

Daraus folgt schließlich

$$N_2(t) = N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (\text{III.9})$$

Im Folgenden wird diese Lösung für verschiedene mögliche Verhältnisse zwischen den Zerfallskonstanten λ_1 und λ_2 studiert. Der Einfachheit halber wird nur der Fall $N_2(0) = 0$ betrachtet.

– **Fall a:** $\lambda_1 \gg \lambda_2$ d.h. $\tau_1 \ll \tau_2$: der Anstieg der Tochterkernmenge ist schneller als ihr Zerfall.

Dies ist z.B. der Fall für die $^{131}_{52}\text{Te} \xrightarrow{\beta^-} {}^{131}_{53}\text{I} \xrightarrow{\beta^-} {}^{131}_{54}\text{Xe}$ – Zerfallskette: die jeweiligen Halbwertszeiten sind $T_{1/2}(^{131}\text{Te}) = 25 \text{ mn} \ll T_{1/2}(^{131}\text{I}) = 8 \text{ d}$ (Tage).

Die Anzahl (III.9) von Jod-Tochterkernen lautet

$$N_2(t) \sim \begin{cases} \lambda_1 f_{12} N_1(0) t & \text{für } t \ll \tau_1; \\ f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_2 t} & \text{für } t \gg \tau_1. \end{cases}$$

$N_2(t)$ wächst zuerst linear mit der Zeit t , was die bei kurzen Zeiten $t \ll \tau_1$ fast lineare Abnahme von $N_1(t)$ widerspiegelt. Bei großen Zeiten $t \gg \tau_1$ — wenn alle Typ-1 Nuklide zerfallen sind und keine Typ-2 Tochterkerne mehr erzeugt werden — sinkt $N_2(t)$ exponentiell mit der Zerfallskonstante λ_2 . Dieses Verhalten wird in Abb. III.1 dargestellt.

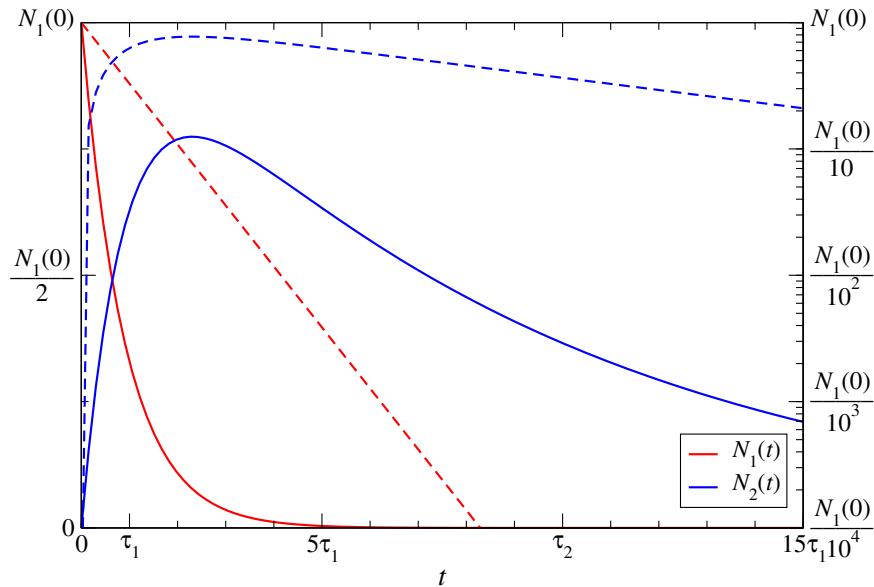


Abbildung III.1 – Entwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall $\lambda_1 \gg \lambda_2$ (genauer: $\lambda_1 = 10\lambda_2$). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

– **Fall b:** $\lambda_1 \lesssim \lambda_2$ d.h. $\tau_1 \gtrsim \tau_2$.

Beispielsweise $^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\text{Ce}$: $T_{1/2}(^{140}\text{Ba}) = 12,75 \text{ d}$, $T_{1/2}(^{140}\text{La}) = 1,68 \text{ d}$.

Aus Gl. (III.9) mit $N_2(0) = 0$ ergibt sich

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} \text{ für } t \gg \tau_1,$$

d.h. das Verhältnis $N_2(t)/N_1(t)$ der Anzahlen von Tochter- und Mutterkernen bleibt für $t \gg \tau_1$ ungefähr konstant: man spricht von einem *transienten Gleichgewicht*, d.h. einem sich zeitlich ändernden Gleichgewicht. Folglich nehmen die beiden Kernarten mit derselben Rate λ_1 ab, wie in Abb. III.2 dargestellt wird: in logarithmischer Skala (Strichlinien) sind $N_1(t)$ und $N_2(t)$ für $t \gg \tau_1$ Geraden mit derselben Steigung.

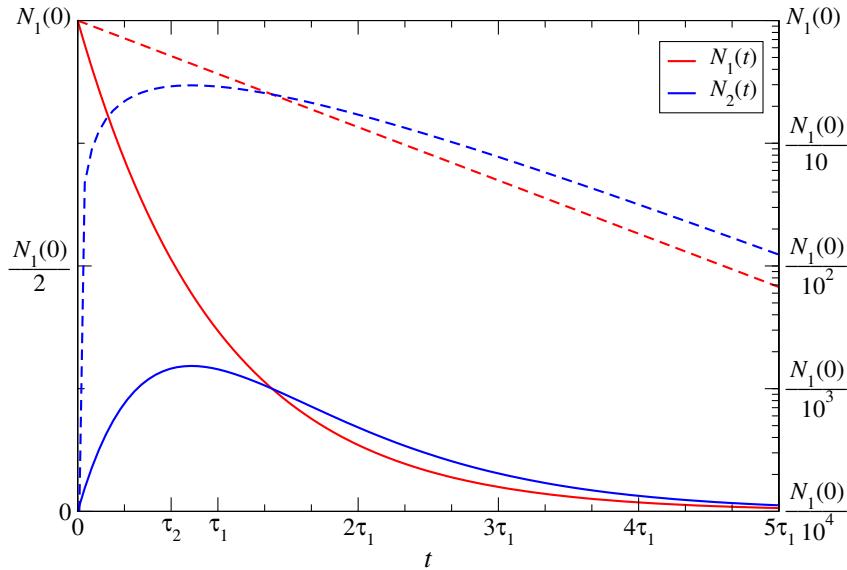


Abbildung III.2 – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall $\lambda_1 \lesssim \lambda_2$ (hier $\lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_2$). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

- **Fall c:** $\lambda_1 \ll \lambda_2$ d.h. $\tau_1 \gg \tau_2$: der Mutterkern ist viel langlebiger als der Tochterkern.
Dieser Fall kommt insbesondere in den drei aus Aktinoiden stammenden natürlichen Zerfallsreihen (s. Abschn. III.2) häufig vor.

Z.B. $^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} ^{234}_{90}\text{Th} \xrightarrow{\beta^-} ^{234}_{91}\text{Pa}$: $T_{1/2}(^{238}\text{U}) = 4,47 \cdot 10^9 \text{ a} \gg T_{1/2}(^{234}\text{Th}) = 24,1 \text{ d}$.

Dann ergibt sich

- für $t \ll \tau_2$: $N_1(t) \sim N_1(0)$ und $N_2(t) \sim \lambda_1 f_{12} N_1(0) t$;
- für $\tau_2 \ll t \ll \tau_1$: $N_1(t) \sim N_1(0)$ und $N_2(t) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(0) = \text{Konstante}$;
diese langdauernde Gleichmässigkeit der Anzahl N_2 von Tochterkernen wird *säkulare Gleichgewicht* genannt;⁽⁴⁹⁾
- für $\tau_1 \ll t$ nimmt $N_2(t) \sim \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(t)$ exponentiell mit der Zerfallskonstante λ_1 ab.

Hier taucht wie im vorigen Fall ein transientes Gleichgewicht auf: $N_1(t)$ und $N_2(t)$ sind selbst nicht konstant, deren Verhältnis bleibt aber konstant.

Dieses Verhalten zeigt Abb. III.3.

Als Sonderfall dieser Fallstudien kann man folgendes Problem betrachten: Wie entwickelt sich die Aktivität einer radioaktiven Substanz, wenn sie mit konstanter Produktionsrate erzeugt wird?

Eine solche gleichmässige Erzeugungsrate kommt beispielsweise vor, falls die Substanz aus Tochterkernen besteht, deren Mutterkerne in konstanter Menge bleiben. Dies entspricht formal dem obigen Fall c, indem man den Limes einer unendlichen mittleren Lebensdauer $\tau_1 \rightarrow +\infty$ betrachtet, sodass $N_1(t)$ konstant bleibt, obzwar mit einer endlichen Zerfallsrate $\lambda_1 \ll \lambda_2$, damit neue Tochterkerne erzeugt werden (τ_1 ist daher nicht mehr der Kehrwert von λ_1).

Die Anzahl von Tochterkernen genügt dann der differentiellen Gleichung [vgl. Gl. (III.8)]

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) - \lambda_2 N_2(t),$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite dem Zerfall von $\lambda_1 N_1(0)$ Mutterkernen pro Sekunde entspricht. Die in Abb. III.4 dargestellte Lösung dieser Gleichung unter der Bedingung $N_2(0) = 0$

⁽⁴⁹⁾Säkular kommt aus dem lateinischen Wort *saeculum* = Jahrhundert.

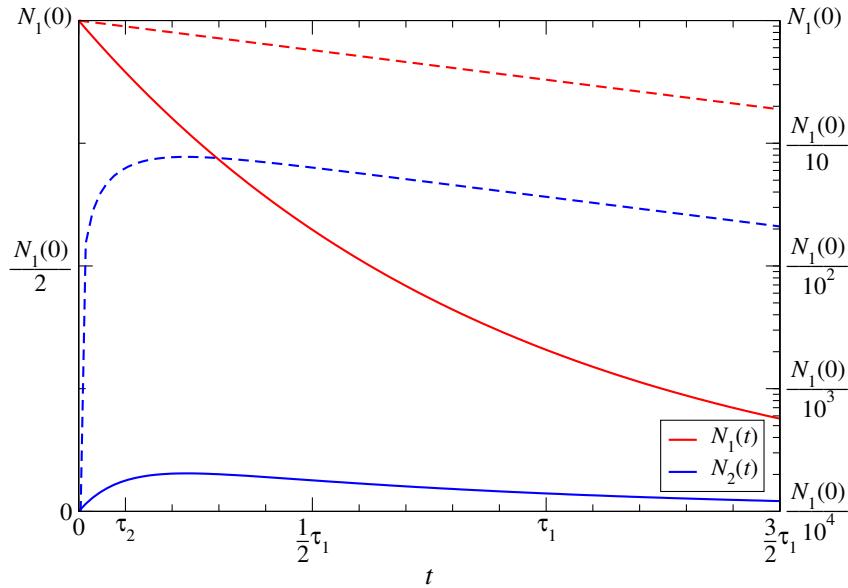


Abbildung III.3 – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall $\lambda_1 \ll \lambda_2$ (hier $\lambda_1 = 0.1\lambda_2$). Volllinien: lineare Skala; Strichlinien: logarithmische Skala.

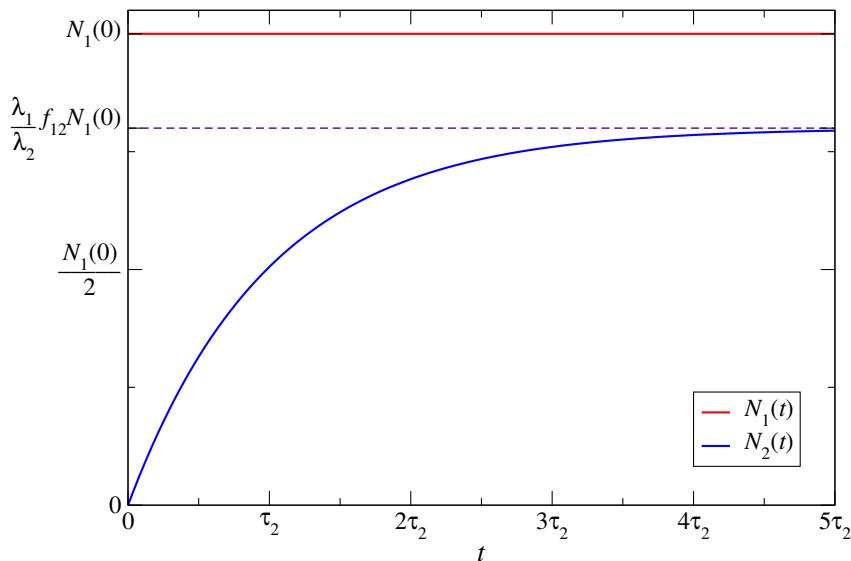


Abbildung III.4 – Zeitentwicklung der Anzahl von Mutter- bzw. Tochterkernen $N_1(t)$ bzw. $N_2(t)$ im Fall ständig neu produzierter Mutterkerne.

lautet

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2} N_1(0) \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right).$$

$N_2(t)$ wächst für $t \ll \tau_2$ linear mit t , während bei großen Zeiten $t \gg \tau_2$ die Anzahl von Tochterkernen bei dem konstanten Wert $\lambda_1 f_{12}/\lambda_2$ sättigt, d.h. es zerfällt in einem gegebenen Zeitintervall so viele Kerne, wie erzeugt werden.

Dann gilt für die Aktivitäten der Mutter- und Tochterkerne $A_2(t) \underset{t \gg \tau_2}{\simeq} f_{12} A_1(t) = \text{Konstante}$.

III.2 Natürlich vorkommende Radioisotope

Einige radioaktiven Nuklide, auch Radioisotope genannt, kommen in der Erde oder in deren Atmosphäre natürlich vor. Dabei sind zwei Herkünfte möglich.

Einerseits können sie vor der Erde entstanden, jedoch seitdem noch nicht völlig zerfallen sein. Dafür soll ihre Halbwertszeit der gleichen Ordnung sein wie das Alter $T_{\text{Erde}} \simeq 4,5 \cdot 10^9$ Jahre der Erde, oder sogar größer. Dies ist der Fall für ^{40}K — eine der Hauptquellen für Erdwärme, dank seiner Häufigkeit und seinem stetigen Zerfall im Erdzentrum —, ^{50}V , ^{87}Rb , ^{115}In , ^{130}Te , ^{138}La , ^{142}Ce , ^{144}Nd , ^{147}Sm , ^{176}Lu , ^{187}Re , ^{209}Bi — dessen Instabilität nur neulich entdeckt wurde [56] —, ^{232}Th , ^{235}U und ^{238}U . Alle außer ^{235}U haben $T_{1/2} > 10^9$ Jahre.

Dabei spielen die drei Aktinoiden:

- ^{232}Th mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ Jahre
- ^{238}U mit $T_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$ Jahre, und
- ^{235}U mit $T_{1/2} = 7,04 \cdot 10^8$ Jahre

eine wichtige Rolle, denn sie sind Ausgangspunkte für die drei in Tabelle III.1 aufgelisteten natürlichen Zerfallsreihen mit je etwa 10–15 aufeinanderfolgenden Radionukliden, die kontinuierlich erzeugt werden. [50] Dabei bezeichnet der „Typ“ die Form der Nukleonenzahl A der Nuklide in der Reihe: n ist eine natürliche Zahl. Beispielsweise tauchen in der ^{238}U -Reihe das historisch wichtige ^{226}Ra , das in der Umgebung anwesendes Edelgas ^{222}Rn , und ^{210}Po vor. Endpunkte dieser Zerfallsreihen sind drei stabile Isotope von Blei.

Zerfallsreihe	Typ
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$	$4n$
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$	$4n+2$
$^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$	$4n+3$

Tabelle III.1 – Natürliche Zerfallsreihen

Eine solche ständige Neuerzeugung ist die Quelle der anderen natürlich vorkommenden Radionuklide. Neben den Tochterkernen von langlebigen Mutterkernen können noch ^3H — auch Tritium genannt, mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 12,32$ Jahre — und ^{14}C mit $T_{1/2} = 5700 \pm 30$ Jahren [51] besonders erwähnt werden. Beide Arten werden ständig in der oberen Erdatmosphäre durch kosmische Strahlung erzeugt, z.B. über die Prozesse $n + ^{14}\text{N} \rightarrow ^3\text{H} + ^{12}\text{C}$ oder $n + ^{14}\text{N} \rightarrow p + ^{14}\text{C}$, und ihre Häufigkeit bleibt ungefähr zeitlich konstant. [52]

Bemerkung: Ein weiteres Radionuklid, das ständig neu erzeugt wird, ist $^{93}_{43}\text{Np}$ — und zwar über Neutroneneinfang durch ^{238}U mit Emission von zwei Neutronen: $n + ^{238}\text{U} \rightarrow ^{237}\text{U} + 2n$, gefolgt durch den β^- -Zerfall von ^{237}U . Dann führt ^{237}Np (Halbwertszeit $T_{1/2} = 2,144 \cdot 10^6$ Jahre) über der Zerfallsreihe der Nuklide mit $4n + 1$ Nukleonen zu $^{205}_{81}\text{Tl}$.

Chronometrie

Eine wichtige Anwendung der natürlich vorkommenden Radioisotope ist die Verwendung zur Bestimmung des Alters von Substanzen, in denen sie enthalten sind.

(50) Eigentlich wurden auf der Erde, beispielsweise in der Ozeankruste [57], ^{244}Pu -Kerne ($T_{1/2} = 81,3 \cdot 10^6$ Jahre) entdeckt, die vermutlich in einer benachbarten Supernova-Explosion (oder mehr) in den letzten 10 Millionen Jahren entstanden sind. Nach fünf Schritten $^{244}\text{Pu} \rightarrow ^{240}\text{U} \rightarrow ^{240}\text{Np} \rightarrow ^{240}\text{Pu} \rightarrow ^{236}\text{U} \rightarrow ^{232}\text{Th}$ führt der Zerfall von ^{244}Pu zu ^{232}Th .

(51) Dies ist der Wert auf der am 1. Dezember 2025 besuchten Nuklidkarte auf der Webseite der IAEA. Auf der Nuklidkarte des NNDC findet man $T_{1/2} = 5686 \pm 220$ Jahre.

(52) Genauer hängt ihre Erzeugungsrate, und daher indirekt ihre Häufigkeit, unter anderen von der Sonnenaktivität und der Stärke des Magnetfeldes der Erde ab.

Man betrachte einen radioaktiven Mutterkern M , der in einen stabilen Tochterkern T mit der Zerfallskonstanten λ zerfällt. Dabei darf der Mutterkern selbst kein Zerfallsprodukt sein und nur einen Zerfallskanal besitzen. Es wird angenommen, dass es (mindestens) ein anderes Isotop T' des Tochterkerns existiert, das stabil und auch selbst kein Zerfallsprodukt ist. Diese Nuklide werden hier nach „Referenzkerne“ genannt.

– Zur Zeit t_0 entsteht die Substanz, deren Alter zu bestimmen ist. Es seien dann M_0 , T_0 und T'_0 die Anzahlen von Mutter-, Tochter- und Referenzkernen, die in einer kleinen Probe erhalten sind.

– Die entsprechenden Anzahlen werden zum Zeitpunkt t_1 , d.h. in den meisten Fällen heute, gemessen: M_1 , T_1 , T'_1 .

Nimmt man jetzt an, dass es weder Verlust oder Zuwachs an M , T oder T' zwischen t_0 und t_1 gibt — insbesondere darf T nicht Zerfallsprodukt eines anderen instabilen Mutterkerns sein —, so gelten drei Beziehungen: Laut dem Zerfallsgesetz (III.7) ist

$$M_1 = M_0 e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad \text{bzw.} \quad M_0 = M_1 e^{\lambda(t_1-t_0)}. \quad (\text{III.10a})$$

Dazu sind alle zerfallenen M -Kerne in T -Kerne umgewandelt, so dass

$$M_0 + T_0 = M_1 + T_1. \quad (\text{III.10b})$$

Schließlich ist die Anzahl der T' -Kerne erhalten,

$$T'_0 = T'_1. \quad (\text{III.10c})$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt sofort

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{M_1}{T'_1} [e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1] + \frac{T_0}{T'_0}, \quad (\text{III.11})$$

d.h. T_1/T'_1 ist eine affine Funktion von M_1/T'_1 , mit den unbekannten Koeffizienten $e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1$ — dem Anstieg der Gerade — und T_0/T'_0 — dem Schnittpunkt mit der vertikalen Achse. Um diese zwei Zahlen zu bestimmen, sind zwei Messungen von T_1/T'_1 und M_1/T'_1 nötig, entsprechend zwei verschiedenen Proben der zu datierenden Substanz. Dabei wird angenommen, dass unterschiedliche Proben unter den gleichen Bedingungen entstehen, sodass das Verhältnis der Isotopenhäufigkeiten T_0/T'_0 unabhängig von t_0 ist. Um den Einfluss der letzteren Annahme zu vermindern, und die unbekannten Werte zu überbestimmen, werden eigentlich oft mehr als zwei Proben benutzt.

Beispiele der Chronometrie mithilfe natürlicher radioaktiver Kerne sind

- Bestimmung des Alters des Solarsystems — insbesondere der Erde — mithilfe der in Meteoriten gemessenen Verhältnisse der Häufigkeiten von ^{87}Rb (Mutterkern mit Halbwertszeit $T_{1/2} = 4,8 \cdot 10^{10}$ Jahre), ^{87}Sr (Tochterkern) und ^{86}Sr (Referenzkern⁽⁵³⁾): somit findet man ein Alter $t_1 - t_0 = 4,53 \pm 0,02 \cdot 10^9$ Jahre [58].
- Die durch Libby^(bf) eingeführte Altersbestimmung organischer Verbindungen mit dem ^{14}C -Verfahren⁽⁵⁴⁾
- Kalium-Argon-Datierung für Gesteine: die Mutterkerne ^{40}K ($T_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$ Jahre) zerfallen in ^{40}Ar — in nur 10,9 % der Fälle, sonst zerfallen sie in ^{40}Ca —, und als Referenzkern dient entweder ^{39}K oder ^{36}Ar .

⁽⁵³⁾Tatsächlich ist ^{86}Sr das Produkt des β^- -Zerfalls von ^{86}Rb , sodass eine oben gegebene Bedingung genau gesagt nicht erfüllt ist. Da die Halbwertszeit von ^{86}Rb aber nur 18,7 Tage ist, wächst die Häufigkeit von ^{86}Sr nach ein paar Jahren nicht mehr, was im Vergleich mit einer Skala von einigen Milliarden Jahren eine vernachlässigbare Korrektur darstellt.

⁽⁵⁴⁾Libbys ursprünglicher Artikel [59] befasst sich nicht nur mit ^{14}C , sondern auch mit Tritium. In 1953 verwendete Libby sogar das Letztere, um Wein zu datieren [60].

^(bf)W. F. LIBBY, 1908–1980