

II.4.5 Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns

II.4.5 a Kernspin und Parität im Grundzustand

Im Grundzustand des Atomkerns sind zunächst die tiefsten Nukleonenschalen völlig besetzt, so dass nur das höchste gefüllte Energieniveau möglicherweise nicht voll ist. Die abgeschlossenen j -Schalen, die $2j+1$ Protonen bzw. Neutronen enthalten, liefern keinen Beitrag weder zum Gesamtdrehimpuls des Kerns noch zu seiner Parität:

- Die Projektionen $J_z = -j\hbar, (-j+1)\hbar, \dots, (j-1)\hbar, j\hbar$ des Gesamtdrehimpulses der verschiedenen Nukleonen der Schale kompensieren sich gegenseitig, und tragen deshalb nicht zu J_{Kern} bei.
- Da $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ halbzahlig ist, ist die Zahl $2j+1$ der Nukleonen auf der Schale gerade, sodass das Produkt der individuellen Paritäten $(-1)^\ell$ der Nukleonen insgesamt $+1$ ergibt.

Dieses Ergebnis führt sofort zu den folgenden Vorhersagen:

- Atomkerne, deren letzte besetzte Protonen- und Neutronenschalen abgeschlossen sind, haben Spin und Parität $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = 0^+$.
Experimentell stimmt das: z.B. $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{16}\text{O}) = 0^+$.
- Wegen der angenommenen Unabhängigkeit der Nukleonen im Potential haben die ug- bzw. gu-Kerne, bei denen es nur ein Proton bzw. Neutron außerhalb einer abgeschlossenen j -Schale gibt, genau den Spin und die Parität dieses ungepaarten Nukleons.
Experimentell stimmt das auch: z.B. ist für ^{17}O , mit einem einzelnen Neutron auf der $1d_{5/2}$ -Schale, $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = \frac{5}{2}^+$.
- Analog bestimmt ein einzelnes isoliertes *Loch*, entsprechend einem fehlenden Nukleon, Spin und Parität der ug- oder gu-Kerne, bei denen ein einziges Proton bzw. Neutron auf der letzten besetzten Schale fehlt.
Abermals stimmt das mit den Messdaten: z.B. $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{15}\text{O}) = \frac{1}{2}^-$, mit einem Loch in der Neutronen- $1p_{1/2}$ -Schale.

Bei Kernen mit teilweise gefüllten Schalen kann das Einteilchen-Schalenmodell nicht weiter helfen. Experimentelle Beobachtungen und das Berücksichtigen der Restwechselwirkung V_{Rest} — entsprechend einer Abweichung vom Ein-Teilchen-Problem — motivieren einen zusätzlichen Ansatz:

Sobald zwei Protonen bzw. zwei Neutronen in der gleichen Schale gebunden sind, koppeln sie zum energetisch bevorzugten Zustand mit Gesamtdrehimpuls $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{0}$.

Dieser Ansatz erlaubt weitere Vorhersagen:

- gg-Kerne haben Spin und Parität $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = 0^+$; diese Vorhersage ist experimentell bestätigt. ⁽⁴⁴⁾
- ug- und gu-Kerne haben den Spin und die Parität des ungepaarten Nukleons $J_{\text{Kern}}^{\text{P}} = j^{(-1)^\ell}$. Dies stimmt auch sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen (s. Ref. [24] oder Ref. [8, Experimente 56-57]), bis auf Abweichungen bei Kernen mit $150 \lesssim A \lesssim 200$.

⁽⁴⁴⁾ ... was selbstverständlich ist, denn der zugrunde liegende Ansatz basiert auf den experimentellen Fakten!

Bemerkung: Der oben eingeführte Ansatz reicht nicht aus, um Vorhersagen für den Spin und die Parität eines uu-Kerns zu erlauben. Um die gemessenen Eigenschaften zu erklären ($J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^2_1\text{H}) = 1^+$, $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^6_3\text{Li}) = 1^+$, $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{10}_5\text{B}) = 3^+$, $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{14}_7\text{N}) = 1^+$ für die stabilen Nuklide) werden in der Literatur die sog. starke und schwache *Nordheim*^(aw) *Regeln* eingeführt (vgl. z.B. Ref. [5]).

II.4.5 b Kernspin und Parität angeregter Zustände

Im Grundzustand besetzen die Nukleonen die niedrigsten Energieniveaus im Potentialtopf. Oberhalb liegen weitere Niveaus, auf welche die Nukleonen durch Energiezufuhr versetzt werden können: der Atomkern ist dann in einem angeregten Zustand.

Das hier dargelegte Ein-Teilchen-Schalenmodell liefert zuverlässige Voraussagen nur für den Fall eines ug- oder gu-Kerns mit im Grundzustand einem einzelnen Nukleon auf der angefangenen Schale, das auf die nächste Schale angeregt wird, während die abgeschlossenen Schalen ungestört bleiben. Dann bestimmt dieses Nukleon den Spin und die Parität des angeregten Kerns — sowie des Grundzustands, wie oben gesehen.

Zum Beispiel hat der erste angeregte Zustand des $^{17}_8\text{O}$ -Kerns Spin und Parität $J_{\text{Kern}}^{\text{P}}(^{17}_8\text{O}^*) = \frac{1}{2}^+$: das ungepaarte Neutron wird von der $1d_{5/2}$ auf die $2s_{1/2}$ versetzt.

^(aw)L. NORDHEIM, 1899–1985

II.4.5 d Magnetisches Dipolmoment

Das Ein-Teilchen-Schalenmodell beruht auf der Annahme, dass die Nukleonen im Atomkern unabhängig voneinander sind. Infolgedessen wird das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}_{\text{Kern}}$ des Kerns einfach durch die Summe der Dipolmomente $\vec{\mu}$ der Nukleonen gegeben.

Magnetisches Dipolmoment eines einzelnen Nukleons im Kern

Daher kann man zuerst das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ eines einzelnen Nukleons betrachten. Zwei Drehimpulse tragen zu $\vec{\mu}$ bei, und zwar der Bahndrehimpuls des Nukleons und sein Spin (§I.4.3 b):

$$\hat{\vec{\mu}} = \hat{\vec{\mu}}_L + \hat{\vec{\mu}}_S = \mu_N \frac{g_L \hat{\vec{L}} + g_S \hat{\vec{S}}}{\hbar}, \quad (\text{II.33})$$

wobei die Landé-Faktoren g_L und g_S vom Typ des Nukleons abhängen.

Gleichung (II.33) lässt sich sofort als

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left[(g_L + g_S)(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}) + (g_L - g_S)(\hat{\vec{L}} - \hat{\vec{S}}) \right]$$

umschreiben. Das Skalarprodukt mit $\hat{\vec{J}}$ lautet dann

$$\hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left[(g_L + g_S)\hat{J}^2 + (g_L - g_S)(\hat{L}^2 - \hat{S}^2) \right].$$

Wie oben gesehen sind $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$ und $\hat{J}^2$ kommutierende Observablen, deren Erwartungswerte den Zustand des Nukleons charakterisieren. Es ergibt sich einfach:

$$\langle \hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{J}} \rangle = \frac{\mu_N}{2} \left[(g_L + g_S)j(j+1) + (g_L - g_S)(\ell - s)(\ell + s + 1) \right] \hbar, \quad (\text{II.34})$$

wobei die Identität $\ell(\ell+1) - s(s+1) = (\ell-s)(\ell+s+1)$ benutzt wurde.

Magnetisches Dipolmoment des gesamten Kerns

Mithilfe der Ergebnisse für ein einzelnes Nukleon kann die durch Gl. (I.34) gegebene Projektion des magnetischen Dipolmoments des Kerns auf seinen Spin sofort berechnet werden:

- Bei gg-Kernen verschwindet der Kernspin J_{Kern} , sodass $\mu_{\text{Kern}} = 0$.

- Bei ug- und gu-Kernen bestimmt das ungepaarte Nukleon das gesamte magnetische Dipolmoment des Kerns, denn die anderen Nukleonen koppeln zum Gesamtdrehimpuls $J = 0$ und folglich $\mu = 0$. Dann ist das Dipolmoment des Nukleons durch Gl. (II.33) gegeben, mit

$$\begin{aligned}
 & \text{– für ein ungepaartes Proton: } \begin{cases} \vec{\mu}_L = \mu_N \frac{\vec{L}}{\hbar} & \text{d.h. } g_L = 1; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar} & \text{wobei } g_S = 5,59. \end{cases} \\
 & \text{– für ein ungepaartes Neutron: } \begin{cases} \vec{\mu}_L = \vec{0} & \text{d.h. } g_L = 0 \text{ (keine elektrische Ladung!)}; \\ \vec{\mu}_S = g_S \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar} & \text{mit } g_S = -3,83. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zwischen der praktischen Definition (I.34) des magnetischen Dipolmoments des Kerns und Gl. (II.34) gibt dann für einen Atomkern mit einem ungepaarten Nukleon auf der (n, ℓ, j) -Schale:

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{(\ell - s)(\ell + s + 1)}{j + 1} \right]. \quad (\text{II.35})$$

Für ein Nukleon gilt $s = \frac{1}{2}$, sodass $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Gleichung (II.35) gibt also zwei Möglichkeiten für jeden Nukleontyp:

Fall A: $j = \ell + \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind parallel)

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S)(j - 1) \right] = \mu_N \left[g_L j - \frac{1}{2}(g_L - g_S) \right]; \quad (\text{II.36})$$

Fall B: $j = \ell - \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin des Nukleons sind antiparallel)

$$\mu_{\text{Kern}} = \mu_N \left[\frac{1}{2}(g_L + g_S)j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{j(j + 2)}{j + 1} \right] = \mu_N \left[g_L j + \frac{1}{2}(g_L - g_S) \frac{j}{j + 1} \right] \quad (\text{II.37})$$

Mit den jeweiligen Landé-Faktoren des Protons bzw. des Neutrons führen Gl. (II.36) und (II.37) zu den sog. *Schmidt^(ay)-Linien* [in der $(j - \mu_{\text{Kern}})$ -Ebene] für das magnetische Moment eines Kerns mit einem ungepaarten Proton bzw. Neutron:

$$\text{– ug-Kern: } \mu_{\text{Kern}} = \begin{cases} \mu_N(j + 2, 29) & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ \mu_N \left(j - 2, 29 \frac{j}{j + 1} \right) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}; \end{cases} \quad (\text{II.38a})$$

$$\text{– gu-Kern: } \mu_{\text{Kern}} = \begin{cases} -1,91\mu_N & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ +1,91 \frac{j}{j + 1} \mu_N & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.38b})$$

Experimentell liegen die magnetischen Dipolmomente praktisch aller ug- bzw. gu-Kerne zwischen den durch Gl. (II.38a) bzw. (II.38b) definierten Schmidt-Linien, d.h. das Schalenmodell ist relativ erfolgreich. Da die Dipolmomente aber nicht genau auf den Linien liegen, ist es nur ein Teilerfolg.

Bei näherer Betrachtung liegt die große Mehrheit der gemessenen magnetischen Dipolmomente für Kerne mit einem gegebenen Gesamtdrehimpuls j zwischen einerseits der durch Gl. (II.38) gegebenen relevanten Schmidt-Linie und andererseits der analogen Linie, die sich durch das Ersetzen des anomalen Landé-Faktors g_S des Nukleons durch $g_S = 2$, entsprechend dem erwarteten Wert für ein Elementarteilchen, ergibt. Im Fall der ug-Kerne mit $j = \ell + \frac{1}{2}$ heißt das zum Beispiel, dass die gemessenen μ_{Kern} zwischen den Linien $\mu_N(j + 2, 29)$ und $\mu_N(j + 0, 5)$ liegen.

^(ay)T. SCHMIDT, 1908–1986

- Das Einteilchen-Schalenmodell liefert keine Voraussage für das magnetische Dipolmoment der uu-Kerne.