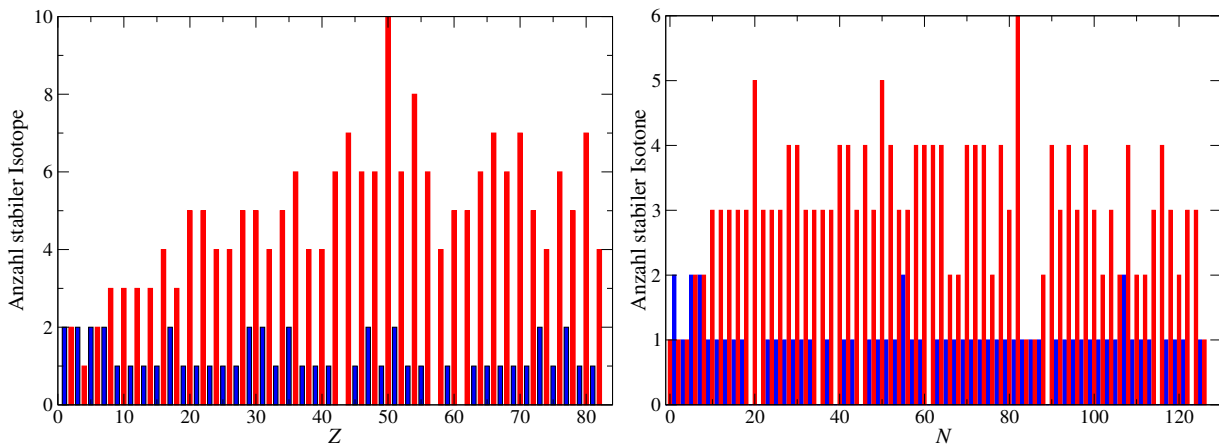


Abbildung II.7 – Links: Anzahl der stabilen Isotope; rechts: Anzahl der stabilen Isotone.

- Die in Abb. II.8 dargestellte kosmische Häufigkeit der Kerne mit magischer Z oder N ist höher als diejenige ihrer Nachbarn. Auf dieser Abbildung merkt man auch den Unterschied zwischen den Häufigkeiten von Nukliden mit gerader bzw. ungerader Protonenzahl Z .

Bemerkung: Es gibt fünf stabile *doppelt magische Kerne*: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$. Diese sind oft an den Grenzen des Stabilitätsbereichs: ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ist das schwerste stabile Nuklide mit $N = Z$; bei ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ist der Neutronenüberschuss besonders hoch; ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ ist der schwerste stabile Nuklide. Auch instabile doppelt magische Kerne — wie ${}^{48}_{28}\text{Ni}$, Spiegelkern von ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ mit einem extrem niedrigen $N/Z \simeq 0,71$, ${}^{78}_{28}\text{Ni}$, mit $N/Z \simeq 1,79$, oder ${}^{100}_{50}\text{Sn}$ bzw. ${}^{132}_{50}\text{Sn}$, die fast an den Proton- bzw. Neutron-drip lines sitzen — sind weniger instabil als ihre Nachbarn.

Neben diesen mit der Stabilität verknüpften Eigenschaften der magischen Kerne lassen sich noch ein paar Besonderheiten bei diesen Nukliden merken:

- Bei den magischen Protonenzahlen ändern sich die Parität der ug-Kerne sowie das Vorzeichen des elektrischen Quadrupolmoments (Abb. II.9); bei den magischen Neutronenzahlen ändert sich die Parität der gu-Kerne.
- Die Energie E^* der ersten angeregten Zustände nimmt bei den Kernen mit magischer Z oder N besonders hohe Werte an.
Z.B. gilt für den doppelt magischen ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ -Kern $E^* = 2,61 \text{ MeV}$, während $E^* \approx 0,8\text{--}0,9 \text{ MeV}$ für die Blei-Isotope mit 202, 204, 206, 210 oder 212 Nukleonen, bei denen $N \neq 126$ ist.

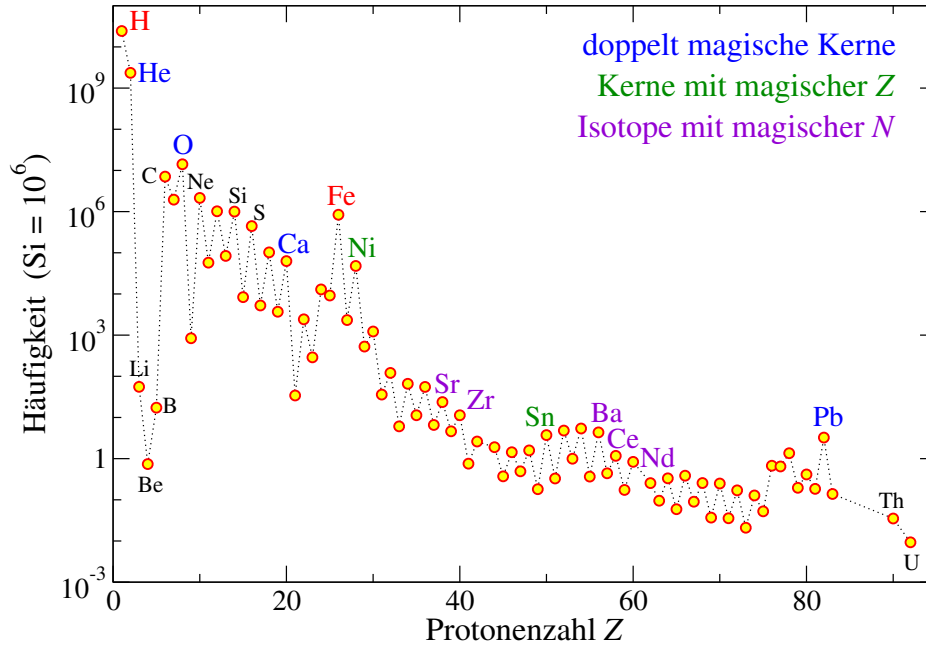


Abbildung II.8 – Häufigkeiten der atomaren Elemente im Sonnensystem, abgeschätzt mithilfe von Meteoriten bzw. Beobachtungen der Sonnenphotosphäre. Daten aus Ref. [38].

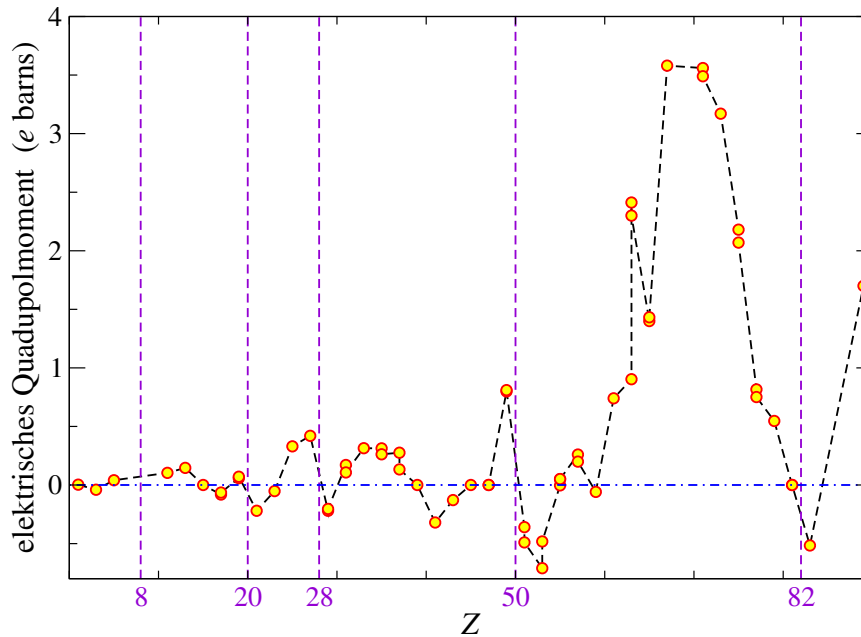


Abbildung II.9 – Elektrische Quadrupolmomente der stabilen bzw. langlebigen ug-Kerne. Messdaten aus Ref. [39].

- Der Einfangsquerschnitt für Neutronen — d.h. der Wirkungsquerschnitt für den Prozess⁽³³⁾ $n + \frac{A}{Z}(\text{)}_N \rightarrow \frac{A+1}{Z}(\text{)}_{N+1}$ — ist besonders klein für Kerne mit magischer Neutronenzahl. Im Gegenteil zeigen Atomkerne mit N um eins kleiner als eine magische Zahl besonders große Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfang.

Beispielsweise ist $\sigma(n + {}^{137}_{56}\text{Ba}_{81} \rightarrow {}^{138}_{56}\text{Ba}_{82}) = 5,1 \text{ b} \gg \sigma(n + {}^{138}_{56}\text{Ba}_{82} \rightarrow {}^{139}_{56}\text{Ba}_{83}) = 0,35 \text{ b}$ oder $\sigma(n + {}^{207}_{82}\text{Pb}_{125} \rightarrow {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}) = 0,7 \text{ b} \gg \sigma(n + {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} \rightarrow {}^{209}_{82}\text{Pb}_{127}) = 0,0005 \text{ b}$.

⁽³³⁾ Dabei wird der Produktkern $\frac{A+1}{Z}(\text{)}_{N+1}$ oft in einem angeregten Zustand oder sogar instabil sein.

Die zwei letzteren Eigenschaften sind ähnlich entsprechenden chemischen Eigenschaften der Elemente bei den „magischen Zahlen“ (2, 10, 18, 36, 54, 86) des atomaren Periodensystems: Wegen ihrer abgeschlossenen Valenzschalen haben die Edelgase, die eine „magische Elektronenzahl“ besitzen, eine höhere Anregungsenergie als ihre Nachbarn; außerdem können sie nahezu keine chemische Verbindungen eingehen, d.h. die Valenzelektronen koppeln sich nicht zu den Elektronen anderer Atomen. Umgekehrt sind die Halogene (F, Cl, Br, I) — d.h. Elemente mit Elektronenzahl um eins kleiner als eine magische Zahl — sehr elektronegativ, um ihre Valenzschale abzuschließen.

Diese Analogie mit der Atomphysik suggeriert die Existenz von ähnlichen Schalen im Atomkern: die magischen Protonen- bzw. Neutronenzahlen sollen dann das Abschließen eines durch Protonen bzw. Neutronen besetzten Energieniveaus signalisieren.

II.4.2 Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns

Wie in der Einleitung zum Abschnitt erläutert wurde, beruht die theoretische Beschreibung des Atomkerns als Reihenfolge von Protonen- und Neutronenschalen auf dem Begriff eines mittleren Ein-Teilchen-Potentials für die Nukleonen. Das unterliegende Prinzip wird erstens in § II.4.2 a dargelegt und einfache Ansätze für das mittlere Potential werden in § II.4.2 b vorgeschlagen. Die Entstehung magischer Zahlen wird am Beispiel des dreidimensionalen Kastenpotentials erläutert (§ II.4.2 c), indem das entsprechende quantenmechanische Problem ausführlich gelöst wird. Dann werden zwei andere Potentiale diskutiert (§ II.4.2 d), die die empirisch gefundenen magischen Zahlen aber noch nicht liefern.

II.4.2 a Mittleres Potential

Der Atomkern ist ein System aus A miteinander wechselwirkenden Nukleonen: Z Protonen und N Neutronen. Somit besteht die Gesamtenergie des Systems aus der Summe der einzelnen kinetischen Energien der Bestandteile und der potentiellen Energie für alle möglichen Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen. Dies entspricht quantenmechanisch einem Hamilton^(am)-Operator

$$\hat{H}_{\text{Kern}} = \sum_{i=1}^A \hat{T}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq A} \hat{V}_{ij} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq A} \hat{V}_{ijk} + \dots \quad (\text{II.19})$$

Dabei bezeichnet $\hat{T}_i$ den kinetische Energieoperator für Teilchen i : unter der Annahme, dass die Nukleonen nicht-relativistisch sind — was mit dem in Abschn. II.3 gefundenen Wert der Fermi-Energie plausibel aussieht —, gilt $\hat{T}_i = \hat{p}_i^2/2m_i$, wobei $\hat{p}_i$ bzw. m_i der Impulsoperator bzw. die Masse des Teilchens ist. Die Terme $\hat{V}_{ij}$, $\hat{V}_{ijk}$ entsprechen Zwei- bzw. Drei-Teilchen-Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen, summiert über alle möglichen Paare bzw. Triplets.

Bemerkung: $\hat{V}_{ij}$ beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen, und enthält somit das starke Nukleon–Nukleon Potential, das sich prinzipiell aus Streuexperimenten oder aus der Untersuchung des Deuterons gewinnen lässt, und einen elektromagnetischen Anteil: Coulomb-Abstoßung wenn i und j Protonen sind, sowie die Kopplung zwischen den magnetischen Dipolmomenten der zwei Nukleonen. $\hat{V}_{ijk}$ entspricht echten Drei-Nukleonen-Kräften,⁽³⁴⁾ die in erster Näherung viel kleiner als die Zwei-Körper-Kräfte sind, für die Beschreibung bestimmter Kerne nötig sind — insbesondere, für sehr neutronenreiche Kerne wie ^{24}O [41] oder ^{48}Ca [42].

Bei Gl. (II.19) handelt es sich um den Hamilton-Operator eines *Vielteilchenproblems*, dessen exakte Lösung eine sehr komplizierte Aufgabe darstellt. In der Tat ist das Problem nur für sehr

⁽³⁴⁾ Dabei handelt es sich um Kräfte, die sich nicht auf die Zwei-Körper-Kräfte zwischen allen Paaren reduzieren lassen. Solche Kräfte sind in den heute bekannten Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen nicht vorhanden — insbesondere nicht in der Quantenchromodynamik (QCD) zwischen Quarks und Gluonen. Sie können aber in effektiven Theorien für nicht-elementare Freiheitsgrade — wie die Nukleonen — entstehen [40].

^(am) W. R. HAMILTON, 1805–1865

besondere Wahlen der Wechselwirkungsterme möglich. Stattdessen löst man in erster Näherung ein vereinfachtes Problem, das sich wie folgt erhalten lässt. Erstens wird $\hat{H}_{\text{Kern}}$ umschrieben als

$$\hat{H}_{\text{Kern}} = \sum_{i=1}^A [\hat{T}_i + V(\hat{\vec{r}}_i)] + \left[\sum_{i<j} \hat{V}_{ij} + \sum_{i<j<k} \hat{V}_{ijk} - \sum_i V(\hat{\vec{r}}_i) \right] \equiv \sum_{i=1}^A \hat{h}_i + \hat{V}_{\text{Rest}}, \quad (\text{II.20})$$

wobei $\hat{h}_i \equiv \hat{T}_i + V(\hat{\vec{r}}_i)$ jetzt ein Einteilchen-Hamilton-Operator ist. Diese Umschreibung ist nur dann nützlich, wenn die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $V(\hat{\vec{r}}_i)$ ist ein ortsabhängiges mittleres Potential, das für alle Nukleonen des Kerns identisch sein muss. Somit haben alle $\hat{h}_i$ denselben Ausdruck.
- die Restwechselwirkung V_{Rest} ist „klein“ und kann vernachlässigt werden.

Unter letzterer Bedingung wird das ursprüngliche A -Teilchenproblem zu A *unabhängigen* Einteilchenproblemen, d.h. der Atomkern wird jetzt durch ein *Einzelteilchenmodell* beschrieben.

Das Prinzip der Berechnung ist dann jenes des auch in der Atomphysik benutzten selbstkonsistenten Hartree^(an)–Fock^(ao)-Verfahrens:⁽³⁵⁾

– Erstens soll man ein gutes Potential finden, z.B. schrittweise: $V(\vec{r})$ wird zuerst geraten, dann wird das zugehörige $\hat{V}_{\text{rest}}$ numerisch berechnet und $V(\vec{r})$ modifiziert, bis $\hat{V}_{\text{rest}}$ „klein“ ist (s. zweite Bemerkung unten).

– Zweitens löst man die Schrödinger^(ap)-Gleichung mit Hamilton-Operator $\hat{h} \equiv \hat{h}_i$, um die Wellenfunktion eines im durch $V(\vec{r})$ erzeugten Potentialtopf eingeschlossenen Nukleons zu finden.

– Drittens wird der Kern gebildet: die Protonen bzw. Neutronen besetzen die gefundenen Einteilchen-Zustände unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips, denn Protonen und Neutronen sind ununterscheidbare Fermionen. Beispielsweise sind im Grundzustand des Atomkerns nur die tiefstmöglichen Energieniveaus besetzt. Dieser Schritt wird ausführlicher in § II.4.4 beschrieben.

Hiernach werden wir den ersten Schritt nicht explizit machen, sondern werden wir einfache mittlere Potentiale postulieren, um den zweiten und den dritten Schritt zu illustrieren. Insbesondere werden wir im Rest des § II.4.2 und im § II.4.3 nur (näherungsweise) sphärische Atomkerne betrachten, entsprechend kugelsymmetrischen mittleren Potentialen. Dagegen erfordert die Beschreibung (stark) deformierter Kerne nicht-kugelsymmetrische Potentiale, die natürlich viel schwieriger zu behandeln sind.

Bemerkungen:

* Anstatt eines mittleren Potentials für alle Nukleonen ist es sinnvoller, unterschiedliche mittlere Potentiale für Protonen und Neutronen anzunehmen. Das Proton und das Neutron haben nämlich leicht unterschiedliche Massen, so dass ihre kinetische Energien schon unterschiedlich sind. Dazu unterliegen Protonen und Neutronen nicht denselben Wechselwirkungen, wie kurz nach Gl. (II.19) bemerkt wurde. Somit soll der rechte Glied von Gl. (II.20) durch

$$\hat{H}_{\text{Kern}} = \sum_{i=1}^Z \hat{h}_i^{(p)} + \sum_{j=1}^N \hat{h}_j^{(n)} + \hat{V}_{\text{Rest}} \quad \text{mit} \quad \hat{h}_i^{(p)} \equiv \frac{\hat{p}_i^2}{2m_p} + V^{(p)}(\hat{\vec{r}}_i), \quad \hat{h}_j^{(n)} \equiv \frac{\hat{p}_j^2}{2m_n} + V^{(n)}(\hat{\vec{r}}_j). \quad (\text{II.21})$$

ersetzt werden, wobei $V^{(p)}$ bzw. $V^{(n)}$ das gleiche für alle Protonen bzw. Neutronen ist, $V^{(p)}$ und $V^{(n)}$ aber unterschiedlich sind.

* Eigentlich ist $\hat{V}_{\text{rest}}$ ein Operator auf dem Hilbert^(aq)-Raum des A -Teilchen-Problems und kann somit nicht als „klein“ betrachtet werden. Was klein sein kann, sind die Matrixelemente von $\hat{V}_{\text{rest}}$ zwischen bestimmten A -Teilchen-Zuständen, insbesondere zwischen den Energie-Eigenzuständen

⁽³⁵⁾Eine Einführung in die Grundlagen der Methode ist z.B. in Ref. [43] zu finden.

^(an)D. HARTREE, 1897–1958 ^(ao)V. A. FOCK (oder FOK), 1898–1974 ^(ap)E. SCHRÖDINGER, 1887–1961 ^(aq)D. HILBERT, 1862–1943

für das Problem ohne $\hat{V}_{\text{rest}}$. Diese Matrixelemente sollen klein gegenüber jene von $\sum_i \hat{h}_i$ sein, was möglicherweise nur in einem begrenzten Energiebereich gelten kann.⁽³⁶⁾

Damit lässt sich ein bestimmtes mittleres Potential nur akzeptieren bzw. verwerfen, nachdem die zweite und dritte Schritte durchgelaufen sind, nicht schon im ersten Schritt.

* In praktischen numerischen Berechnungen wird die Restwechselwirkung nicht ganz vernachlässigt, sondern in einem vierten Schritt — also nachdem das mittlere Potential optimiert wurde — als eine Störung behandelt. Dieser Term spielt nämlich eine wichtige Rolle, indem er die Entartung zwischen Zustände mit unterschiedlichem Spin aufhebt und die experimentell beobachtete paarweise Kopplung der Protonen bzw. Neutronen einer Schale erklärt.

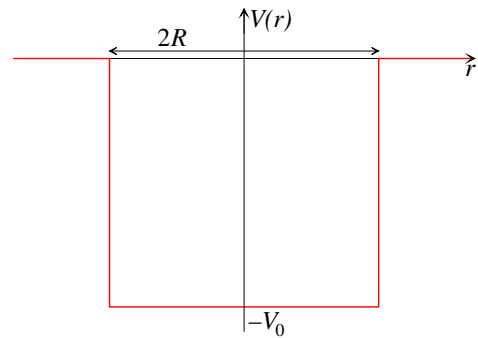
II.4.2 b Wahl des effektiven Potentials

Ein wichtiger Punkt im oben beschriebenen Verfahren ist die Wahl des Ein-Teilchen-Potentials, in dem die Nukleonen eingeschlossen werden. Im Folgenden werden drei mögliche Modelle untersucht, die kugelsymmetrische Kerne beschreiben: dabei ist immer $r \equiv |\vec{r}|$ der Abstand vom Kernzentrum. Diese Potentiale werden mindestens durch eine den Kernradius spiegelnde Reichweite R und eine Tiefe $-V_0$ charakterisiert, wobei $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$ wie im Fermi-Gas-Modell.

- Kastenpotential (II.22)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Unrealistisch kann auch das Potential unendlich für $r > R$ angenommen werden.



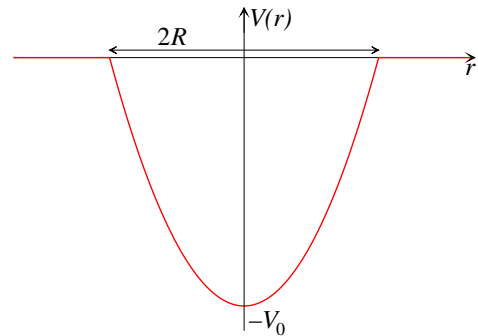
- harmonischer Oszillatorpotential (II.23)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Berechnungen sind einfacher wenn die Form

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

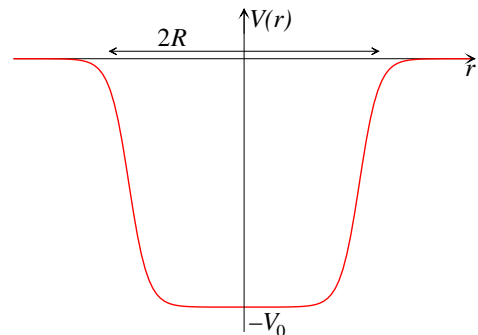
für einen beliebigen Abstand r gilt.



- Woods-Saxon Potential (II.24)

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{\delta}}},$$

$\delta \approx 0,5 \text{ fm}$ bestimmt die Breite des Kernrands.



Das Woods-Saxon Potential ist realistischer — es spiegelt offensichtlich die gemessene Dichteverteilung (I.21) der Nukleonen in Kernen mit $A \geq 20$ wider —, es erfordert aber die Nutzung

⁽³⁶⁾ Es kann auch passieren, dass die Eigenzustände von $\sum_i \hat{h}_i$ für gewisse Observablen schlechte Erwartungswerte liefern, die mit experimentellen Ergebnissen nicht passen.

eines numerischen Lösungsverfahrens. Umgekehrt sind das Kasten- bzw. das Oszillatorpotential zwar vereinfachte Näherungen, jedoch existieren analytische Lösungen der Schrödinger-Gleichung für die Bewegung eines Nukleons in solchen Potentialen, was einen besseren Einblick in den Ursprung der verschiedenen Eigenschaften des Modells erlaubt, insbesondere in die nötigen Bestandteile, um beobachtete Kerneigenschaften wiederzugeben.

Um den Unterschied zwischen Protonen und Neutronen in Betracht zu ziehen werden unterschiedliche Potentialtöpfe angenommen: in erster Näherung, dieselben Potentiale mit unterschiedlichen Tiefen $V_0^{(p)} \neq V_0^{(n)}$.

II.4.2c Einfachstes Beispiel: Kastenpotential

In diesem Paragraph werden die möglichen stabilen Ein-Teilchen-Zustände eines Teilchens im dreidimensionalen Kastenpotential (II.22) bestimmt, insbesondere deren Eigenenergien, welche die „Schalen“ der entsprechenden A -Teilchen-Zustände bestimmt. Dafür soll man die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in Anwesenheit des Potentials lösen.

Da das Potential kugelsymmetrisch ist und nur vom Ort abhängt, kommutiert der Hamilton-Operator $\hat{h}$ mit den quadrierten Bahndrehimpuls $\hat{L}^2$ und Spin $\hat{S}^2$ des Nukleons, sowie mit deren Projektionen $\hat{L}_z$ bzw. $\hat{S}_z$ auf eine feste Achse. Daher ist $\{\hat{h}, \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ ein vollständiger Satz kommutierender Observablen, deren Erwartungswerte die Ein-Teilchen-Eigenzustände völlig charakterisieren werden.⁽³⁷⁾ Dabei werden, wie üblich, die Eigenwerte des Hamilton-Operators $\hat{h}$ — d.h. die Ein-Teilchen-Eigenenergien — durch eine Hauptquantenzahl $n \in \mathbb{N}^*$ gekennzeichnet, und die Eigenwerte von $\hat{L}^2$ bzw. $\hat{L}_z$ durch ganzzahlige Quantenzahlen $\ell \in \mathbb{N}$ bzw. $m_\ell \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell\}$, vgl. Anhang A.2.

Bemerkung: In der Kernphysik wird, wie in der Atomphysik, die spektroskopische Bezeichnungsweise benutzt, so dass ein s-, p-, d-, f-, g-, h-Zustand einen Zustand mit jeweils $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ andeutet. Im Gegensatz zur Atomphysik ist die azimutale Quantenzahl ℓ in der Kernphysik nicht auf Werte kleiner als n beschränkt, sondern kann größer sein, wie unten zu sehen sein wird.

In Ortsdarstellung lautet der kinetische Energieoperator $\hat{T}_i = -(\hbar^2/2m_i)\hat{\Delta}$ mit dem Laplace^(ar)-Operator Δ . Somit lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein im Potential (II.22) eingeschlossenes Proton bzw. Neutron, beschrieben durch die Wellenfunktion $\psi^{(p)}(\vec{r})$ bzw. $\psi^{(n)}(\vec{r})$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta\psi^{(j)}(\vec{r}) - V_0^{(j)}\psi^{(j)}(\vec{r}) = \varepsilon^{(j)}\psi^{(j)}(\vec{r}) \quad \text{für } |\vec{r}| \leq R, \quad (\text{II.25})$$

wobei $j = p$ oder n , während $\varepsilon^{(j)}$ die Energie des Ein-Teilchen-Zustands $\psi^{(j)}(\vec{r})$ darstellt.

Hiernach werden nur gebundene Nukleonen ins Betracht gezogen, sodass außer des Potentialtopfs $\psi^{(j)}(\vec{r}) = 0$, entsprechend einer verschwindenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Streng genommen ist diese Bedingung wenn $V^{(j)}(|\vec{r}| > R) = 0$ nicht erfüllt, sondern nur wenn $V^{(j)}(|\vec{r}| > R) = +\infty$, was von jetzt an angenommen wird.⁽³⁸⁾

Wegen der Kugelsymmetrie des Problems ist es günstig, Kugelkoordinaten (r, θ, φ) zu benutzen. Dazu ist es möglich, die Radial- und Winkelabhängigkeiten der Wellenfunktion eines Nukleons zu trennen („Separationsansatz“). Somit kann die letztere als

$$\psi^{(j)}(\vec{r}) = R_{n\ell}^{(j)}(r) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \quad (\text{II.26})$$

⁽³⁷⁾ Der Erwartungswert von $\hat{S}^2$ ist für alle Eigenzustände derselbe, und zwar $\frac{3}{4}\hbar^2$, da alle Protonen und Neutronen denselben Spin $s = \frac{1}{2}$ haben. Deshalb erlaubt dieser Erwartungswert keine Unterscheidung zwischen den Zuständen und wird im Folgenden von deren Kennzeichnung ausgelassen.

⁽³⁸⁾ Die Herleitung der Eigenenergien und -zustände in diesem vereinfachten Fall befindet sich in manchem Lehrbuch der Quantenmechanik, z.B. in Fließbach [44, Kap. 25].

^(ar) P.-S. LAPLACE, 1749–1827

geschrieben werden, wobei n , ℓ und m_ℓ ganze Zahlen sind (s. oben) und der Winkelanteil $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion bezeichnet (Anhang A.2.2). Mit diesem Ansatz führt der Ausdruck des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten

$$\hat{\Delta}f(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\hat{r}f(\vec{r})] - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\hbar^2} \hat{L}^2 f(\vec{r})$$

unter Verwendung der Eigenwertgleichung (A.2a) für jeden Wert von ℓ zu den m_ℓ -unabhängigen linearen Differentialgleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2m_j} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{n\ell}^{(j)}(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{n\ell}^{(j)}(r) \right] = (\varepsilon^{(j)} + V_0^{(j)}) R_{n\ell}^{(j)}(r), \quad (\text{II.27a})$$

wobei ein globaler Faktor $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$ schon ausfaktorisiert wurde: somit wird das Problem auf ein eindimensionales Problem reduziert. Außerdem gelten die Randbedingungen

$$R_{n\ell}^{(j)}(0) < \infty : \quad \text{die Lösung soll in } r=0 \text{ regulär sein;} \quad (\text{II.27b})$$

$$R_{n\ell}^{(j)}(R) = 0 : \quad \text{die Lösung soll bei } r=R \text{ kontinuierlich sein.} \quad (\text{II.27c})$$

Die erste dieser Bedingungen entspricht der nötigen Endlichkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi^{(j)}|^2 \propto (R_{n\ell}^{(j)})^2$, insbesondere im Ursprungspunkt $\vec{r} = \vec{0}$, während die zweite Bedingung aus der Forderung $\psi^{(j)}(\vec{r}) = 0$ außerhalb des Bereichs $r \leq R$ folgt.

Der Einfachheit halber kann man zuerst die s-Zustände betrachten, d.h. den Fall $\ell = 0$: die Differentialgleichung (II.27a) lautet dann (von jetzt an wird der Index j der Kürze halber ausgelassen)

$$\frac{d^2}{dr^2} (r R_{n0}(r)) + \frac{2m\tilde{\varepsilon}}{\hbar^2} (r R_{n0}(r)) = 0$$

mit $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon + V_0$. Eine bei $r=0$ reguläre Lösung [Bedingung (II.27b)] ist

$$R_{n0}(r) = C \frac{\sin k_{n0}r}{k_{n0}r} \quad \text{mit} \quad k_{n0}^2 = \frac{2m\tilde{\varepsilon}_{n0}}{\hbar^2}$$

und einer Normierungskonstante C , deren Ausdruck in der späteren Diskussion nicht benötigt wird. Damit die Lösung bei $r=R$ eine Nullstelle hat [Randbedingung (II.27c)] soll k_{n0} nur die diskreten Werte $k_{n0} = n\pi/R$ annehmen, wobei n die *Hauptquantenzahl* ist, sodass die möglichen Energien der Zustände quantisiert sind:

$$\tilde{\varepsilon}_{n0} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{R^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{II.28})$$

$\tilde{\varepsilon}_{n0}$ ist daher die Energie (im Bezug auf die Tiefe $-V_0$ des Potentialtopfs) des auf dem ns -Zustand stehenden Nukleons.

Bemerkung: Der Wellenvektor k_{00} mit $n=0$ führt zu $\psi(\vec{r}) = 0$ überall und entspricht daher keiner physikalisch relevanten Lösung.

Für eine beliebige *azimutale Quantenzahl* ℓ lautet eine reguläre Lösung der Gleichung (II.27a)

$$R_{n\ell}(r) = j_\ell(k_{n\ell}r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_{n\ell}r}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(k_{n\ell}r),$$

wobei $j_\ell(x)$ bzw. $J_{\ell+1/2}(x)$ eine *sphärische Bessel-^(as)Funktion erster Art* bzw. eine *Bessel-Funktion erster Art halbzahlgiger Ordnung* bezeichnet.⁽³⁹⁾ Wie im Fall $\ell=0$ oben ist $k_{n\ell}$ durch die Randbedingung (II.27c) festgelegt: die Wellenfunktion verschwindet bei $r=R$ nur wenn $k_{n\ell}R$ eine Nullstelle

⁽³⁹⁾Die ersten sphärischen Besselfunktionen sind

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}.$$

Ihre ersten Nullstellen werden in der Tabelle II.1 gegeben, vgl. auch Refs. [45, Kap. 10] oder [46, Kap. 10].

^(as)F. W. BESSEL, 1784–1846

n	$X_{0,n}$	$X_{1,n}$	$X_{2,n}$	$X_{3,n}$	$X_{4,n}$	$X_{5,n}$	$X_{6,n}$
1	3,1416	4,4934	5,7635	6,9879	8,1826	9,3558	10,5128
2	6,2832	7,7253	9,0950	10,4171	11,7049	12,9665	14,2074
3	9,4248	10,9041	12,3229	13,6980	15,0397	16,3547	17,6480
4	12,5664	14,0662	15,5146	16,9236	18,3013	19,6532	20,9835

Tabelle II.1 – Erste Nullstellen der sphärischen Besselfunktionen j_0 bis j_6 .

der sphärischen Besselfunktion j_ℓ ist, d.h. nur für $k_{n\ell} = X_{\ell,n}/R$, wobei $X_{\ell,n}$ die n -te (positive) Nullstelle von j_ℓ bezeichnet (s. Tabelle II.1). Die entsprechende Energie des im Potentialtopf eingeschlossenen Nukleons ist

$$\tilde{\varepsilon}_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{X_{\ell,n}}{R} \right)^2. \quad (\text{II.29})$$

Wie oben gesagt sind die Zustände durch die Erwartungswerte der Observablen $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z\}$ charakterisiert, d.h. äquivalent durch die zugehörigen Quantenzahlen $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$: die möglichen Energiewerte (II.29) hängen nur von n und ℓ ab. Für feste ℓ kann dann die *magnetische Quantenzahl* die $2\ell + 1$ Werte $m_\ell \in \{-\ell, \dots, \ell\}$ annehmen. Schließlich kann der Erwartungswert der Projektion $\hat{S}_z$ des Nukleonspins auf die z -Achse die Werte $\pm \frac{1}{2}\hbar$ annehmen, entsprechend $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Insgesamt gibt es also $2(2\ell + 1)$ entartete Ein-Teilchen-Zustände auf dem (n, ℓ) -Energieniveau.

Die Anordnung der möglichen Zustände nach wachsender Energie $\tilde{\varepsilon}_{n\ell}$ bzw. wachsendem Wert der Nullstelle $X_{\ell,n}$ wird in der Tabelle II.2 mit dem zugehörigen Entartungsgrad des Niveaus gegeben, sowie die Summe der Anzahlen von Ein-Teilchen-Zuständen mit Energie kleiner gleich $\tilde{\varepsilon}_{n\ell}$. Die entsprechenden Energieniveaus im Potentialtopf sind in Abb. II.10 dargestellt.

(n, ℓ)	$X_{\ell,n}$	Anzahl der Zustände auf dem Niveau	$\sum_{n,\ell} 2(2\ell + 1)$
1s	3,14	2	2
1p	4,49	6	8
1d	5,76	10	18
2s	6,28	2	20
1f	6,99	14	34
2p	7,73	6	40
1g	8,18	18	58
2d	9,10	10	68
1h	9,36	22	90
3s	9,42	2	92
2f	10,42	14	106
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

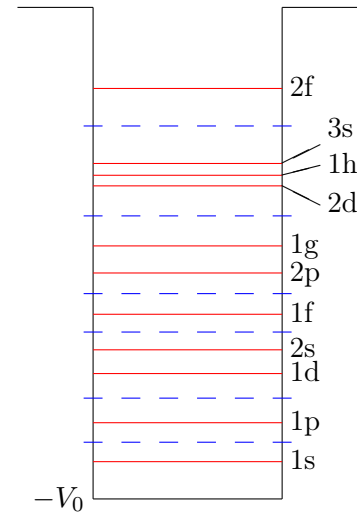


Abbildung II.10 – Energieniveaus der Nukleonen in einem Kastenpotential.

Tabelle II.2 – Termschema im Kastenpotential (II.22).

In diesem Termschema kommt manchmal eine größere Energielücke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Niveaus vor, sodass die nötige Energie, um ein Nukleon vom niedrigeren auf das höher liegende Niveau anzuregen, ebenfalls groß ist. Umgekehrt liegen mehrere Niveaus nah voneinander, z.B. 1d und 2s, 2p und 1g, oder 2d, 1h und 3s: in solchen Fällen ist die Anregungsenergie relativ gering. Dies führt zur Idee, dass diese dicht liegenden Niveaus eine Schale zusammen bilden. Die magischen Zahlen treten dann nur beim Abschluss entweder einer solchen „Composite-Schale“ oder eines isolierten Niveaus auf: so findet man 2, 8, 20, 34, 58, 92, 138...

Die ersten drei experimentell beobachteten magischen Zahlen 2, 8, 20 werden offensichtlich gut erklärt! Es fehlen aber 28, 50, 82 und 126.

Bemerkung: Da $X_{\ell,n}$ die n -te positive Nullstelle von j_ℓ ist, verschwindet der radiale Anteil $R_{n\ell}(r)$ der Wellenfunktion (II.26) genau $n - 1$ mal zwischen $r = 0$ und $r = R$.

II.4.2 d Oszillator- und Woods–Saxon-Potential

Das Problem bei den höheren magischen Zahlen könnte vermutlich mithilfe eines besseren Ansatzes für den Ein-Teilchen-Potentialtopf gelöst werden.

Im Fall des dreidimensionalen Oszillatorpotentials (II.23) findet man äquidistante Ein-Teilchen-Niveaus mit der Energie $\tilde{\varepsilon}_{n\ell} = [2(n - 1) + \ell + \frac{3}{2}]\hbar\omega$, wobei $\omega^2 \equiv 2V_0/mR^2$. Der Entartungsgrad der Niveaus wächst schnell: auf dem N -ten Niveau ($N \in \mathbb{N}$) sitzen alle mögliche (n, ℓ) -Zustände mit $2(n - 1) + \ell = N$ und jeder (n, ℓ) -Zustand ist wie oben $2(2\ell + 1)$ -mal entartet. Die daraus folgenden magischen Zahlen sind dann 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168... Die Reihenfolge der Energieniveaus des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist in der Tabelle II.3 bzw. in Abb. II.11 dargestellt. Dabei kann man merken, dass alle Zustände auf einem gegebenen Niveau dieselbe Parität besitzen, und zwar abwechselnd positiv und negativ.

(n, ℓ)	$\tilde{\varepsilon}_{n\ell}$	Entartungsgrad des Niveaus	$\sum_{n,\ell} 2(2\ell + 1)$
1s	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	2	2
1p	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	6	8
2s, 1d	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	12	20
2p, 1f	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	20	40
3s, 2d, 1g	$\frac{11}{2}\hbar\omega$	30	70
3p, 2f, 1h	$\frac{13}{2}\hbar\omega$	42	112
4s, 3d, 2g, 1i	$\frac{15}{2}\hbar\omega$	56	168
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

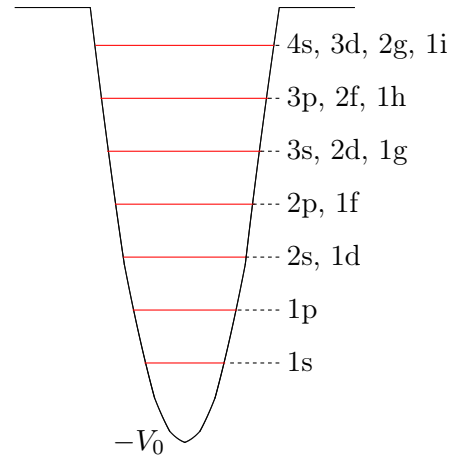


Abbildung II.11 – Energieniveaus im Oszillatorpotential.

Tabelle II.3 – Termschema im Oszillatorpotential (II.23).

Die übliche Herleitung der Energieniveaus des eindimensionalen harmonischen Oszillators beruht auf der Nutzung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$.⁽⁴⁰⁾ Die Umschreibung des Potentials (II.23) in kartesischen Koordinaten als Summe dreier unabhängigen eindimensionalen Oszillatoren liefert dann sofort die Eigenzustände und Eigenenergien des dreidimensionalen Oszillators.

Eine direkte Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten in demselben Sinne als die oben dargestellte Lösung des Kastenpotentials ist auch möglich, vgl. z.B. Fließbach [44, Kap. 28].

Im Woods–Saxon Potential (II.24) ist die Anordnung der Ein-Teilchen-Zustände 1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 2p, 1g, 2d, 3s, 1h, 2f, 3p, 1i, 2g... mit den magischen Zahlen 2, 8, 20, 40 (oberhalb der 2p-Schale), 58 (oberhalb der 1g-Schale), 92, 138... Die ersten drei Zahlen werden abermals gut wiedergegeben, dennoch fehlen wieder die nächsten.

Die erfolgreiche Erklärung von 2, 8 und 20 mit allen drei Potentialen bestätigt die Gültigkeit des dem Einteilchen-Schalenmodell zugrunde liegenden Prinzips, dass die magischen Zahlen den Abschluss von Schalen unabhängiger Nukleonen in einem Potentialtopf widerspiegeln.

⁽⁴⁰⁾Diese Herleitung ist in jedem Lehrbuch der Quantenmechanik zu finden, z.B. in Cohen-Tannoudji [47, Kap. V], Fließbach [44, Kap. 34] oder Messiah [48, Kap. 12].

Der Grund des Scheiterns bei den höheren Zahlen lässt sich aus der Analysis der drei einfachen Potentiale (II.22)–(II.24) ahnen. Somit wird das Problem wahrscheinlich durch den großen Entartungsgrad $2(2\ell + 1)$ der (n, ℓ) -Niveaus verursacht. Zum Beispiel kommt in allen drei Modellen nach dem 2s-Niveau das 14-mal entartete 1f-Niveau vor, was das Auftauchen der magischen Zahl 28 verhindert. Andere „natürliche“ Potentialforme könnten hierbei nicht weiter helfen, solange die Entartung der Zustände mit denselben Quantenzahlen (n, ℓ) nicht aufgehoben wird.

II.4.3 Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung

Das Problem des richtigen Abschließens der Nukleonenschale wurde unabhängig voneinander einerseits durch Maria Goeppert-Mayer^(at) [49, 50], andererseits durch J. Hans D. Jensen^(au) und seine Mitarbeiter [51] gelöst. Ihre Idee war, die Entartung der (n, ℓ) -Zustände durch die Einführung eines zusätzlichen Beitrags zum Ein-Teilchen-Potential aufzuheben.

Die Natur dieses zusätzlichen Terms wurde noch einmal durch die Analogie zur Atomphysik suggeriert: In der Atomhülle ergibt die Kopplung zwischen dem Spin und dem Bahndrehimpuls eines Elektrons die geringe „Feinstruktur“-Aufspaltung dessen Energieniveaus. Die durch die Kernkräfte verursachte Aufspaltung der Nukleon-Energieniveaus erwies sich erstaunlicherweise als verhältnismäßig viel größer. Somit kann diese Kopplung das Niveauschema erheblich modifizieren.

Bezeichnet man das kugelsymmetrische Ein-Teilchen-Potential von § II.4.2 als $V_c(r)$, so lautet das neue zu betrachtende effektive Potential

$$\hat{V}(r) = V_c(r) + V_{s.o.}(r) \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}, \quad (\text{II.30})$$

wobei $\hat{\vec{L}}$ bzw. $\hat{\vec{S}}$ der Bahndrehimpuls- bzw. der Spin-Operator des Nukleons ist. Die Radialfunktion $V_{s.o.}(r)$ bestimmt die Stärke der Kopplung zwischen Spin und Bahndrehimpuls. Ein üblicher Ansatz für $V_{s.o.}(r)$ in Berechnungen ist, in Analogie zum „Thomas“-Term in der Atomhülle,⁽⁴¹⁾

$$V_{s.o.}(r) \propto \frac{1}{r} \frac{dV_c}{dr}, \quad (\text{II.31})$$

wobei die Proportionalitätskonstante negativ ist. Abbildung II.12 stellt diese Abhängigkeit im Fall eines Woods–Saxon-Potentials $V_c(r)$ dar: $V_{s.o.}$ ist relativ klein im inneren Teil des Atomkerns und trägt vor allem am Kernrand bei. Dabei ist das Ziel, die tiefstliegenden Niveaus wenig zu stören, um die magischen Zahlen 2, 8, 20 im neuen Energieschema zu erhalten.

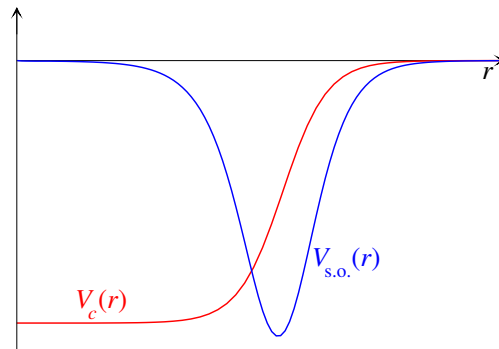


Abbildung II.12 – Woods–Saxon Potential (II.24) zusammen mit dem durch Gl. (II.31) gegebenen entsprechenden Radialterms des Spin-Bahn Potentials.

⁽⁴¹⁾ Die Spin-Bahn Kopplung der Elektronenhülle wird durch die Bewegung des Elektrons im elektrischen Feld des Atomkerns verursacht: das rotierende Elektron spürt ein Magnetfeld, zu dem sein Spin koppelt. Der daraus folgende Spin-Bahn-Term lässt sich im Rahmen der Quantenelektrodynamik berechnen, vgl. z.B. Ref. [52, Kap. IV § 33].

^(at) M. GOEPPERT-MAYER, 1906–1972 ^(au) J. H. D. JENSEN, 1907–1973 ^(av) L. THOMAS, 1903–1992

Nach Einführung des zusätzlichen $(\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}})$ -Terms kommutieren $\hat{\vec{L}}$ und $\hat{\vec{S}}$ nicht mehr mit dem neuen Hamilton-Operator, sodass ihre Erwartungswerte nicht mehr Konstanten der Bewegung sind. Dementsprechend lassen sich die Eigenzustände nicht mehr durch die Quantenzahlen m_ℓ und m_s charakterisieren. Ein neuer vollständiger Satz kommutierender Observablen ist dann⁽⁴²⁾

$$\{\hat{h}, \hat{\vec{L}}^2, \hat{\vec{S}}^2, \hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z\},$$

wobei $\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}$ der Gesamtdrehimpuls des Nukleons ist. Der mit $\hat{\vec{J}}^2$ bzw. mit $\hat{J}_z$ assoziierte Eigenwert wird durch eine neue Quantenzahl j bzw. m_j charakterisiert und beträgt $j(j+1)\hbar^2$ bzw. $m_j\hbar$.

Die Kopplung des Bahndrehimpulses $\hat{\vec{L}}$ und des Spins $\hat{\vec{S}}$ führt je nach ihren relativen Orientierungen zu zwei möglichen Werten der *Gesamtdrehimpulsquantenzahl* j :

- wenn der Nukleonspin parallel zu seinem Drehimpuls ist, gilt $j = \ell + \frac{1}{2}$; daher kann m_j die $2\ell + 2$ verschiedenen Werte $-\ell - \frac{1}{2}, \dots, \ell + \frac{1}{2}$ annehmen.
- wenn $\vec{S}$ und $\vec{L}$ antiparallel sind, ergibt sich $j = \ell - \frac{1}{2}$; dann gibt es 2ℓ mögliche Werte für m_j .

Die Energie des auf den Wert 1 normierten Eigenzustands $|n, \ell, j, m_j\rangle$ lautet

$$\langle n, \ell, j, m_j | \hat{h} | n, \ell, j, m_j \rangle = \langle n, \ell, j, m_j | \hat{V}_c | n, \ell, j, m_j \rangle + V_{\text{s.o.}} \langle n, \ell, j, m_j | \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} | n, \ell, j, m_j \rangle.$$

Dabei bleibt der Beitrag des V_c -Terms in erster Näherung der gleiche ($\tilde{\varepsilon}_{n\ell}$), wie in § II.4.2 schon berechnet wurde, und hängt somit nur von n und ℓ ab. Die durch den Spin-Bahn-Kopplungsterm induzierte Verschiebung des Energieniveaus für die beiden Fälle $j = \ell + \frac{1}{2}$ und $j = \ell - \frac{1}{2}$ lässt sich mithilfe der Beziehung $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$ leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \langle n, \ell, j, m_j | \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} | n, \ell, j, m_j \rangle &= \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \hbar^2 \langle n, \ell, j, m_j | n, \ell, j, m_j \rangle \\ &= \begin{cases} +\frac{1}{2}\hbar^2\ell & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Daher ist die Einteilchen-Energie jetzt gegeben durch

$$\tilde{\varepsilon}_{n\ell j} \simeq \tilde{\varepsilon}_{n\ell} + \begin{cases} +\frac{1}{2}\hbar^2\ell \langle V_{\text{s.o.}} \rangle_{n\ell} & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) \langle V_{\text{s.o.}} \rangle_{n\ell} & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

wobei $\langle V_{\text{s.o.}} \rangle_{n\ell}$ den Erwartungswert im $n\ell$ -Zustand des radialen Anteils des Spin-Bahn-Terms bezeichnet.

Empirisch gilt $V_{\text{s.o.}}(r) < 0$, was zu einem ebenfalls negativen Erwartungswert führt. Deshalb liegen die Eigenzustände mit höherer Gesamtdrehimpulsquantenzahl $j = \ell + \frac{1}{2}$ energetisch niedriger — d.h. sie sind stärker im Potential gebunden — als diejenigen mit kleinerer $j = \ell - \frac{1}{2}$.⁽⁴³⁾

Aus Gl. (II.32) ergibt sich die Aufspaltung der Energieniveaus mit $j_+ = \ell + \frac{1}{2}$ und $j_- = \ell - \frac{1}{2}$ bei festen Werten von n und ℓ :

$$\Delta\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}_{n\ell j_-} - \tilde{\varepsilon}_{n\ell j_+} \propto 2\ell + 1.$$

Diese Aufspaltung wächst daher mit zunehmender Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ des Nukleons. Außerdem hängt auch der Betrag von $\langle V_{\text{s.o.}} \rangle_{n\ell}$ von ℓ ab: mit einem Radialterm $V_{\text{s.o.}}(r)$ der Form des in Abb. II.12 dargestellten Ansatzes, nimmt ebenfalls $|\langle V_{\text{s.o.}} \rangle_{n\ell}|$ mit ℓ zu.

Zur Kennzeichnung der neuen j -Abhängigkeit der Energieniveaus wird die Quantenzahl j der bisher benutzten Schreibweise als tiefgestellter Index beigelegt.

⁽⁴²⁾Die Bemerkung der Fußnote 37 bleibt hier auch gültig: alle Nukleonen haben den Spin $s = \frac{1}{2}$.

⁽⁴³⁾Dies stellt das gegenseitige Verhalten zur Wirkung der Spin-Bahn Kopplung in der Elektronenhülle eines Atoms dar.

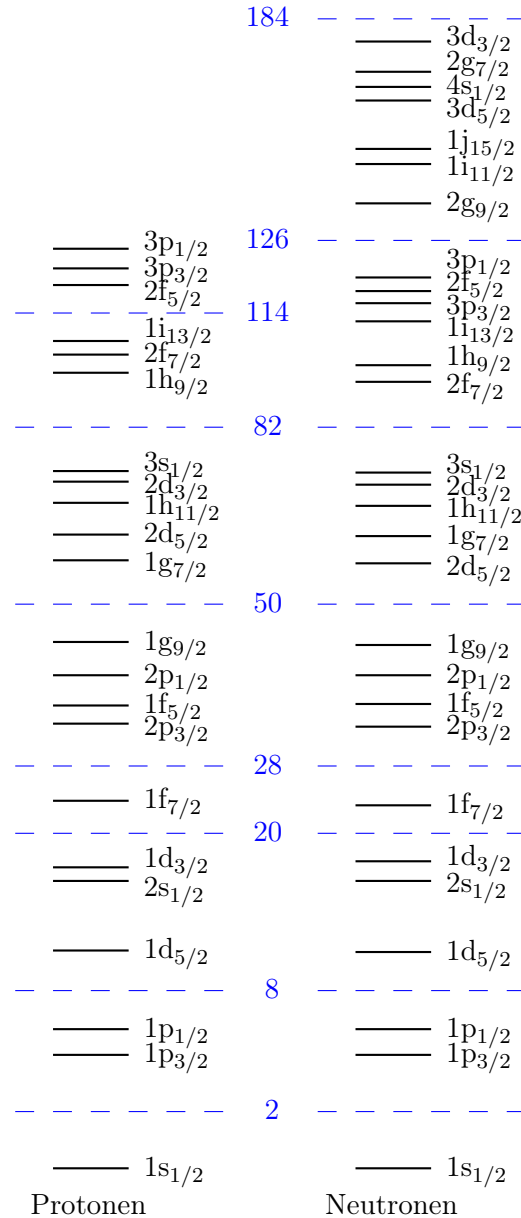


Abbildung II.13 – Einteilchen-Energieniveaus in einem realistischen Woods–Saxon Potential unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung.

Beispielsweise wird die 1f-Schale ($\ell = 3$) durch die Spin-Bahn-Kopplung in zwei Niveaus aufgespalten: mit der höheren Energie kommt das 6-mal entartete 1f_{5/2}-Niveau vor; tiefer liegt das stärker gebundene 1f_{7/2}-Niveau mit 8 Zuständen. Somit wird 28 zu einer magischen Zahl! Ebenfalls führt die Aufspaltung der 1g- und 1h-Niveaus in 1g_{7/2} und 1g_{5/2} bzw. 1h_{7/2} und 1h_{9/2} zu den magischen Zahlen 50 und 82, wie in Abb. II.13 gezeigt wird.

Durch die Einführung unterschiedlicher Potentialtiefen $V_0^{(p)}$ und $V_0^{(n)}$ im mittleren Potential und nach Berücksichtigung des zusätzlichen Coulomb-Potentials für die Protonen treten unterschiedliche Energieniveaus für Protonen und Neutronen auf. Beispielsweise werden die Ordnungen der 1g_{7/2} und 2d_{5/2} in den beiden Reihen umgetauscht. Die ungleichen Potentiale können außerdem wie in Abb. II.13 möglicherweise zu unterschiedlichen magischen Zahlen bei den höchstliegenden Niveaus führen.

II.4.4 Konstruktion des A -Teilchen-Zustands

Hier sollte der Vollständigkeit halber ein bisschen mehr über A -Teilchen-Wellenfunktionen kommen.

Z.B.: die Wellenfunktion des gesamten Kernels ist durch das antisymmetrisierte Produkt der Nukleonenwellenfunktionen gegeben.

II.4.5 Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns

II.4.5a Kernspin und Parität im Grundzustand

Im Grundzustand des Atomkerns sind zunächst die tiefsten Nukleonenschalen völlig besetzt, so dass nur das höchste gefüllte Energieniveau möglicherweise nicht voll ist. Die abgeschlossenen j -Schalen, die $2j+1$ Protonen bzw. Neutronen enthalten, liefern keinen Beitrag weder zum Gesamtdrehimpuls des Kernels noch zu seiner Parität:

- Die Projektionen $J_z = -j\hbar, (-j+1)\hbar, \dots, (j-1)\hbar, j\hbar$ des Gesamtdrehimpulses der verschiedenen Nukleonen der Schale kompensieren sich gegenseitig, und tragen deshalb nicht zu J_{Kern} bei.
- Da $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ halbzahlig ist, ist die Zahl $2j+1$ der Nukleonen auf der Schale gerade, sodass das Produkt der individuellen Paritäten $(-1)^\ell$ der Nukleonen insgesamt $+1$ ergibt.

Dieses Ergebnis führt sofort zu den folgenden Vorhersagen:

- Atomkerne, deren letzte besetzte Protonen- und Neutronenschalen abgeschlossen sind, haben Spin und Parität $J_{\text{Kern}}^P = 0^+$.
Experimentell stimmt das: z.B. $J_{\text{Kern}}^P(^{16}\text{O}) = 0^+$.
- Wegen der angenommenen Unabhängigkeit der Nukleonen im Potential haben die ug- bzw. gu-Kerne, bei denen es nur ein Proton bzw. Neutron außerhalb einer abgeschlossenen j -Schale gibt, genau den Spin und die Parität dieses ungepaarten Nukleons.
Experimentell stimmt das auch: z.B. ist für $^{17}_8\text{O}$, mit einem einzelnen Neutron auf der $1d_{5/2}$ -Schale, $J_{\text{Kern}}^P = \frac{5}{2}^+$.
- Analog bestimmt ein einzelnes isoliertes *Loch*, entsprechend einem fehlenden Nukleon, Spin und Parität der ug- oder gu-Kerne, bei denen ein einziges Proton bzw. Neutron auf der letzten besetzten Schale fehlt.
Abermals stimmt das mit den Messdaten: z.B. $J_{\text{Kern}}^P(^{15}_8\text{O}) = \frac{1}{2}^-$, mit einem Loch in der Neutronen- $1p_{1/2}$ -Schale.

Bei Kernen mit teilweise gefüllten Schalen kann das Einteilchen-Schalenmodell nicht weiter helfen. Experimentelle Beobachtungen und das Berücksichtigen der Restwechselwirkung V_{Rest} — entsprechend einer Abweichung vom Ein-Teilchen-Problem — motivieren einen zusätzlichen Ansatz:

Sobald zwei Protonen bzw. zwei Neutronen in der gleichen Schale gebunden sind, koppeln sie zum energetisch bevorzugten Zustand mit Gesamtdrehimpuls $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{0}$.

Dieser Ansatz erlaubt weitere Vorhersagen:

- gg-Kerne haben Spin und Parität $J_{\text{Kern}}^P = 0^+$; diese Vorhersage ist experimentell bestätigt.⁽⁴⁴⁾
- ug- und gu-Kerne haben den Spin und die Parität des ungepaarten Nukleons $J_{\text{Kern}}^P = j^{(-1)^\ell}$. Dies stimmt auch sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen (s. Ref. [24] oder Ref. [8, Experimente 56-57]), bis auf Abweichungen bei Kernen mit $150 \lesssim A \lesssim 200$.

⁽⁴⁴⁾ ... was selbstverständlich ist, denn der zugrunde liegende Ansatz basiert auf den experimentellen Fakten!

Bemerkung: Der oben eingeführte Ansatz reicht nicht aus, um Vorhersagen für den Spin und die Parität eines uu-Kerns zu erlauben. Um die gemessenen Eigenschaften zu erklären ($J_{\text{Kern}}^P(^2\text{H}) = 1^+$, $J_{\text{Kern}}^P(^6\text{Li}) = 1^+$, $J_{\text{Kern}}^P(^{10}\text{B}) = 3^+$, $J_{\text{Kern}}^P(^{14}\text{N}) = 1^+$ für die stabilen Nuklide) werden in der Literatur die sog. starke und schwache *Nordheim^(aw) Regeln* eingeführt (vgl. z.B. Ref. [5]).

II.4.5 b Kernspin und Parität angeregter Zustände

Im Grundzustand besetzen die Nukleonen die niedrigsten Energieniveaus im Potentialtopf. Oberhalb liegen weitere Niveaus, auf welche die Nukleonen durch Energiezufuhr versetzt werden können: der Atomkern ist dann in einem angeregten Zustand.

Das hier dargelegte Ein-Teilchen-Schalenmodell liefert zuverlässige Voraussagen nur für den Fall eines ug- oder gu-Kerns mit im Grundzustand einem einzelnen Nukleon auf der angefangenen Schale, das auf die nächste Schale angeregt wird, während die abgeschlossenen Schalen ungestört bleiben. Dann bestimmt dieses Nukleon den Spin und die Parität des angeregten Kerns — sowie des Grundzustands, wie oben gesehen.

Zum Beispiel hat der erste angeregte Zustand des ^{17}O -Kerns Spin und Parität $J_{\text{Kern}}^P(^{17}\text{O}^*) = \frac{1}{2}^+$: das ungepaarte Neutron wird von der $1d_{5/2}$ auf die $2s_{1/2}$ versetzt.

II.4.5 c Elektrische Momente

Elektrisches Dipolmoment

Dem Schalenmodell nach besitzen Atomkerne eine definierte Parität unter Raumspiegelung, d.h. ihre Wellenfunktion ist Eigenzustand zum Paritätsoperator: $\hat{P}\Psi_{\text{Kern}}(\vec{r}) = \Psi_{\text{Kern}}(-\vec{r}) = \pm\Psi_{\text{Kern}}(\vec{r})$. Infolgedessen ist deren Ladungsdichteverteilung $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = Ze\Psi_{\text{Kern}}^*(\vec{r})\Psi_{\text{Kern}}(\vec{r})$ invariant unter der Transformation $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.

Aus der Definition (I.29) des elektrischen Dipolmoments ergibt sich dann sofort⁽⁴⁵⁾ $\vec{D} = -\vec{D}$, d.h. $\vec{D} = \vec{0}$: Kerne sollten kein elektrisches Dipolmoment haben, was experimentell bestätigt ist. Beispielsweise ist die obere experimentelle Grenze für den Wert des elektrischen Dipolmoments des Protons $|\vec{D}| < 0,54 \cdot 10^{-10} e\text{ fm}$ [53], während die „natürliche“ Größenordnung für eine Verteilung mit der Ausdehnung $\approx 1\text{ fm}$ und der Ladung e wäre $\approx 1 e\text{ fm}$.

Elektrisches Quadrupolmoment

Das elektrische Quadrupolmoment charakterisiert die Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelgestalt (§ I.4.3). Bei kugelsymmetrischen Kernen soll daher dieses Moment verschwinden, was experimentell bestätigt wird: gg-Kerne besitzen kein elektrisches Quadrupolmoment.

Für einen ug-Kern mit einer Protonenzahl Z um eins größer (bzw. kleiner) als eine magische Zahl sollte die zz -Komponente des elektrischen Quadrupolmoments Q_{zz} negativ (bzw. positiv) sein, weil das zusätzliche (bzw. fehlende) Proton die sonst kugelsymmetrische Ladungsverteilung in der äquatoriale Zone des Kerns vergrößert (bzw. verringert), wobei die z -Achse die Richtung des Kernspins ist. Dabei stellt die angenommene Unabhängigkeit der Nukleonen sicher, dass das zusätzliche bzw. fehlende Proton die durch die anderen Protonen erzeugte Ladungsverteilung nicht stört, sodass diese kugelsymmetrisch bleibt. Diese Vorhersage wird ebenfalls experimentell bestätigt, wie in Abb. II.9 gezeigt wurde.

Im Rahmen des Ein-Teilchen-Schalenmodells können auch die absoluten Werte des elektrischen Quadrupolmoments berechnet werden, indem man die mithilfe der Nukleonwellenfunktionen gebildete Wellenfunktion des Kerns in Gl. (I.30) einsetzt. Die so berechneten $|Q_{zz}|$ -Werte sind aber meist erheblich niedriger als die gemessenen Werte, d.h. die Verformungen der Kerne sind größer, als was im Modell gefunden wird. Dies ist leicht verständlich, denn das hier hergeleitete Modell beruht eigentlich auf den Ansatz sphärischer Kerne, sodass Abweichungen von der Kugelsymmetrie natürlich nicht gut können beschrieben werden. Eine zufriedenstellende Beschreibung deformierter

⁽⁴⁵⁾ Der Beweis folgt aus der mathematischen Substitution $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ im Integral, das $\vec{D}$ definiert.

^(aw) L. NORDHEIM, 1899–1985

Kerne erfordert von Anfang an die Nutzung eines mittleren Potentials ohne sphärische Symmetrie, wie im *Nilsson^(ax)-Modell* des Kerns.⁽⁴⁶⁾

Dem Einteilchen-Schalenmodell nach sollten alle gu-Kerne kein elektrisches Quadrupolmoment haben, weil ihre Protonen zu einem verschwindenden Gesamtdrehimpuls koppeln, d.h. kugelsymmetrisch verteilt sind, während die Neutronen keine elektrische Ladung besitzen, und daher zum elektrischen Quadrupolmoment nicht beitragen sollten. Tatsächlich haben aber die gu-Kerne $Q_{zz} \neq 0$: die Annahme, dass die sphärische Verteilung der Protonen durch die asymmetrische Neutronenverteilung nicht gestört wird, wird durch das Experiment nicht bestätigt. Hier handelt es sich noch um einen Effekt der vernachlässigten Zwei-Teilchen-Restwechselwirkungen, und zwar hier von Proton-Neutron-Kräften.

Bemerkung: In Abb. II.9 sind besonders große elektrische Quadrupolmomente $Q_{zz} > 1 \text{ e barn}$ bei Atomkernen mit $63 \leq Z \leq 75$ zu sehen, die Massenzahlen $150 \lesssim A \lesssim 190$ entsprechen. Diese stark deformierten Kerne sind genau diejenigen, bei denen Spin und Parität von den im Rahmen des Ein-Teilchen-Schalenmodells vorhergesagten Werten abweichen. Dies ist natürlich kein Zufall: die Beschreibung eines deformierten Kerns erfordert ein ebenfalls deformiertes mittleres Potential, somit sind die nutzbaren Quantenzahlen diejenigen, die mit den Projektionen des Nukleonbahndrehimpulses und -Spins auf die Symmetrieachse des Potentials assoziiert sind.

II.4.5 d Magnetisches Dipolmoment

Das Ein-Teilchen-Schalenmodell beruht auf der Annahme, dass die Nukleonen im Atomkern unabhängig voneinander sind. Infolgedessen wird das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}_{\text{Kern}}$ des Kerns einfach durch die Summe der Dipolmomente $\vec{\mu}$ der Nukleonen gegeben.

Magnetisches Dipolmoment eines einzelnen Nukleons im Kern

Daher kann man zuerst das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ eines einzelnen Nukleons betrachten. Zwei Drehimpulse tragen zu $\vec{\mu}$ bei, und zwar der Bahndrehimpuls des Nukleons und sein Spin (§I.4.3 b):

$$\hat{\vec{\mu}} = \hat{\vec{\mu}}_L + \hat{\vec{\mu}}_S = \mu_N \frac{g_L \hat{\vec{L}} + g_S \hat{\vec{S}}}{\hbar}, \quad (\text{II.33})$$

wobei die Landé-Faktoren g_L und g_S vom Typ des Nukleons abhängen.

Gleichung (II.33) lässt sich sofort als

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left[(g_L + g_S)(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}) + (g_L - g_S)(\hat{\vec{L}} - \hat{\vec{S}}) \right]$$

umschreiben. Das Skalarprodukt mit $\hat{\vec{J}}$ lautet dann

$$\hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left[(g_L + g_S)\hat{J}^2 + (g_L - g_S)(\hat{L}^2 - \hat{S}^2) \right].$$

Wie oben gesehen sind $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$ und $\hat{J}^2$ kommutierende Observablen, deren Erwartungswerte den Zustand des Nukleons charakterisieren. Es ergibt sich einfach:

$$\langle \hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} \rangle = \frac{\mu_N}{2} \left[(g_L + g_S)j(j+1) + (g_L - g_S)(\ell - s)(\ell + s + 1) \right] \hbar, \quad (\text{II.34})$$

wobei die Identität $\ell(\ell+1) - s(s+1) = (\ell-s)(\ell+s+1)$ benutzt wurde.

Magnetisches Dipolmoment des gesamten Kerns

Mithilfe der Ergebnisse für ein einzelnes Nukleon kann die durch Gl. (I.34) gegebene Projektion des magnetischen Dipolmoments des Kerns auf seinen Spin sofort berechnet werden:

- Bei gg-Kernen verschwindet der Kernspin J_{Kern} , sodass $\mu_{\text{Kern}} = 0$.

⁽⁴⁶⁾Vgl. in Ref. [43] ein Beispiel für ein deformiertes Potential.

^(ax)S. G. NILSSON, 1927–1979

- Bei ug- und gu-Kernen bestimmt das ungepaarte Nukleon das gesamte magnetische Dipolmoment des Kerns, denn die anderen Nukleonen koppeln zum Gesamtdrehimpuls $J = 0$ und folglich $\mu = 0$. Dann ist das Dipolmoment des Nukleons durch Gl. (II.33) gegeben, mit

$$\begin{aligned}
 & - \text{für ein ungepaartes Proton: } \begin{cases} \vec{\mu}_L = \mu_N \frac{\vec{L}}{\hbar} & \text{d.h. } g_L = 1; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar} & \text{wobei } g_S = 5,59. \end{cases} \\
 & - \text{für ein ungepaartes Neutron: } \begin{cases} \vec{\mu}_L = \vec{0} & \text{d.h. } g_L = 0 \text{ (keine elektrische Ladung!)}; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar} & \text{mit } g_S = -3,83. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zwischen der praktischen Definition (I.34) des magnetischen Dipolmoments des Kerns und Gl. (II.34) gibt dann für einen Atomkern mit einem ungepaarten Nukleon auf der (n, ℓ, j) -Schale:

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{(\ell - s)(\ell + s + 1)}{j + 1} \right]. \quad (\text{II.35})$$

Für ein Nukleon gilt $s = \frac{1}{2}$, sodass $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Gleichung (II.35) gibt also zwei Möglichkeiten für jeden Nukleontyp:

Fall A: $j = \ell + \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind parallel)

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)(j - 1) \right] = \mu_N \left[g_L j - \frac{1}{2}(g_L - g_S) \right]; \quad (\text{II.36})$$

Fall B: $j = \ell - \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind antiparallel)

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{j(j+2)}{j+1} \right] = \mu_N \left[g_L j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{j}{j+1} \right] \quad (\text{II.37})$$

Mit den jeweiligen Landé-Faktoren des Protons bzw. des Neutrons führen Gl. (II.36) und (II.37) zu den sog. *Schmidt^(ay)-Linien* [in der $(j - \mu_{\text{Kern}})$ -Ebene] für das magnetische Moment eines Kerns mit einem ungepaarten Proton bzw. Neutron:

$$\begin{aligned}
 & - \text{ug-Kern: } \mu_{\text{Kern}} = \begin{cases} \mu_N(j + 2, 29) & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ \mu_N \left(j - 2, 29 \frac{j}{j+1} \right) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}; \end{cases} \quad (\text{II.38a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \text{gu-Kern: } \mu_{\text{Kern}} = \begin{cases} -1,91\mu_N & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ +1,91 \frac{j}{j+1} \mu_N & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.38b})
 \end{aligned}$$

Experimentell liegen die magnetischen Dipolmomente praktisch aller ug- bzw. gu-Kerne zwischen den durch Gl. (II.38a) bzw. (II.38b) definierten Schmidt-Linien, d.h. das Schalenmodell ist relativ erfolgreich. Da die Dipolmomente aber nicht genau auf den Linien liegen, ist es nur ein Teilerfolg.

Bei näherer Betrachtung liegt die große Mehrheit der gemessenen magnetischen Dipolmomente für Kerne mit einem gegebenen Gesamtdrehimpuls j zwischen einerseits der durch Gl. (II.38) gegebenen relevanten Schmidt-Linie und andererseits der analogen Linie, die sich durch das Ersetzen des anomalen Landé-Faktors g_S des Nukleons durch $g_S = 2$, entsprechend dem erwarteten Wert für ein Elementarteilchen, ergibt. Im Fall der ug-Kerne mit $j = \ell + \frac{1}{2}$ heißt das zum Beispiel, dass die gemessenen μ_{Kern} zwischen den Linien $\mu_N(j + 2, 29)$ und $\mu_N(j + 0, 5)$ liegen.

^(ay)T. SCHMIDT, 1908–1986

- Das Einteilchen-Schalenmodell liefert keine Voraussage für das magnetische Dipolmoment der uu-Kerne.

II.4.5 e Insel der Stabilität

Jenseits der beobachteten maximalen magischen Neutronen- bzw. Protonenzahlen $N = 126$ bzw. $Z = 82$ sagen Modelle die Existenz weiterer solcher Zahlen vorher: 184 wäre die nächste magische Neutronenzahl und 114, 120 oder 126 — der Wert hängt vom benutzten Modell ab — die nächste magische Protonenzahl, vgl. Abb. II.13. Atomkerne mit einer solchen Zahl hätten dann ähnliche Eigenschaften, wie bei Kernen mit einer kleineren magischen Zahl gemessen worden ist.

Insbesondere wären solche Kerne erheblich stabiler, als ihre unmittelbare Nachbarn. Da alle bekannten Nuklide schwerer als ^{208}Pb instabil sind, heißt diese erhöhte Stabilität mit einer (deutlich) größeren mittleren Lebensdauer bzw. Halbwertszeit, oder sogar neue schwere stabile Kerne.

Diese mögliche „Insel“ von stabilen Kernen innerhalb des „Meers der Instabilität“ wird experimentell untersucht. Mithilfe Kollisionen von schweren Kernen wird versucht, neue superschwere Kerne zu erzeugen.⁽⁴⁷⁾ Neue Elemente (Ende 2025, bis zur Massenzahl $Z = 118$) wurden tatsächlich erzeugt und teilweise charakterisiert. Messungen deren Halbwertszeiten zeigen, dass Nuklide mit Z zwischen 110 bis 114 und mit so vielen Neutronen ($170 \leq N \leq 177$), wie experimentell realisierbar ist, langlebiger sind als die Nachbarkerne: z.B. haben ^{281}Ds und ^{282}Ds ($Z = 110$), ^{281}Rg und ^{282}Rg ($Z = 111$), ^{285}Cn und ^{286}Cn ($Z = 112$) und ^{290}Fl ($Z = 114$) Halbwertszeiten länger als 10 s, im Vergleich zu 0.1–1 s für die Nachbarnuklide. Dabei sind diese Nuklide aber noch zu neutronenarm, um wirklich teil der Insel der Stabilität zu sein.

II.4.6 Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns

einschließlich Diskussion über die mittlere freie Weglänge eines Nukleons im Kern [55]

⁽⁴⁷⁾Eine Übersicht über diese Experimente und deren Ergebnisse ist in Ref. [54] zu finden

Anhänge

KAPITEL A

Der Drehimpuls in Quantenmechanik

Wenn ich Zeit finde...

A.1 Bahndrehimpuls - Algebra

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{\nabla}}$$

$$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\hbar \sum_{c=1}^3 \epsilon_{abc} \hat{L}_c \quad (\text{A.1})$$

A.2 Eigenwerte. Kugelflächenfunktionen

A.2.1 Eigenwerte

A.2.2 Kugelflächenfunktionen

$$\hat{\vec{L}}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1)\hbar^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.2a})$$

$$\hat{L}_z Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.2b})$$

wobei ℓ ist die Bahndrehimpuls- („azimutale“) und $m \in \{-\ell, \dots, \ell\}$ die magnetische Quantenzahl ist.

Die Parität eines solchen Zustands mit bestimmter ℓ ist $\Pi = (-)^{\ell}$ unabhängig von m .

Die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen sowie die Ausdrücke einiger davon sind in fast allen Quantenmechanik-Lehrbüchern zu finden, z.B. in Anhang B in Ref. [?].

A.3 Spin

A.4 Kopplung von Drehimpulsen

Literaturverzeichnis

- [1] J.-L. Basdevant, J. Rich, M. Spiro, *Fundamentals in nuclear physics*, 1. Aufl. (Springer, New York, 2005).
- [2] K. Bethge, G. Walter, B. Wiedemann, *Kernphysik*, 3. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2008).
- [3] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, *An introduction to Nuclear Physics*, 2. Aufl. (University Press, Cambridge, 2001).
- [4] H. Friedmann, *Einführung in die Kernphysik*, 1. Aufl. (Wiley-VCH, Weinheim, 2014).
- [5] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, 6. Aufl. (Teubner, Stuttgart, 1994).
- [6] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*, 8. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2009).
- [7] E. Bodenstein, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil I* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1972).
- [8] E. Bodenstein, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil II* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1973).
- [9] E. Bodenstein, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung, Teil III* (Bibliographisches Institut, Zurich, 1973).
- [10] W. T. Hering, *Angewandte Kernphysik*, 1. Aufl. (Teubner, Stuttgart, 1999).
- [11] W. Heisenberg, *Die Physik der Atomkerne* (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1949).
- [12] H. Geiger, E. Marsden, *Phil. Mag. (Ser. 6)* **25** (1913) 604–623.
- [13] E. Rutherford, *Phil. Mag. (Ser. 6)* **21** (1911) 669–688.
- [14] N. S. Wall, J. R. Rees, K. W. Ford, *Phys. Rev.* **97** (1955) 726–732.
- [15] R. Hofstadter, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** (1957) 231–316.
- [16] H. De Vries, C. W. De Jager, C. De Vries, *Atom. Data Nucl. Data Tabl.* **36** (1987) 495–536.
- [17] C. J. Batty, E. Friedman, H. J. Gils, H. Rebel, *Adv. Nucl. Phys.* **19** (1989) 1–188.
- [18] S. Abrahamyan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 112502 [[arXiv:1201.2568 \[nucl-ex\]](#)].
- [19] C. Tarbert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 242502 [[arXiv:1311.0168 \[nucl-ex\]](#)].
- [20] B. Jonson, A. Richter, *Phys. Bl.* **54** (1998) 1121–1125.
- [21] H. Haken, H. C. Wolf, *Atom- und Quantenphysik*, 7. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2000).
- [22] D. Lunney, J. M. Pearson, C. Thibault, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 1021–1082.

- [23] S. George *et al.*, Physik in unserer Zeit **36** (2007) 163–164.
- [24] G. Audi *et al.*, Chin. Phys. C **36** (2012) 1157–1286.
- [25] E. Majorana, Z. Phys. **82** (1933) 137–145.
- [26] W. Heisenberg, Z. Phys. **77** (1932) 1–11.
- [27] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3. Aufl. (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- [28] Particle Data Group Collaboration [S. Navas *et al.*], Phys. Rev. D **110** (2024) 030001 [vgl. <https://pdglive.lbl.gov/>].
- [29] J. S. Nico *et al.*, Nature **444** (2006) 1059–1062.
- [30] E. Fermi, *Nuclear physics*, 2. Aufl. (University of Chicago Press, Chicago, 1950).
- [31] C. F. v. Weizsäcker, Z. Phys. **96** (1935) 431–458.
- [32] H. A. Bethe, R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys **8** (1936) 82–229.
- [33] N. Gauthier, Am. J. Phys. **57** (1989) 344–346.
- [34] A. Wapstra, N. Gove, Nucl. Data Tables A **9** (1971) 265–468.
- [35] J. Mattauch, Z. Phys. **91** (1934) 361–371.
- [36] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik IV. Statistische Physik*, 5. Aufl. (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2010).
- [37] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik. Band 4: Spezielle Relativitätstheorie. Thermodynamik*, 6. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2005).
- [38] K. Lodders, Astrophys. J. **591** (2003) 1220–1247.
- [39] N. J. Stone, Atom. Data Nucl. Data Tabl. **90** (2005) 75–176.
- [40] H.-W. Hammer, A. Nogga, A. Schwenk, Rev. Mod. Phys. **85** (2013) 197 [1210.4273].
- [41] T. Otsuka, T. Suzuki, J. D. Holt, A. Schwenk, Y. Akaishi, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 032501 [arXiv:0908.2607 [nucl-th]].
- [42] J. D. Holt, T. Otsuka, A. Schwenk, T. Suzuki, J. Phys. G **39** (2012) 085111 [arXiv:1009.5984 [nucl-th]].
- [43] K. Heyde, *Basic ideas and concepts in nuclear physics*, 1. Aufl. (Institute of Physics Publishing, Bristol & Philadelphia, 1994).
- [44] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik III. Quantenmechanik*, 5. Aufl. (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008).
- [45] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, 9. Aufl. (Dover, New York, 1970).
- [46] F. W. J. Olver *et al.*, *NIST Handbook of mathematical functions* (University Press, Cambridge, 2010), [vgl. <http://dlmf.nist.gov/>].
- [47] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantenmechanik, Band 1*, 3. Aufl. (de Gruyter, Berlin, 2007).

- [48] A. Messiah, *Quantenmechanik, Band 1*, 2. Aufl. (De Gruyter, Berlin, 1991).
- [49] M. Goeppert Mayer, Phys. Rev. **75** (1949) 1969–1970.
- [50] M. Goeppert Mayer, Phys. Rev. **78** (1950) 16–21.
- [51] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, Phys. Rev. **75** (1949) 1766.
- [52] E. Landau, L.D und Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band IV: Quantenelektrodynamik*, 7. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991).
- [53] Particle Data Group Collaboration [K. A. Olive *et al.*], Chin. Phys. C **38** (2014) 090001 [vgl. <http://www-pdg.lbl.gov/>].
- [54] S. Hofmann, Physik Journal **4** (2005) Nr. 5 37–43.
- [55] N. D. Cook, *Models of the atomic nucleus*, 1. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2006).