

I.4.3 Elektrische und magnetische (Multipol-)Momente

I.4.3 a Elektrische Momente

Bei Kernen mit einem nicht-verschwindenden Kernspin definiert dieser eine bevorzugte Richtung und verletzt daher automatisch die Kugelsymmetrie.

Um die Abweichung der elektrischen Ladungsdichteverteilung $\rho_{\text{el.}}$ von der Kugelgestalt werden ihre *elektrische Multipolmomente* eingeführt (vgl. z.B. Ref. [27, Kap. 4]). Die Verteilung erzeugt an einem Aufpunkt M im Abstand $|\vec{X}|$ von ihrem Schwerpunkt ein elektrostatisches Potential $\Phi(\vec{X})$, das mithilfe dieser Momente als Summe verschiedener Terme geschrieben werden kann (damit die höheren Terme der Entwicklung vernachlässigbar sind, muss $|\vec{X}|$ viel größer als die Ausdehnung der Verteilung sein):

$$\Phi(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{X}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{D} \cdot \vec{X}}{|\vec{X}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij} X_i X_j}{|\vec{X}|^5} + \dots, \quad (\text{I.28})$$

wobei die X_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ die kartesischen Koordinaten des Punkts M bezüglich eines Systems mit dem Verteilungsschwerpunkt als Ursprungspunkt bezeichnen. In Gl. (I.28) ist Q die gesamte elektrische Ladung der Verteilung, während der Vektor $\vec{D}$ bzw. der (spurlose) Tensor zweiter Stufe Q_{ij} das elektrische Dipol- bzw. Quadrupolmoment ist. Diese werden jeweils gegeben durch

$$\vec{D} = \int \vec{r} \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (\text{I.29})$$

und

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \vec{r}^2 \delta_{ij}) \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (\text{I.30})$$

wobei δ_{ij} das Kronecker^(aa)-Symbol ist: $\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$, 0 sonst.

^(aa)L. KRONECKER, 1823–1891

Der Ausdruck (I.28) des Potentials ergibt sich sofort aus dem Integral der Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) \equiv [(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2]^{-1/2} = 1/|\vec{X} - \vec{x}|$ in der Nähe des Ursprungspunkts $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{0}) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial f(\vec{0})}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} \frac{\partial^2 f(\vec{0})}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \\ &= \frac{1}{|\vec{X}|} + \frac{1}{|\vec{X}|^3} \sum_{i=1}^3 x_i X_i + \frac{1}{|\vec{X}|^5} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} [3X_i X_j - \vec{X}^2 \delta_{ij}] + \dots, \end{aligned}$$

zusammen mit der Beziehung $\sum_{i,j} x_i x_j \vec{X}^2 \delta_{ij} = \sum_{i,j} X_i X_j \vec{x}^2 \delta_{ij}$.

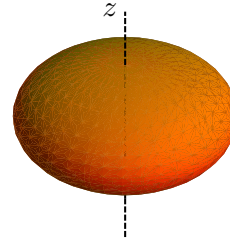
Auf den Ausdrücken (I.29)–(I.30) kann man leicht prüfen, dass das elektrische Dipol- und das elektrische Quadrupolmoment von sphärischen Kernen verschwinden. In § II.4.4 c wird allgemeiner gezeigt, dass Kerne wegen ihrer wohldefinierten Parität kein elektrisches Dipolmoment besitzen. Sie können aber noch ein Quadrupolmoment haben, so dass das Letztere die einfachste Abweichung von der Kugelgestalt der Dichteverteilung parametrisiert.

Es sei jetzt ein Kern mit einem nicht-verschwindenden Spin $\vec{J}_{\text{Kern}}$; die Richtung dieses Spins definiert die z -Achse. Die zz -Komponente des elektrischen Quadrupolmoments Q_{zz} bestimmt die Deformation des Kerns entlang dieser Achse.⁽¹⁸⁾ Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, je nach dem Vorzeichen von Q_{zz} :

$Q_{zz} > 0$: prolater Kern (= zigarrenförmig)



$Q_{zz} < 0$: oblater Kern (= linsenförmig)



⁽¹⁸⁾ Wenn die Gestalt des Kerns durch ein Umdrehungsellipsoid dargestellt wird, ist diese z -Achse eine der Hauptachsen des Ellipsoids. Im Hauptachsensystem verschwinden dann die nicht-diagonalen Komponenten des elektrischen Quadrupolmoments, während $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$.