

III.3.2 d Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit

Bei der Emission eines α -Teilchens durch einen Mutterkern handelt es sich um einen rein quantenmechanischen Effekt — eigentlich erfolgt der Zerfall durch *Tunneleffekt* —, dessen Wahrchein-

lichkeit sich bis auf einigen Faktoren relativ einfach berechnen lässt. Daraus kann man dann die Zerfallskonstante bzw. Halbwertszeit des Mutterkerns abschätzen, und dabei die Geiger–Nuttall-Regel wiederfinden.

Historisch wurde diese Berechnung durch Gamow^(bh) kurz nach der Formulierung der Quantenmechanik durchgeführt [62]; dies zeigte insbesondere, dass die (damals) neue Mechanik nicht nur in der Atomphysik bei Längenskalen von 0,1–10 nm gilt, sondern auch in der Kernphysik bei viel kleineren Skalen.

Modellierung des Problems

Wir betrachten den Zerfall eines Mutterkerns mit Ladungszahl Z in einen Tochterkern — Masse M_T , Ladungszahl $Z - 2$ — und ein α -Teilchen. Sei ε_α die totale Energie des α -Teilchens, abgesehen von dessen Massenenergie.

- Im Anfangszustand bilden 2 Protonen und 2 Neutronen des Mutterkerns ein α -Teilchen.

Dabei hilft die besonders hohe Bindungsenergie pro Nukleon des ${}^4_2\text{He}$ -Kerns (s. Nebenbild in Abb. I.11), entsprechend einer starken Zusammenbindung der zwei Protonen und zwei Neutronen. Dafür müssen sich die vier Nukleonen zusammen in einem kleinen Bereich in Orts- (Größe der Ordnung des ${}^4_2\text{He}$ -Kernradius) und Impulsraum befinden: zur genauen Beschreibung dieses Stadiums ist daher ein detailliertes Modell des Kerns nötig, das solche 4-Teilchen-Effekte wiedergeben kann.

Dieses α -Teilchen ist in einem Potentialtopf $V_\alpha(\vec{r})$ eingeschlossen, der durch den Rest des Mutterkerns verursacht wird. Wie im Fall der in Abschn. II.4 eingeführten Potentialtöpfe handelt es sich dabei um ein mittleres effektives Potential, das die Wirkung aller $A - 4$ anderen Nukleonen des Kerns auf das α -Teilchen beschreiben soll.⁽⁵⁶⁾ Der Einfachheit halber wird hiernach ein kugelsymmetrisches Kastenpotential mit der Tiefe $-V_0^{(\alpha)}$ angenommen.

- Nach dem Zerfall befindet sich das α -Teilchen außerhalb des Potentialtopfs: es spürt das durch den Tochterkern erzeugte abstoßende Coulomb-Potential und wird deshalb beschleunigt, bis es die durch Gl. (III.13) gegebene “endgültige” kinetische Energie $\varepsilon_{\alpha\text{kin}}$ hat, die gleich dessen totalen Energie ε_α ist.

Genauer wird das α -Teilchen beschleunigt, so lange das Kernpotential spürbar ist, d.h. so lange dieses Potential noch nicht durch die Elektronen des „Mutter“-Atoms abgeschirmt ist. Wenn das α -Teilchen außerhalb der Elektronenhülle ist, wird es nicht mehr beschleunigt. Stattdessen wird es eher abgebremst, denn es fängt an, andere Atome zu treffen, vgl. Kap. **Strahlung in Materie**. Daher bezeichnet die „kinetische Energie im Endzustand“ $\varepsilon_{\alpha\text{kin}}$ die Energie am Ende der Beschleunigungsphase, vor dem Anfang des Energieverlusts über Stöße mit anderen Atomen.

Unter der Annahme, dass sich die Reichweite R des Kastenpotentialtopfs V_α , entsprechend etwa dem Kernradius, im Zerfall nicht ändert, lautet das durch das α -Teilchen gespürte Potential

$$V_\alpha(r) = \begin{cases} -V_{\alpha,0} & \text{für } r < R, \\ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{für } r \geq R. \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Ein solches Potential wird in Abb. III.8 dargestellt. Die Größenordnung des maximalen Werts der potentiellen Energie bei $r = R$ lässt sich einfach abschätzen: mit $Z \simeq 60$ und $R \simeq 5$ fm kommt $V_\alpha(R) \approx 35$ MeV, erheblich größer als die totale Energie $\varepsilon_\alpha \approx 3\text{--}8$ MeV. Daher treten drei Gebiete auf:

⁽⁵⁶⁾ Dieses Potential V_α unterscheidet sich vom Potential V_p bzw. V_n , das ein Proton bzw. Neutron spürt.

^(bh) G. GAMOW, 1904–1968

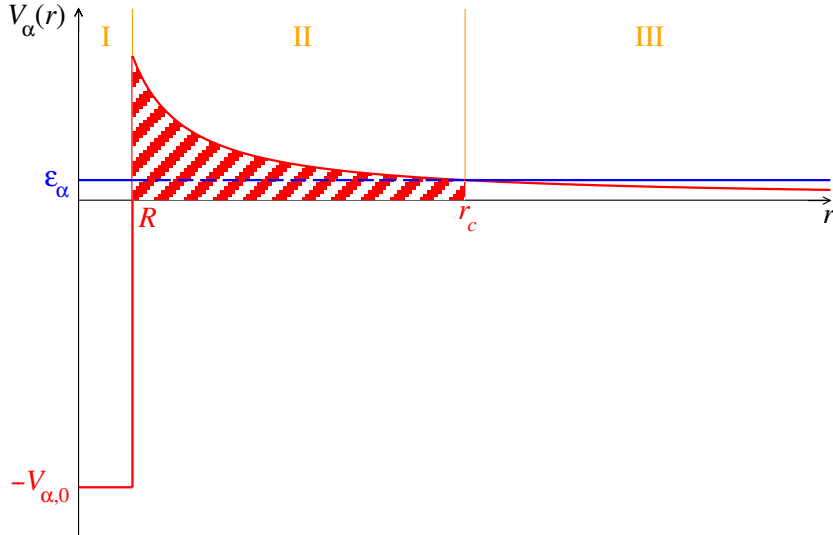


Abbildung III.8 – Vereinfachter Verlauf des effektiven Potentials für die Modellierung des α -Zerfalls.

- für $r < R$ (Gebiet I) oder $r \geq r_c$ (Gebiet III) mit r_c dem klassischen Umkehrpunkt, definiert durch

$$V_\alpha(r_c) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_c} = \varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}} \quad \text{d.h.} \quad r_c = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 \varepsilon_{\alpha_{\text{kin}}}}, \quad (\text{III.17})$$

ist die potentielle Energie kleiner als ε_α : daher besitzt das α -Teilchen dort eine positive kinetische Energie, d.h. klassisch darf es in diesen Bereichen lokalisiert werden.

- für $R \leq r < r_c$ (Gebiet II) ist die potentielle Energie des α -Teilchens größer als dessen totale Energie, d.h. das Teilchen hat in diesem Bereich keine wohldefinierte kinetische Energie und darf sich daher klassisch dort nicht befinden.

Klassisch ist das Kommen des α -Teilchens aus dem Kern, vom Gebiet I zum Gebiet III, ohne Anregung unmöglich. Somit beruht der Zerfall auf dem quantenmechanischen *Tunneleffekt*, und die Zerfallswahrscheinlichkeit entspricht der Tunnelwahrscheinlichkeit. Die Letztere ergibt sich aus der Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein α -Teilchen im Potentialtopf (III.16)

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \Delta \psi_\alpha(\vec{r}) + V_\alpha(\vec{r}) \psi_\alpha(\vec{r}) = \varepsilon_\alpha \psi_\alpha(\vec{r}). \quad (\text{III.18a})$$

Entsprechend der sphärischen Symmetrie des angenommenen effektiven Potentials (III.16) kann man für die Wellenfunktion den üblichen Separationsansatz $\psi_\alpha(\vec{r}) = R_\alpha(r) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$ machen, wobei der radiale Anteil $R_\alpha(r)$ im Prinzip auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl abhängt, obwohl dies hier nicht explizit geschrieben wird. Mit diesem Ansatz führt Gl. (III.18a) zur Differentialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_\alpha(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_\alpha(r) \right] + V_\alpha(r) R_\alpha(r) = \varepsilon_\alpha R_\alpha(r). \quad (\text{III.18b})$$

Tunnelwahrscheinlichkeit, Gamow-Faktor

Betrachte man zunächst den Fall $\ell = 0$, so dass der zweite Term in den eckigen Klammern in Gl. (III.18b) verschwindet. Trotz dieser Vereinfachung bleibt die Differentialgleichung wegen der komplizierten Form des Potentials V_α nicht exakt lösbar.

Anhand eines Näherungsverfahrens kann man doch eine annähernde Lösung finden.⁽⁵⁷⁾ Damit lässt sich die Tunnelwahrscheinlichkeit bestimmen, die durch das Verhältnis der Aufenthaltswahr-

⁽⁵⁷⁾ Die Berechnung wird im Anhang III.A zu diesem Kapitel detailliert.

scheinlichkeiten bei $r = r_c$ — d.h. am inneren Rand des klassisch erlaubten Bereichs außerhalb des Kerns — und bei $r = R$ — entsprechend dem Rand des effektiven Potentials — gegeben ist:

$$\mathcal{P} \simeq \frac{4\pi r_c^2 |R_\alpha(r=r_c)|^2}{4\pi R^2 |R_\alpha(r=R)|^2}, \quad (\text{III.19})$$

wobei die Faktoren $4\pi r_c^2$ und $4\pi R^2$ die Flächen der Kugel $r = r_c$ und $r = R$ sind. Dabei findet man, bis auf einen hier unwesentlichen Vorfaktor der Ordnung Eins⁽⁵⁷⁾

$$\mathcal{P} \simeq \exp \left[-2 \int_R^{r_c} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} [V_\alpha(r') - \varepsilon_\alpha]} dr' \right] \equiv e^{-G}, \quad (\text{III.20})$$

mit dem sogenannten *Gamow-Faktor* G . Unter Verwendung von $V_\alpha(r') = V_\alpha(r_c) r_c/r' = \varepsilon_\alpha r_c/r'$, wobei die zweite Identität aus Gl. (III.17) kommt, gilt

$$G = 2\sqrt{\frac{2m_\alpha \varepsilon_\alpha}{\hbar^2}} \int_R^{r_c} \sqrt{\frac{r_c}{r'} - 1} dr' = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2 \varepsilon_\alpha}} \pi \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right), \quad (\text{III.21a})$$

mit der Funktion

$$\mathcal{G}(x) \equiv \frac{2}{\pi} [\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}], \quad (\text{III.21b})$$

die für $0 \leq x \leq 1$ Werte zwischen 0 und 1 annimmt, wie in Abb. III.9 gezeigt wird.

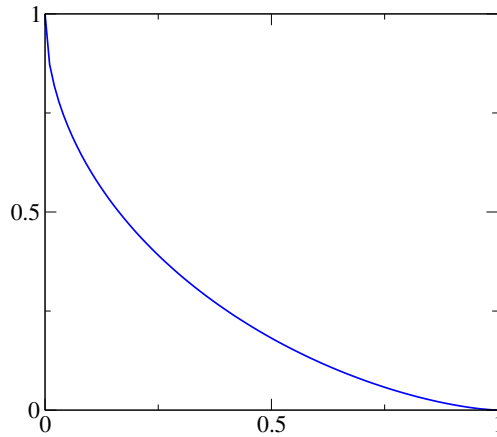


Abbildung III.9 – Verlauf der durch Gl. (III.21b) definierten Funktion $\mathcal{G}(x)$.

Energetisch ist der Zerfall für $Q_\alpha > 0$ möglich, insbesondere im Grenzfall $Q_\alpha \rightarrow 0^+$. Im letzteren Limes, der sich äquivalent $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0^+$ schreiben lässt, geht der klassische Umkehrpunkt r_c nach $+\infty$, d.h. $R/r_c \rightarrow 0$ und dementsprechend $\mathcal{G}(R/r_c) \rightarrow 1$. Daher ist der Gamow-Faktor durch den Faktor $1/\varepsilon_\alpha$ kontrolliert, und zwar $G \rightarrow +\infty$, so dass die Tunnelwahrscheinlichkeit (III.20) gegen Null geht. Dies erklärt, warum Zerfälle nur für Q_α -Faktoren mit einem minimalen Wert von etwa 2 MeV beobachtet werden.

Bemerkungen:

* Hier wurde die Tunnelwahrscheinlichkeit als das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten definiert, Gl. (III.19). Manchmal wird eher das Verhältnis der Teilchenflussdichten verwendet. Da die Teilchenflussdichte grob gesagt gleich dem Produkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit der Geschwindigkeit ist, unterscheidet sich diese alternative Definition von der hier benutzten nur um einen unwichtigen Vorfaktor zum Exponentialterm.

* Als Gamow-Faktor wird manchmal nicht G , definiert durch Gl. (III.21a), bezeichnet, sondern e^{-G} oder $G/2$.

* Der Gamow-Faktor (III.21a) lässt sich noch in der Form

$$G = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{\varepsilon_\alpha}} \sqrt{2\pi} \mathcal{G}\left(\frac{R}{r_c}\right)$$

umschreiben. Dabei erkennt man die elektromagnetische Feinstrukturkonstante $\alpha_{\text{em}} \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$, sowie das Verhältnis von der Massenenergie des α -Teilchens zu dessen kinetischen Energie. Somit kann man die Größenordnung des Gamow-Faktors schnell abschätzen.

Zerfallsrate, Halbwertszeit

Die Tunnelwahrscheinlichkeit $\mathcal{P} \simeq e^{-G}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für den „Sprung“ von $r = R$ nach $r = r_c$. Um die Zerfallsrate λ_α , d.h. die Anzahl dieser Sprünge pro Zeiteinheit, zu erhalten, muss man noch \mathcal{P} durch die Rate, mit der Teilchen sich bei $r = R$ befinden, multiplizieren. Eine grobe Abschätzung für diese Rate ist $v_{\text{in}}/2R$, wobei v_{in} die Geschwindigkeit des α -Teilchens im Potentialtopf ist, entsprechend dem Kehrwert der Zeitdauer zur Durchquerung des Topfs:

$$\lambda_\alpha \simeq \frac{v_{\text{in}}}{2R} e^{-G}.$$

Für den Halbwertszeit des Mutterkerns ergibt sich somit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_\alpha} \simeq \frac{\ln 2}{v_{\text{in}}/2R} e^G,$$

d.h. $\ln T_{1/2} \simeq \ln(2R \ln 2 / v_{\text{in}}) + G$. Unter Betrachtung der $1/\varepsilon_\alpha$ -Abhängigkeit des Gamow-Faktors findet man das Geiger–Nuttall-Gesetz (III.15)

$$\ln T_{1/2} = -a + \frac{b}{\sqrt{\varepsilon_\alpha}}$$

wieder. Das Letztere ist somit ein starker Hinweis auf die Gültigkeit der Modellierung des α -Zerfalls als Tunnelprozess.

Fall $\ell \neq 0$

Wie früher schon diskutiert wurde, kann die Erhaltung des Drehimpulses im Zerfall dazu führen, dass das α -Teilchen mit einem nicht-verschwindenden Drehimpuls bezüglich des Tochterkerns emittiert wird, d.h. mit einer Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell \neq 0$.

In diesem Fall lässt sich der radiale Anteil (III.18b) der Schrödinger-Gleichung für das α -Teilchen noch als

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\alpha,\ell}(r)) + V_{\alpha,\text{eff}}(r) R_{\alpha,\ell}(r) = \varepsilon_\alpha R_{\alpha,\ell}(r), \quad (\text{III.22a})$$

umschreiben, wobei

$$V_{\alpha,\text{eff}}(r) \equiv V_\alpha(r) + \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (\text{III.22b})$$

Dabei wird der Effekt des Bahndrehimpulses als eine Änderung des durch das α -Teilchen gespürten Potentials berücksichtigt. Somit sieht das Teilchen eine höhere Potentialbarriere, als wenn es keinen bzw. einen kleineren Bahndrehimpuls hätte. Wiederum führt diese erhöhte (und breitere) Potentialbarriere zu einer kleineren Tunnelwahrscheinlichkeit bzw. einer längeren Halbwertszeit des Mutterkerns.

Anhang zum Kapitel III

III.A α -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit

Sei $u(r) \equiv rR_\alpha(r)$. Dann vereinfacht sich die Differentialgleichung (III.18a) für den radialen Anteil der Wellenfunktion im Fall $\ell = 0$ zu

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V_\alpha(r)]u(r) = 0. \quad (\text{III.53})$$

Der Ansatz $u(r) = e^{\Phi(r)}$ führt dann zur Gleichung

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[V_\alpha(r) - E] \equiv \frac{g(r)}{\hbar^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } R < r < r_c, \\ < 0 & \text{für } r < R \text{ oder } r > r_c \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

für die unbekannte Funktion $\Phi(r)$. Die WKB-Methode (Wentzel^(bn), Kramers^(bo), Brillouin^(bp)) liefert eine annähernde Lösung Φ solange in der linken Seite der Gleichung der erste Term vernachlässigbar bezüglich des zweiten Terms ist. Das Einsetzen des Ansatzes

$$\Phi \equiv \frac{1}{\hbar} \Phi_0 + \Phi_1 + \hbar \Phi_2 + \dots$$

in Gl. (III.54) unter der Gültigkeitsbedingung $\left| \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right| \ll \left| \frac{d\Phi}{dr} \right|^2$ gibt

- zur führenden $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar^2}\right)$ Ordnung: $\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{d\Phi_0}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\hbar^2}g(r)$, d.h. $\Phi_0(r) = \pm \int^r \sqrt{g(r')} \, dr'$;
- zur Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar}\right)$: $\frac{1}{\hbar} \frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{\hbar} \frac{d\Phi_0}{dr} \frac{d\Phi_1}{dr} = 0$, so dass $\Phi_1(r) = -\frac{1}{2} \ln \frac{d\Phi_0}{dr} = -\frac{1}{4} \ln |g(r)|$, usw.

Insgesamt ergibt sich also die WKB-Lösung

$$u(r) = \frac{1}{|q(r)|^{1/4}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int^r \sqrt{g(r')} \, dr'}. \quad (\text{III.55})$$

Im Fall des Tunneleffekts durch eine Barriere gilt

$$\frac{\sqrt{g(r)}}{\hbar} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V_{0,\alpha} + E]} \equiv K & \text{für } r < R \text{ (Gebiet I);} \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V_{\alpha}(r) - E]} \equiv \kappa(r) & \text{für } R < r < r_c \text{ (Gebiet II);} \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [E - V_{\alpha}(r)]} \equiv k(r) & \text{für } r > r_c \text{ (Gebiet III).} \end{cases}$$

Die betreffenden reduzierten Wellenfunktionen sind

$$u_{\text{I}}(r) = A e^{\text{i}Kr} + B e^{-\text{i}Kr}, \quad (\text{III.57a})$$

$$u_{\text{II}}(r) = \frac{C}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp \left[\int_r^{r_c} \kappa(r') \, \text{d}r' \right] + \frac{D}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp \left[- \int_r^{r_c} \kappa(r') \, \text{d}r' \right] \quad (\text{III.57b})$$

$$\text{und } u_{\text{III}}(r) = \frac{E}{\sqrt{k(r)}} \exp \left[i \int_{r_c}^r k(r') dr' \right] + \frac{F}{\sqrt{k(r)}} \exp \left[-i \int_{r_c}^r k(r') dr' \right], \quad (\text{III.57c})$$

^(bn)G. WENTZEL, 1898–1978 ^(bo)H. A. KRAMERS, 1894–1952 ^(bp)L. BRILLOUIN, 1889–1969

wobei A , B , C , D , E und F Konstanten sind, die den Kontinuitätsbedingungen

$$u_{\text{I}}(R) = u_{\text{II}}(R), \quad \frac{du_{\text{I}}}{dr}(R) = \frac{du_{\text{II}}}{dr}(R), \quad u_{\text{II}}(r_c) = u_{\text{III}}(r_c), \quad \frac{du_{\text{II}}}{dr}(r_c) = \frac{du_{\text{III}}}{dr}(r_c)$$

(entsprechend den analogen Bedingungen für die Wellenfunktionen $\psi_i(r) = u_i(r)/r$, $i = \text{I}, \text{II}, \text{III}$)
genügen sollen.⁽⁶⁹⁾

⁽⁶⁹⁾ Beim klassischen Umkehrpunkt $r = r_c$ sind aber die durch Gl. (III.57b)–(III.57c) definierten Funktionen u_{II} und u_{III} unendlich, was die Ungültigkeit der Bedingung $|d^2\Phi/dr^2| \ll |d\Phi/dr|^2$ widerspiegelt. Statt denen soll man lokal die durch ein anderes Näherungsverfahren erhaltenen Funktionen benutzen, oder einfach $u(r) = \exp[\pm \int \sqrt{g(r')} dr']$, wobei der Integrand bei $r = r_c$ tatsächlich verschwindet.