



II.4.3 Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung

Das Problem des richtigen Abschließens der Nukleonenschale wurde unabhängig voneinander einerseits durch Maria Goeppert-Mayer^(at) [49, 50], andererseits durch J. Hans D. Jensen^(au) und seine Mitarbeiter [51] gelöst. Ihre Idee war, die Entartung der (n, ℓ) -Zustände durch die Einführung eines zusätzlichen Beitrags zum Ein-Teilchen-Potential aufzuheben.

Die Natur dieses zusätzlichen Terms wurde noch einmal durch die Analogie zur Atomphysik suggeriert: In der Atomhülle ergibt die Kopplung zwischen dem Spin und dem Bahndrehimpuls eines Elektrons die geringe „Feinstruktur“-Aufspaltung dessen Energieniveaus. Die durch die Kernkräfte verursachte Aufspaltung der Nukleon-Energieniveaus erwies sich erstaunlicherweise als verhältnismäßig viel größer. Somit kann diese Kopplung das Niveauschema erheblich modifizieren.

Bezeichnet man das kugelsymmetrische Ein-Teilchen-Potential von § II.4.2 als $V_c(r)$, so lautet das neue zu betrachtende effektive Potential

$$\hat{V}(r) = V_c(r) + V_{s.o.}(r) \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}, \quad (\text{II.30})$$

wobei $\hat{\vec{L}}$ bzw. $\hat{\vec{S}}$ der Bahndrehimpuls- bzw. der Spin-Operator des Nukleons ist. Die Radialfunktion $V_{s.o.}(r)$ bestimmt die Stärke der Kopplung zwischen Spin und Bahndrehimpuls. Ein üblicher Ansatz für $V_{s.o.}(r)$ in Berechnungen ist, in Analogie zum „Thomas“-Term^(av) in der Atomhülle⁽⁴¹⁾

$$V_{s.o.}(r) \propto \frac{1}{r} \frac{dV_c}{dr}, \quad (\text{II.31})$$

wobei die Proportionalitätskonstante negativ ist. Abbildung II.12 stellt diese Abhängigkeit im Fall eines Woods-Saxon-Potentials $V_c(r)$ dar: $V_{s.o.}$ ist relativ klein im inneren Teil des Atomkerns und trägt vor allem am Kernrand bei. Dabei ist das Ziel, die tiefstliegenden Niveaus wenig zu stören, um die magischen Zahlen 2, 8, 20 im neuen Energieschema zu erhalten.

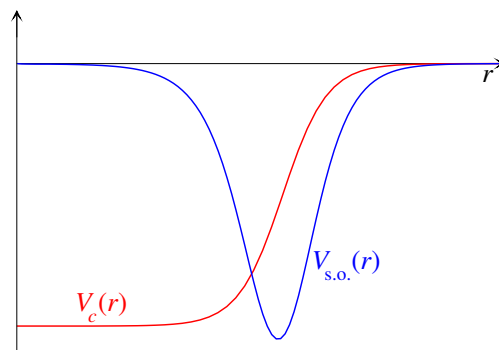


Abbildung II.12 – Woods-Saxon Potential (II.24) zusammen mit dem durch Gl. (II.31) gegebenen entsprechenden Radialterm des Spin-Bahn Potentials.

⁽⁴¹⁾Die Spin-Bahn Kopplung der Elektronenhülle wird durch die Bewegung des Elektrons im elektrischen Feld des Atomkerns verursacht: das rotierende Elektron spürt ein Magnetfeld, zu dem sein Spin koppelt. Der daraus folgende Spin-Bahn-Term lässt sich im Rahmen der Quantenelektrodynamik berechnen, vgl. z.B. Ref. [52], Kap. IV § 33].

^(at)M. GOEPPERT-MAYER, 1906–1972 ^(au)J. H. D. JENSEN, 1907–1973 ^(av)L. THOMAS, 1903–1992

Nach Einführung des zusätzlichen $(\vec{L} \cdot \vec{S})$ -Terms kommutieren $\hat{L}$ und $\hat{S}$ nicht mehr mit dem neuen Hamilton-Operator, sodass ihre Erwartungswerte nicht mehr Konstanten der Bewegung sind. Dementsprechend lassen sich die Eigenzustände nicht mehr durch die Quantenzahlen m_ℓ und m_s charakterisieren. Ein neuer vollständiger Satz kommutierender Observablen ist dann (42)

$$\{\hat{h}, \hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\},$$

wobei $\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}$ der Gesamtdrehimpuls des Nukleons ist. Der mit $\hat{J}^2$ bzw. mit $\hat{J}_z$ assoziierte Eigenwert wird durch eine neue Quantenzahl j bzw. m_j charakterisiert und beträgt $j(j+1)\hbar^2$ bzw. $m_j\hbar$.

Die Kopplung des Bahndrehimpulses $\hat{L}$ und des Spins $\hat{S}$ führt je nach ihren relativen Orientierungen zu zwei möglichen Werten der *Gesamtdrehimpulsquantenzahl* j :

- wenn der Nukleonspin parallel zu seinem Drehimpuls ist, gilt $j = \ell + \frac{1}{2}$; daher kann m_j die $2\ell + 2$ verschiedenen Werte $-\ell - \frac{1}{2}, \dots, \ell + \frac{1}{2}$ annehmen.
- wenn $\vec{S}$ und $\vec{L}$ antiparallel sind, ergibt sich $j = \ell - \frac{1}{2}$; dann gibt es 2ℓ mögliche Werte für m_j .

Die Energie des auf den Wert 1 normierten Eigenzustands $|n, \ell, j, m_j\rangle$ lautet

$$\langle n, \ell, j, m_j | \hat{h} | n, \ell, j, m_j \rangle = \langle n, \ell, j, m_j | \hat{V}_c | n, \ell, j, m_j \rangle + V_{s.o.} \langle n, \ell, j, m_j | \vec{L} \cdot \vec{S} | n, \ell, j, m_j \rangle.$$

Dabei bleibt der Beitrag des V_c -Terms in erster Näherung der gleiche ($\tilde{\varepsilon}_{n\ell}$), wie in § II.4.2 schon berechnet wurde, und hängt somit nur von n und ℓ ab. Die durch den Spin-Bahn-Kopplungsterm induzierte Verschiebung des Energieniveaus für die beiden Fälle $j = \ell + \frac{1}{2}$ und $j = \ell - \frac{1}{2}$ lässt sich mithilfe der Beziehung $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$ leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \langle n, \ell, j, m_j | \vec{L} \cdot \vec{S} | n, \ell, j, m_j \rangle &= \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \hbar^2 \langle n, \ell, j, m_j | n, \ell, j, m_j \rangle \\ &= \begin{cases} +\frac{1}{2}\hbar^2\ell & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Daher ist die Einteilchen-Energie jetzt gegeben durch

$$\tilde{\varepsilon}_{n\ell j} \simeq \tilde{\varepsilon}_{n\ell} + \begin{cases} +\frac{1}{2}\hbar^2\ell \langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell} & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) \langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell} & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

wobei $\langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell}$ den Erwartungswert im $n\ell$ -Zustand des radialen Anteils des Spin-Bahn-Terms bezeichnet.

Empirisch gilt $V_{s.o.}(r) < 0$, was zu einem ebenfalls negativen Erwartungswert führt. Deshalb liegen die Eigenzustände mit höherer Gesamtdrehimpulsquantenzahl $j = \ell + \frac{1}{2}$ energetisch niedriger — d.h. sie sind stärker im Potential gebunden — als diejenigen mit kleinerer $j = \ell - \frac{1}{2}$. (43)

Aus Gl. II.32 ergibt sich die Aufspaltung der Energieniveaus mit $j_+ = \ell + \frac{1}{2}$ und $j_- = \ell - \frac{1}{2}$ bei festen Werten von n und ℓ :

$$\Delta\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}_{n\ell j_-} - \tilde{\varepsilon}_{n\ell j_+} \propto 2\ell + 1.$$

Diese Aufspaltung wächst daher mit zunehmender Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ des Nukleons. Außerdem hängt auch der Betrag von $\langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell}$ von ℓ ab: mit einem Radialterm $V_{s.o.}(r)$ der Form des in Abb. II.12 dargestellten Ansatzes, nimmt ebenfalls $|\langle V_{s.o.} \rangle_{n\ell}|$ mit ℓ zu.

Zur Kennzeichnung der neuen j -Abhängigkeit der Energieniveaus wird die Quantenzahl j der bisher benutzten Schreibweise als tiefgestellter Index beigelegt.

⁽⁴²⁾Die Bemerkung der Fußnote 37 bleibt hier auch gültig: alle Nukleonen haben den Spin $s = \frac{1}{2}$.

⁽⁴³⁾Dies stellt das gegenseitige Verhalten zur Wirkung der Spin-Bahn Kopplung in der Elektronenhülle eines Atoms dar.

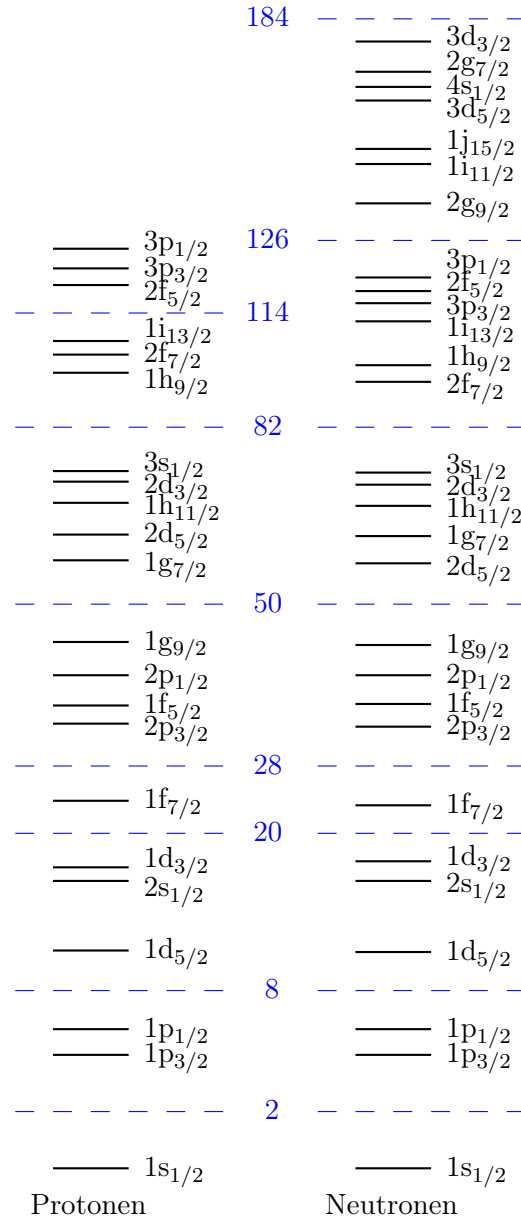


Abbildung II.13 – Einteilchen-Energieniveaus in einem realistischen Woods–Saxon Potential unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung.

Beispielsweise wird die 1f-Schale ($\ell = 3$) durch die Spin-Bahn-Kopplung in zwei Niveaus aufgespalten: mit der höheren Energie kommt das 6-mal entartete 1f_{5/2}-Niveau vor; tiefer liegt das stärker gebundene 1f_{7/2}-Niveau mit 8 Zuständen. Somit wird 28 zu einer magischen Zahl! Ebenfalls führt die Aufspaltung der 1g- und 1h-Niveaus in 1g_{7/2} und 1g_{5/2} bzw. 1h_{7/2} und 1h_{9/2} zu den magischen Zahlen 50 und 82, wie in Abb. II.13 gezeigt wird.

Durch die Einführung unterschiedlicher Potentialtiefen $V_0^{(p)}$ und $V_0^{(n)}$ im mittleren Potential und nach Berücksichtigung des zusätzlichen Coulomb-Potentials für die Protonen treten unterschiedliche Energieniveaus für Protonen und Neutronen auf. Beispielsweise werden die Ordnungen der 1g_{7/2} und 2d_{5/2} in den beiden Reihen umgetauscht. Die ungleichen Potentiale können außerdem wie in Abb. II.13 möglicherweise zu unterschiedlichen magischen Zahlen bei den höchstliegenden Niveaus führen.