

# KAPITEL III

## Radioaktivität

---

III.1	Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz	60
III.1.1	Zerfallsgesetz	60
III.1.2	Radioaktive Zerfallsreihen	62
III.2	Natürlich vorkommende Radioisotope	67
III.3	Arten der Radioaktivität	68
III.3.1	Erhaltungsgrößen in Zerfällen	68
III.3.2	$\alpha$ -Zerfall	69
III.3.3	$\beta$ -Zerfall und verwandte Zerfälle	76
III.3.4	$\gamma$ -Zerfall	82
III.3.5	Andere Zerfallsarten	84
	Anhang zum Kapitel III	91
III.A	$\alpha$ -Zerfall: Berechnung der Tunnelwahrscheinlichkeit	91

---

Unter dem Begriff der Radioaktivität versteht man eine natürliche oder künstliche Kernumwandlung, wobei ein Ausgangsnuklid — hiernach auch „Mutterkern“ genannt — sich in ein Zerfallsprodukt — den „Tochterkern“ — durch die Emission von sog. „Strahlung“<sup>(xxxvi)</sup> umwandelt. Diese Kerntransmutation ist ein zufälliger Vorgang, der in erster Näherung durch äußere Umstände — wie die Temperatur, den Druck, ein elektrisches bzw. magnetisches Feld, usw. — nicht zu beeinflussen ist (s. Bemerkung unten). Wegen des Auftretens des Zufalls bei den einzelnen Prozessen genügt die Anzahl von radioaktiven Nukliden einer Substanz ein einfaches Zerfallsgesetz, das in Abschn. [III.1](#) zusammen mit einigen Definitionen vorgestellt wird. Dabei werden auch Zerfallsreihen diskutiert, die auftauchen, wenn das Produkt eines radioaktiven Zerfallsprozesses selbst instabil ist.

Radioaktive Atomkerne sind definitionsgemäß instabil und sollen daher irgendwann zerfallen, nichtsdestotrotz kommen jedoch ein paar davon in der Natur in messbarer Menge vor (Abschn. [III.2](#)). Einige solche Nuklide lassen sich für eine wichtige Anwendung der Radioaktivität verwenden, und zwar die Datierung der Entstehung von Substanzen bzw. Systemen. Schließlich befasst sich Abschn. [III.3](#) mit den verschiedenen natürlich auftretenden Arten von radioaktiven Zerfallsprozessen bei Atomkernen.

**Bemerkung:** Einige der in diesem Kapitel diskutierten Prozesse können auch *induziert* werden, insbesondere solche, die durch die Existenz einer Potentialbarriere zwischen Anfangs- und Endzustand verzögert sind, und daher über Tunneleffekt stattfinden ( $\alpha$ -Zerfall, induzierte Spaltung...). Dabei kann Energiezufuhr zu einer niedrigeren effektiven Barriere führen und somit die Zerfallswahrscheinlichkeit bzw. -rate erhöhen. Um eine signifikante Änderung zu erzielen, soll die zugeführte Energie der Ordnung 1–5 MeV pro Nuklid sein, entsprechend schon extremen — aus dem irdischen Gesichtspunkt — physikalischen Bedingungen wie z.B. Temperaturen von etwa  $1 \text{ MeV}/k_B \approx 10^{10} \text{ K}$ . Dahe wird Radioaktivität oft als „unabhängig von äußeren Umständen“ vorgestellt. Gleichzeitig wird aber diese Aussage durch die Anerkennung der Existenz von „künstlicher Radioaktivität“ seit den Ar-

---

<sup>(xxxvi)</sup> radiation

beiten von Irène Joliot-Curie<sup>(az)</sup> und Frédéric Joliot<sup>(ba)</sup> widersprochen. Solche induzierten Prozesse, die neben dem Ausgangsnuklid noch die Anwesenheit eines weiteren Teilchens im Anfangszustand voraussetzen, werden mit Ausnahme des Elektroneneinfangs (§III.3.3c) nicht in diesem Kapitel behandelt.<sup>(48)</sup>

## III.1 Grundbegriffe der Radioaktivität. Zerfallsgesetz

Einige Überlegungen der ersten zwei Kapitel — über die ungleichen Bindungsenergien pro Nukleon von unterschiedlichen Kernen (§I.3.2) oder die Möglichkeit, Nukleonen auf höhere Energieniveaus anzuregen (Abschn. II.4) — legen die Existenz von instabilen Nukliden nahe, aus denen die Nukleonen über irgendeinen Prozess in einen stabileren Zustand übergehen können. Solche instabilen Kerne werden als *radioaktiv* bezeichnet, oder auch *Radioisotope* bzw. *Radionuklide* genannt.

### III.1.1 Zerfallsgesetz

Aus Beobachtungen ermittelten Rutherford und Soddy<sup>(bb)</sup> 1902 das Gesetz der zeitlichen Abnahme der Anzahl von radioaktiven Nukliden einer bestimmten Spezies. Sei  $N(t)$  diese Zahl zum Zeitpunkt  $t$ . Im Zeitintervall  $dt$  zwischen  $t$  und  $t + dt$  sinkt  $N(t)$  gemäß dem *Zerfallsgesetz*

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt \quad (\text{III.1})$$

unter den Gültigkeitsbedingungen  $N(t) \gg 1$  und  $1/N(t) \ll \lambda dt \ll 1$ . Die Proportionalitätskonstante  $\lambda$  heißt *Zerfallskonstante* bzw. manchmal *Zerfallsrate*<sup>(xxxvii)</sup>. Die Unabhängigkeit der Radioaktivität von den äußeren Umständen entspricht der Gleichmäßigkeit von  $\lambda$ .

#### Bemerkungen:

\* Das Gesetz (III.1) entspricht einfach einer Bilanzgleichung, die voraussetzt, dass sich die Anzahl der zerfallenden Nuklide nur über Zerfall ändert. Insbesondere werden hier die zerfallenden Kerne nicht durch einen anderen Prozess erzeugt.

\* Selbstverständlich ist die Anzahl  $N$  der radioaktiven Nukliden zu jeder Zeit eine ganze Zahl. In einem normalen physikalischen Sample ist  $N$  aber so groß, dass die Änderung  $dN$ , die ebenfalls eine ganz Zahl ist, in einem passenden Intervall  $dt$  viel kleiner als  $N$  sein kann, entsprechend der Bedingung  $dt \ll 1/\lambda$ . In diesem Fall kann  $dN$  als „infinitesimal klein“ betrachtet werden, und dementsprechend  $N$  als eine kontinuierliche reelle Variable behandelt werden, wie schon in Gl. (III.1) implizit angenommen wurde.

Durch eine sofortige Integration führt das Zerfallsgesetz (III.1) zum bekannten Exponentialgesetz

$$N(t) = N(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.2})$$

mit  $N_0 \equiv N(t = 0)$ .

Das Zerfallsgesetz (III.1) bzw. (III.2) ist ein experimentelles Faktum. Unter relativ minimalen Ansätzen über den zugrundeliegenden Elementarprozess kann es mathematisch „motiviert“ werden.

#### III.1.1 a Mittlere Lebensdauer, Halbwertszeit

Die durchschnittliche Zeit, nach der ein Kern einer mit der Zerfallskonstante  $\lambda$  gegebenen Spezies zerfällt, ist die sog. *mittlere Lebensdauer*<sup>(xxxviii)</sup>.

Man betrachte eine Menge von  $N_0$  Kernen zur Zeit  $t = 0$ . Die  $-dN(t)$  Kerne, die zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + dt$  zerfallen, sind genau solche mit einer „Lebensdauer“  $t$  — genauer

<sup>(48)</sup> Induzierte Spaltung wird im folgenden Kapitel (Abschn. ??) diskutiert.

<sup>(xxxvii)</sup> decay constant / decay rate    <sup>(xxxviii)</sup> mean lifetime

<sup>(az)</sup> I. JOLIOT-CURIE, 1897–1956    <sup>(ba)</sup> F. JOLIOT, 1900–1958    <sup>(bb)</sup> F. SODDY, 1877–1956

handelt es sich um deren Überlebensdauer. Somit wird die „mittlere“ (Über)Lebensdauer der bei  $t = 0$  anwesenden Kerne durch

$$\tau \equiv \frac{\int_0^{N_0} t \, dN(t)}{\int_0^{N_0} dN(t)} = \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} t \lambda N(t) \, dt = \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} \, dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{III.3})$$

gegeben, wobei das Zerfallsgesetz (III.1) bzw. die Abhängigkeit (III.2) in der zweiten bzw. dritten Gleichung benutzt wurde.

Als *Halbwertszeit* (xxxix) einer radioaktiven Substanz bezeichnet man die Zeitdauer  $T_{1/2}$ , während deren die Anzahl von radioaktiven Kernen um den Faktor  $\frac{1}{2}$  abnimmt. Mithilfe des Zerfallsgesetzes (III.2) ergibt sich einfach

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (\text{III.4})$$

### III.1.1 b Aktivität

In den meisten experimentellen Fällen werden weder die Anzahl von Kernen  $N(t)$  noch deren durch Gl. (III.1) gegebene Abnahme direkt gemessen. Stattdessen misst man eher die Anzahl der Zerfälle in einem Zeitintervall, sowie deren Nachlassen, durch die Detektion der zugehörigen emittierten Strahlung.

Die Anzahl von Zerfälle pro Zeiteinheit heißt *Aktivität* (xl) und wird durch

$$A(t) \equiv \lambda N(t) \quad (\text{III.5})$$

gegeben. Aus Gl. (III.2) folgt für die Aktivität einer Menge von zerfallenden Radionukliden, die nicht wieder erzeugt werden

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (\text{III.6})$$

mit  $A_0 = A(0)$ . D.h., die Aktivität einer zerfallenden Substanz nimmt in diesem Fall exponentiell ab.

Die SI-Einheit der Aktivität ist das Becquerel (bc) (Bq): 1 Bq  $\equiv$  1 Zerfall pro Sekunde. (Eine veraltete Einheit ist 1 Ci (Curie (bd) (be)) =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Bq.)

Aus Messungen der Aktivität einer Kernspezies zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ergibt sich deren Zerfallskonstante  $\lambda$  einfach:

- bei  $t_1$  wird  $A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1}$  gemessen;
- und bei  $t_2$  ist die Aktivität  $A(t_2) = A_0 e^{-\lambda t_2}$ .

Dann lautet deren Verhältnis  $A(t_1)/A(t_2) = e^{-\lambda(t_1-t_2)}$ , woher die Zerfallskonstante sofort folgt:

$$\lambda = \frac{\ln[A(t_1)/A(t_2)]}{t_2 - t_1}.$$

**Bemerkung:** Der Vergleich der Form (III.2) des Zerfallsgesetzes mit der Zeitentwicklung (III.6) der Aktivität ergibt  $A(t) = -dN(t)/dt$ , was oft als Definition der Aktivität angenommen wird. Dieser einfache Zusammenhang zwischen der Rate der Zerfälle und der Zeitableitung der Anzahl von Kernen gilt aber nur, wenn  $N(t)$  durch keinen anderen Prozess – wie z.B. die Zufuhr von zusätzlichen Kernen – beeinflusst wird. In § III.1.2 werden Beispiele von realistischen Fällen gegeben, in denen die Aktivität (III.5) von  $-dN/dt$  abweicht.

(xxxix) half-life (xl) activity

(bc) H. BECQUEREL, 1852–1908 (bd) M. CURIE, 1867–1934 (be) P. CURIE, 1859–1906

### III.1.1 c Zerfallskanäle

Ein gegebenes Nuklid weist oft mehrere Zerfallsarten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auf; z.B. kann es durch entweder  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Emission zerfallen. Diese verschiedenen Möglichkeiten werden als *Zerfallskanäle* <sup>(xli)</sup> bezeichnet.

In einem solchen Fall wird für jeden Zerfallskanal  $i$  eine *differentielle Zerfallskonstante*  $\lambda_i$  definiert. Das Zerfallsgesetz lautet dann

$$dN(t) = - \sum_i \lambda_i N(t) dt. \quad (\text{III.7})$$

Im Vergleich zur Gl. <sup>(III.1)</sup> wird dann die *totale* Zerfallsrate durch  $\lambda = \sum_i \lambda_i$  gegeben.

Sinngemäß wird jedem vorhandenen Zerfallskanal eine differentielle mittlere Lebensdauer  $\tau_i$  bzw. Halbwertszeit  $T_{1/2,i}$  bzw. Aktivität  $A_i$  zugeordnet. Das Verhältnis  $\lambda_i/\lambda$  einer partiellen Zerfallsrate zur gesamten Rate heißt *Verzweigungsverhältnis* <sup>(xlii)</sup>.

**Bemerkung:** Falls eine Substanz verschiedene Zerfallskanäle hat, aber nur eine einzige Strahlungsart gemessen wird, so wird aus dem Nachlassen der Aktivität immer nur die totale Rate  $\lambda$  bestimmt. Man betrachte z.B. eine Spezies, die  $i$ - und  $j$ -Strahlung mit jeweiligen Raten  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  emittiert. Dabei wird nur die Anzahl von  $i$ -Zerfällen gemessen, entsprechend der partiellen Aktivität  $A_i(t) = \lambda_i N(t)$ ; dagegen werden die  $j$ -Zerfälle nicht beobachtet, d.h. deren Aktivität  $A_j(t)$  ist unbekannt. Die totale Aktivität, die der Abnahme der Anzahl von Kernen  $N(t)$  entspricht, lautet

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda_i N(t) + \lambda_j N(t) = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} + \frac{\lambda_j}{\lambda} \right) \lambda N(t) = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} + \frac{\lambda_j}{\lambda} \right) A(t),$$

$$\text{d.h. } A_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t).$$

Messungen der differentiellen Aktivität  $A_i$  zu verschiedenen Zeitpunkten liefern dann

- bei  $t_1$  :  $A_i(t_1) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t_1)$  und
- bei  $t_2$  :  $A_i(t_2) = \frac{\lambda_i}{\lambda} A(t_2)$ ,

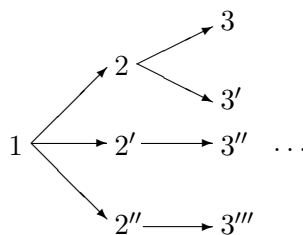
woher sich  $\ln \frac{A_i(t_1)}{A_i(t_2)} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \lambda(t_2 - t_1)$  ergibt, was zur Bestimmung von  $\lambda$  führt! □

Eine Messung der differentiellen Raten  $\lambda_i$ ,  $\lambda_j$  erfordert die Kenntnis des Verhältnisses der differentiellen Aktivitäten,  $A_i(t)/A_j(t) = \lambda_i/\lambda_j$ , d.h. die Detektion der beiden Strahlungsarten.

### III.1.2 Radioaktive Zerfallsreihen

Das Produkt eines radioaktiven Zerfalls kann selbst instabil sein und später zerfallen, und so weiter, sodass ganze *Zerfallsreihen*  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$  entstehen können. Beispielsweise führen drei lange Zerfallsreihen von den instabilen aber langlebigen Nukliden  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  nach etwa 10–15 Stufen zu stabilen Isotopen von Blei (s. auch Abschn. <sup>(III.2)</sup>).

Im allgemeinsten Fall existieren sogar bei jeder Generation verschiedene Zerfallskanäle. Somit tauchen Verzweigungen in die Zerfallskette auf:



<sup>(xli)</sup>decay channels    <sup>(xlii)</sup>branching ratio

Dazu können Zerfallsprodukte auf unterschiedlichen Zweigen eigentlich identisch sein, z.B. könnten  $3'$  und  $3''$  gleich sein, so dass verschiedene Wege von einem Ausgangs- zu einem Endnuklid führen können.

Unter Betrachtung dieser Möglichkeiten lässt sich dann fragen, wie viele Kerne es von irgendeinem Element als Funktion der Zeit gibt?

Die Antwort zu dieser Frage ist ziemlich einfach, vorausgesetzt die elementare Ab- bzw. Zunahme der Anzahl der Kerne einer gegebenen Art im Zeitintervall  $dt$  mithilfe vom Zerfallsgesetz (III.7) unter Berücksichtigung der „Erhaltung der Materie“ — genauer handelt es sich dabei um die Erhaltung der durch die Protonen und Neutronen getragenen Baryonenzahl — sorgfältig geschrieben wird.

Ein einfaches Beispiel bildet die Zerfallsreihe mit als erste Stufe dem Zerfall  $1 \rightarrow 2$ , mit gesamter Zerfallskonstante  $\lambda_1$  und Verzweungsverhältnis  $f_{12}$ , und als zweite Stufe dem Zerfall  $2 \rightarrow \dots$  mit der totalen Zerfallsrate  $\lambda_2$ . Wie entwickeln sich dann  $N_1(t)$  und  $N_2(t)$ ? (Hier werden die Entwicklungen der anderen Tochterkerne  $2', 2'' \dots$  sowie der Produkte des Zerfalls  $2 \rightarrow \dots$  nicht betrachtet.)

Für den Zerfall der Kerne vom Typ 1 lautet gibt das Zerfallsgesetz (III.1)

$$dN_1(t) = -\lambda_1 N_1(t) dt \quad \Rightarrow \quad N_1(t) = N_1(0) e^{-\lambda_1 t}.$$

Die  $-dN_1(t)$  zerfallenden Typ-1 Nuklide führen zu  $-f_{12} dN_1(t)$  neuen Kernen vom Typ 2 — sowie zu  $(1-f_{12}) dN_1(t)$  Kernen anderer Art in den anderen Kanälen. Andererseits zerfallen teil der zu  $t$  anwesenden Typ-2 Nuklide gemäß Gl. (III.1). Insgesamt lautet also die Änderung der Anzahl von Typ-2 Kernen zwischen  $t$  und  $t + dt$

$$dN_2(t) = \lambda_1 f_{12} N_1(t) dt - \lambda_2 N_2(t) dt,$$

wobei ein Korrekturterm der Ordnung  $\mathcal{O}(dt^2)$  vernachlässigt wurde. Unter Berücksichtigung der gefundenen Form für  $N_1(t)$  liefert diese Bilanzgleichung die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t). \quad (\text{III.8})$$

Diese lässt sich in zwei Schritten sich lösen:

– Die allgemeine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung  $\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t)$  ist  $N_2(t)|_{\text{hom.}} = c_2 e^{-\lambda_2 t}$ , wobei  $c_2$  eine (reelle) Konstante ist.

– Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (III.8) ergibt sich durch „Variation der Konstanten“: das Einsetzen des Ansatzes  $N_2(t) = c_2(t) e^{-\lambda_2 t}$  in Gl. (III.8) lautet

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{dc_2(t)}{dt} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 c_2(t) e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 f_{12} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 c_2(t) e^{-\lambda_2 t}.$$

Die Integration der daraus folgenden Zeitableitung  $dc_2(t)/dt$  liefert sofort

$$c_2(t) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + K_2,$$

wobei  $K_2$  eine Konstante ist. Mit  $K_2 = 0$  erhält man also die spezielle Lösung

$$N_2(t)|_{\text{sp.}} = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t}.$$

Insgesamt ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (III.8) der Form

$$N_2(t) = N_2(t)|_{\text{hom.}} + N_2(t)|_{\text{sp.}} = c_2 e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) e^{-\lambda_1 t}.$$

Die unbekannte Konstante lässt sich mithilfe der Bedingung bei  $t = 0$  berechnen:

$$N_2(0) = \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) + K_2.$$

Daraus folgt schließlich

$$N_2(t) = N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 f_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (\text{III.9})$$