

II.3.2 Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen

In diesem und im nächsten Abschnitt wird der Atomkern als ideales Fermi-Gas modelliert, d.h. die Kräfte zwischen den Nukleonen werden ignoriert — genauer besteht die einzige Rolle der Wechselwirkungen darin, den Potentialtopf zu erzeugen; im Potential wechselwirken die Nukleonen nicht mehr miteinander.

Die Beschreibung des Kerns als Gas von voneinander unabhängigen Teilchen kann wegen des kleinen Abstands zwischen Nukleonen und der entsprechenden starken Nukleon–Nukleon Wechselwirkung zwar überraschend wirken. Im Grundzustand des Kerns sind aber alle niedrigsten Zustände im (effektiven) Potentialtopf durch Nukleonen besetzt, sodass irgendeine Streuung zwischen Nukleonen kaum stattfinden kann: die in der Kollision beteiligten Nukleonen können nämlich nach dem Stoß keine vorhandene freie Zustände finden, was effektiv die Streuung verhindert. Deshalb liefert die Beschreibung als ein wechselwirkungsfreies System eine ziemlich gute Approximation.

Der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen kann in einem ersten Schritt vernachlässigt werden. In diesem Abschnitt wird somit ein ideales Gas aus zwei Fermionentypen mit je dem Spin $\frac{1}{2}$ und derselben Masse $m_p = m_n = m_N$, und ohne elektrische Ladung betrachtet. Der Entartungsgrad dieser Nukleonen ist somit $g = 4$, entsprechend 2 Spinzuständen für jede Teilchenart.

Verwendet man die Beziehung (II.8) mit der Nukleonenzahl A des Kerns als Gesamtzahl von Teilchen auf der linken Seite und mit $g = 4$ und dem Volumen $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Kern}}$, so ergibt sich

$$A = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{\text{F},N}^3, \quad (\text{II.9})$$

wobei $p_{\text{F},N}$ den Fermi-Impuls für das Fermi-Gas aus Nukleonen bezeichnet. Daraus folgen sofort

$$p_{\text{F},N} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3} \quad (\text{II.10a})$$

und

$$\varepsilon_{F,N} = \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_N} \left(\frac{A}{2\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad (\text{II.10b})$$

für die Fermi-Energie $\varepsilon_{F,N}$ des Nukleonen-Gases.

Mit dem Ansatz $\mathcal{V}_{\text{Kern}} = \frac{4}{3}\pi R_s^3 A$ für das Kernvolumen (vgl. § I.2.4 b) erhält man

$$p_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} A^{1/3} \frac{\hbar}{R_s}, \quad \varepsilon_{F,N} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} A^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2}. \quad (\text{II.11})$$

Mit dem Wert $R_s = 1,128 A^{1/3}$ fm für den äquivalenten Radius ergeben sich $p_{F,N} = 265 \text{ MeV}/c$ und $\varepsilon_{F,N} \simeq 40 \text{ MeV}$. Die bisher nicht spezifizierte Tiefe V_0 des dem Kern bildenden Potentialtopfs muss mindestens diesen Wert haben, damit die Nukleonen im Topf eingeschlossen bleiben. Bei β -stabilen Kernen ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Nukleons etwa 8–10 MeV (§ I.3.3), so dass $V_0 \simeq 50 \text{ MeV}$ sein soll, wie schematisch in Abb. II.5 dargestellt wird.

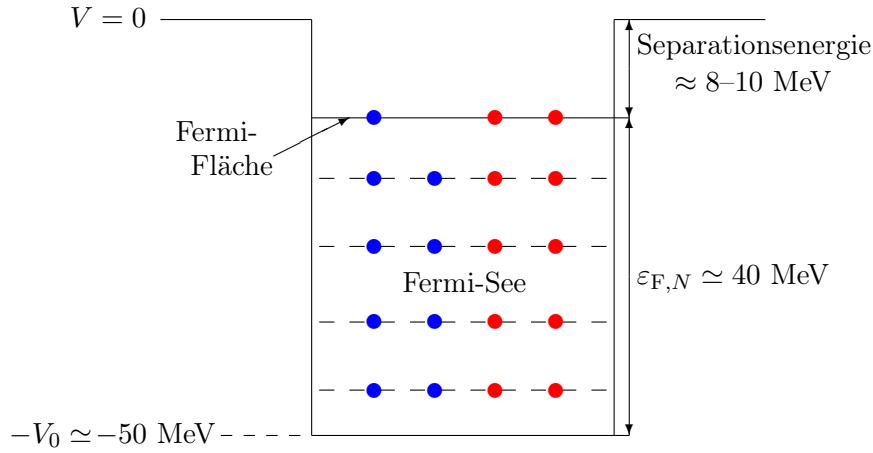


Abbildung II.5 – Schematisches Bild eines ug-Kerns als Einkomponenten-Fermi-Gas aus Nukleonen.

Bemerkungen:

* Man hätte auch die Nukleonendichte im Kern $A/\mathcal{V}_{\text{Kern}} \simeq n_\infty = 0,17 \text{ Nukleonen/fm}^3$ direkt in Gl. (II.10a) einsetzen können, um den Fermi-Impuls

$$p_{F,N} = \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{1/3} \hbar n_\infty^{1/3}$$

dadurch auszudrücken und zu berechnen.

* Wie zu erwarten war ist die Fermi-Energie der typischen Ordnung der Energien der Kernphysik. Definiert man über $k_B T_F \equiv \varepsilon_F$ eine *Fermi-Temperatur*, so ist diese für Atomkerne etwa $4,6 \cdot 10^{11} \text{ K}$. Somit sind übliche Temperaturen von 300 K oder sogar 3000 K viel kleiner als dieser Wert, was die Annahme eines Fermi-Gases bei Null-Temperatur rechtfertigt.

Die gesamte kinetische Energie der A Nukleonen im Kern ist⁽³²⁾

$$E_N = \int \varepsilon d\mathcal{N}(\varepsilon) = \int_0^{p_{F,N}} \frac{p^2}{2m_N} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = \frac{3}{5} \frac{p_{F,N}^2}{2m_N} A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} A. \quad (\text{II.12})$$

Mit der oben berechneten Fermi-Energie ist die durchschnittliche kinetische Energie pro Nukleon unabhängig von der Nukleonenzahl: $E_N/A = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \simeq 24 \text{ MeV}$. Somit gilt $E_N/A \ll m_N c^2$: die

⁽³²⁾ Die letzte Identität folgt aus $\frac{d\mathcal{N}}{dp} \propto p^2$ und $\int_0^{p_{F,N}} \frac{d\mathcal{N}}{dp} dp = A$.

Nukleonen sind also nicht relativistisch, wie stillschweigend in der Herleitung angenommen wurde (z.B. in Gl. II.10b).

II.3.3 Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas

Das einfache Modell eines idealen Fermi-Gases von undifferenzierten Nukleonen ist ja nützlich, um Größenordnungen zu erhalten; es leidet aber an einem wichtigen Problem, und zwar dass alle Nuklide in einer Isobarenreihe gleich stabil sind, was offensichtlich falsch ist.

Um diesen Mangel zu beheben wird der Unterschied zwischen Protonen und Neutronen in diesem Abschnitt berücksichtigt werden. Statt eines einzigen Gases sind jetzt im Potentialtopf zwei verschiedene Fermi-Gase von Protonen bzw. Neutronen mit $m_p \neq m_n$ und unterschiedlichen Fermi-Energien $\varepsilon_{F,p}$ bzw. $\varepsilon_{F,n}$. Für jedes Gas ist der Entartungsgrad jetzt $g = 2$. Die elektrische Ladung des Protons und die daraus folgende Coulomb-Abstoßung wird aber in der Diskussion noch ausgelassen.

Die Beziehung (II.8) angewandt auf jedes Fermi-Gas führt jetzt zu

$$Z = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,p}^3, \quad N = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{V}_{\text{Kern}}}{\hbar^3 \pi^2} p_{F,n}^3, \quad (\text{II.13})$$

so dass die jeweiligen Fermi-Impulse der Gase durch

$$p_{F,p} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{Z}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3}, \quad p_{F,n} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{N}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{1/3}, \quad (\text{II.14a})$$

und die Fermi-Energien durch

$$\varepsilon_{F,p} = \frac{p_{F,p}^2}{2m_p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_p} \left(\frac{Z}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_{F,n} = \frac{p_{F,n}^2}{2m_n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} \left(\frac{N}{\mathcal{V}_{\text{Kern}}} \right)^{2/3} \quad (\text{II.14b})$$

gegeben sind. Mit dem Ansatz $\mathcal{V}_{\text{Kern}} = \frac{4}{3} \pi R_s^3$ lautet dies noch

$$p_{F,p} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} Z^{1/3} \frac{\hbar}{R_s}, \quad p_{F,n} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} N^{1/3} \frac{\hbar}{R_s} \quad (\text{II.15a})$$

und

$$\varepsilon_{F,p} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} Z^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_p R_s^2}, \quad \varepsilon_{F,n} = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} N^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_n R_s^2}. \quad (\text{II.15b})$$

In Analogie zum einkomponentigen Fermi-Gas ergeben sich die gesamten kinetischen Energien der beiden Gase:

$$E_p = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,p} Z \quad \text{und} \quad E_n = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,n} N. \quad (\text{II.16})$$

Die gesamte kinetische Energie $E \equiv E_p + E_n$ aller Nukleonen des Atomkerns lautet dann

$$E = \frac{3}{5} (\varepsilon_{F,p} Z + \varepsilon_{F,n} N) = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2R_s^2} \left(\frac{Z^{5/3}}{m_p} + \frac{N^{5/3}}{m_n} \right).$$

Dies lässt sich als $E = E_N + \Delta E$ umschreiben, wobei E_N die oben berechnete gesamte kinetische Energie (II.12) des Einkomponenten-Nukleonen-Gases ist. Schreibt man

$$E = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_N R_s^2} \left[A^{5/3} + 2^{2/3} \left(\frac{m_N}{m_p} Z^{5/3} + \frac{m_N}{m_n} N^{5/3} \right) - A^{5/3} \right],$$

so erhält man unter Vernachlässigung der geringen Massendifferenz zwischen Neutron und Proton

$$\Delta E \simeq \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(\frac{2}{A} \right)^{2/3} \left[Z^{5/3} + N^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]. \quad (\text{II.17})$$

Sei $T_3 \equiv \frac{1}{2}(Z - N) = Z - \frac{A}{2}$, was zu $Z = \frac{A}{2} + T_3$ und $N = \frac{A}{2} - T_3$ führt. Die Taylor-Entwicklung von ΔE für $|Z - N| \ll A$ gibt

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(\frac{2}{A} \right)^{2/3} \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \left[\left(1 + \frac{2T_3}{A} \right)^{5/3} + \left(1 - \frac{2T_3}{A} \right)^{5/3} - 2 \right] \\ &\simeq \frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \frac{T_3^2}{A} = \frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die kinetische Energie pro Nukleon E/A

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_{F,N} \left(1 + \frac{20}{9} \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A^2} \right). \quad (\text{II.18})$$

Für feste Nukleonenzahl A passen symmetrische Kerne in einem seichteren Potentialtopf als asymmetrische Kerne, bzw. wenn $Z - N \neq 0$ kann Energie durch β -Zerfälle kleiner werden: $Z \sim N$ ist eher stabil als $|Z - N|$ groß. Wir können jetzt verstehen, weshalb $Z \sim N$ energetisch günstiger ist. Dazu liefert Gl.(II.18) die Form des Asymmetrieterms in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel.

Da sich ein Neutron durch β -Zerfall in ein Proton umwandeln kann — und umgekehrt, wenn das energetisch möglich ist —, müssen die Fermi-Energien $\varepsilon_{F,p}$, $\varepsilon_{F,n}$ bei einem stabilen Kern wie in Abb. II.6 etwa gleich hoch liegen: es darf kein leeres Niveau zwischen den Fermi-Energien der beiden Gase sein.

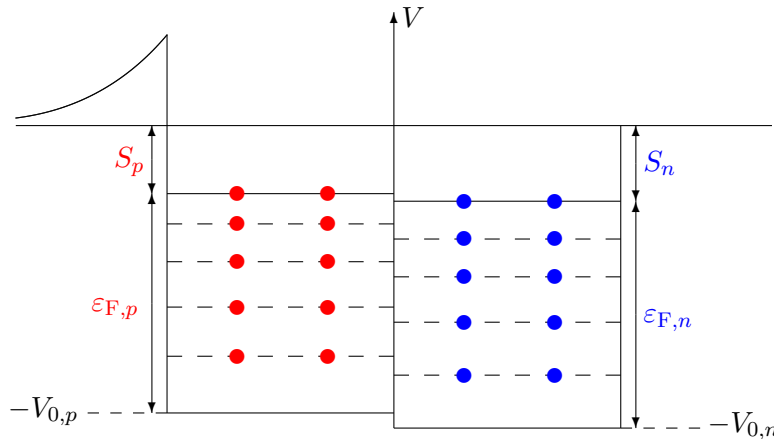


Abbildung II.6 – Schematisches Bild eines gg-Kerns als Fermi-Gas von Protonen und Neutronen unter Berücksichtigung der Korrektur, die durch die Coulomb-Abstoßung bedingt ist. S_p bzw. S_n ist die Separationsenergie für die Abspaltung eines Protons bzw. eines Neutrons.

Bemerkungen:

* Die kinetische Energie pro Nukleon (II.18) sollte mutmaßlich die Größe der in der Bethe–Weizsäcker Massenformel eingeführten Asymmetrie-Energie liefern: mit $\varepsilon_{F,N} \simeq 40$ MeV findet man $a_A = -\frac{4}{3} \varepsilon_{F,N} \simeq 52$ MeV. Das ist ungefähr um einen Faktor 2 kleiner als der durch Anpassung der Daten erhaltene Wert. Die Diskrepanz kommt daraus her, dass die Tiefe des Topfs $-V_0$ selbst vom Neutronenüberschuß $N - Z$ des Atomkerns abhängt.

* Höhere Ordnungen in der Taylor-Entwicklung der Energiedifferenz (II.17) liefern natürlich zusätzliche Terme, die in die Massenformel können eingeführt werden. Zum Beispiel hätte der nächste Beitrag zur Masse pro Nukleon eine Abhängigkeit $(Z - \frac{A}{2})^4/A^4$, was für Nuklide im Stabilitätstal nur eine geringe Korrektur darstellt.

II.3.4 Mögliche Verbesserungen des Modells

II.3.4 a Oberflächen- und Coulomb-Energien

Die Energie pro Nukleon (II.18) basiert letztendlich auf den Gleichungen (II.13), die selbst aus der Teilchenzahl in einem infinitesimalen Impulsraumelement (II.6) folgen. Man kann zeigen, dass diese Teilchenzahl leicht überschätzt ist, weil sie tatsächlich ein unendliches Volumen des Kerns in Ortsraum $\mathcal{V}_{\text{Kern}}$ voraussetzt. Die entsprechende Korrektur zur Energie des Fermi-Gases ist eigentlich proportional zur Oberfläche des Kerns und trägt der Gesamtenergie einen Term proportional zu $A^{2/3}$ bei, der der Oberflächenenergie in der Massenformel II.2 entspricht.

Wegen der Heisenbergschen Unschärferelation kann die Oberfläche eines mit dem endlichen Volumen reellen Kerns nicht fest sein: sonst hätten die Nukleonen an der Oberfläche eine bestimmte Position und $\vec{p} = \vec{0}$, was gleichzeitig unerlaubt ist. Somit fehlen die Zustände mit dem Abstand $|\vec{r}| = R_s$ vom Kernzentrum und dem Impuls $\vec{p} = \vec{0}$, sodass die Gesamtenergie um eine Korrektur $\propto R_s^2$ verringert ist. Eine quantitative Abschätzung der benötigten Korrektur zur Zahl der Zustände, befindet sich z.B. in Abschn. 2.3.1 von Ref. [1].

Dazu sollte die bisher ausgelassene Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen in Betracht gezogen werden. Eine erste einfache Folge dieser Abstoßung ist, dass der Potentialtopf, in dem die Protonen eingeschlossen sind, wegen des destabilisierend wirkenden Coulomb-Terms $\propto -Z^2/A^{1/3}$ (vgl. § II.2.1) seichter ist, d.h. $V_{0,p} < V_{0,n}$, wie in Abb. II.6 dargestellt wird.

II.3.4 b Berücksichtigung der Wechselwirkungen

Abweichung vom Modell des idealen Gases.

II.3.4 c Stärken und Mängel des Fermi-Gas-Modells

Die Beschreibung des Kerns als ein Fermi-Gas liefert zunächst nützliche Größenordnungen, z.B. die kinetische Energie der Nukleonen im Kern. Außerdem erlaubt die oben beschriebene schrittweise Verfeinerung eine Erklärung verschiedener Terme der Bethe-Weizsäcker Massenformel, insbesondere des Asymmetrie-Terms.

Dennoch läßt das Fermi-Gas-Modell die beobachtete bevorzugte Paarung von Protonen bzw. Neutronen in Kerne (d.h. den Paarungsterm B_δ) unerklärt. Des Weiteren kann das Modell keine Auskunft über die Verteilung der Energieniveaus geben: das Energiespektrum eines Fermi-Gases ist nämlich strukturlos bzw. gleichförmig, während die Anwesenheit einer bestimmten Struktur durch verschiedenen Beobachtungen angedeutet wird, z.B. durch die gemessenen Anregungsenergien unterschiedlicher Nuklide (s. Beispiel in § II.4.1).