

II.2.2 Stabilität im Tröpfchenmodell

Aus der Massenformel (II.2) kann man die Stabilität eines Nuklids gegenüber verschiedenen möglichen Umwandlungen bestimmen.

II.2.2 a Stabilität in einer Isobarenreihe

Betrachte man zum Beispiel die Variation der Kernmasse innerhalb einer Isobarenreihe $A = \text{konst.}$ Nach Gl. (II.2) hängt für feste Massenzahl A die Masse quadratisch von Z ab. Dann gibt es zwei Möglichkeiten je nachdem, ob A ungerade oder gerade ist:

- ungerade A : Der Paarungsterm B_δ verschwindet für gu- und ug-Kerne, deren Massen auf einer einzigen Parabel zusammenliegen (Abb. II.3 links). Nur ein Kern mit der möglichst minimalen Masse ist stabil, in den die anderen durch vorlaufende β^+ - oder β^- -Zerfälle sich umwandeln können.⁽²⁵⁾
- gerade A : Der Massenformel nach liegen die Massen der gg- bzw. uu-Kerne auf zwei verschiedenen Parabeln (Abb. II.3 rechts). Da kein direkter Übergang zwischen Isobaren mit Z und $Z \pm 2$ möglich ist,⁽²⁶⁾ können mehrere stabile gg-Isobare existieren. Andererseits kann ein uu-Kern nur stabil sein, wenn es kein gg-Isobar mit einer niedrigeren Masse gibt.⁽²⁷⁾

Somit wird die 1934 experimentell entdeckte *Mattauchsche Isobarenregel* erklärt, dass der Unterschied der Protonenzahlen zweier stabiler Isobare mindestens 2 sein soll [35].

⁽²⁵⁾ Um genauer festzulegen, ob ein β^- - bzw. β^+ -Zerfall energetisch möglich ist, muss man auch die Masse des emittierten Elektrons bzw. Positrons berücksichtigen, s. § ??.

⁽²⁶⁾ Tatsächlich gibt es auch die Möglichkeit eines *doppelten β -Zerfalls*.

⁽²⁷⁾ Da die Breite der Parabeln mit A wächst, wird das mögliche Vorhandensein eines gg-Isobars mit niedrigerer Masse wahrscheinlicher mit steigender Massenzahl; deshalb sind die einzigen stabilen uu-Kerne die leichtesten.

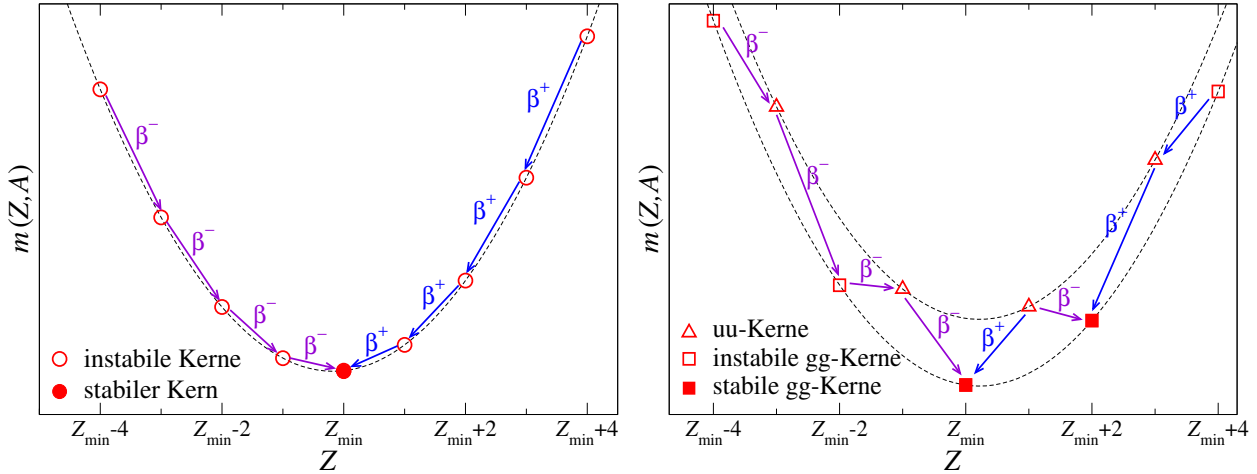


Abbildung II.3 – Variation mit Z der Masse $m(Z, A)$ in einer Isobarenreihe für ungerade (links) bzw. gerade (rechts) Massenzahl A .

Die Protonenzahl $Z_{\min}$ des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe wird durch die Bedingung $\partial m(Z, A)/\partial Z = 0$ gegeben. Mit Gl. (II.2) findet man

$$Z_{\min}(A) = \frac{A a_A + (m_n - m_p)c^2}{2 a_A + a_C A^{2/3}} = \frac{A}{1,97 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (\text{II.3})$$

Der entsprechende Verlauf (β -Stabilitätslinie, *Stabilitätstal*)^(xxxi) wird in Abb. II.4 dargestellt. Für kleines A liefert diese Gleichung $Z_{\min} \simeq A/2$, während $Z_{\min}$ für größere Massenzahl immer kleiner als $A/2$ wird: somit wird der beobachtete zunehmende relative Neutronenüberschuß erklärt.

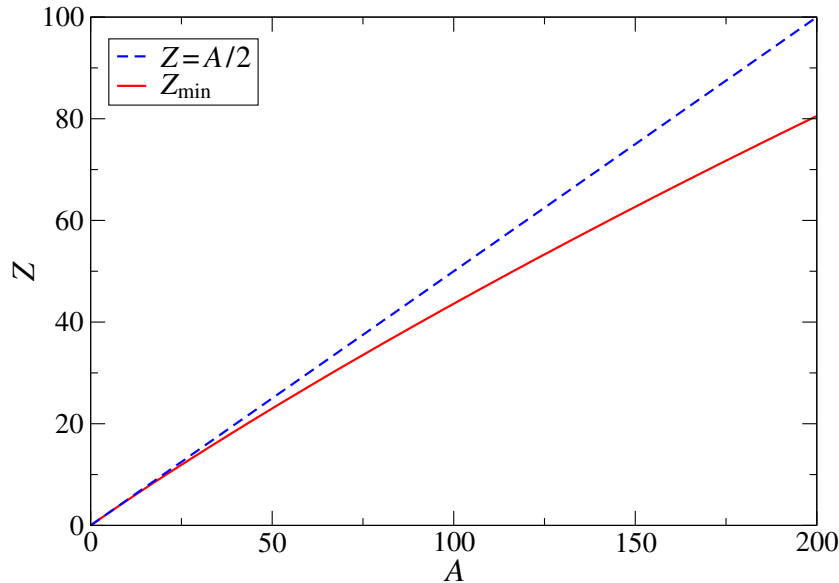


Abbildung II.4 – Protonenzahl $Z_{\min}$ des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe, Gl. (II.3).

^(xxxi) valley of stability

II.3 Atomkern als ideales Fermi-Gas

In diesem Abschnitt und dem folgenden wird die quantenmechanische Natur der einen Atomkern bildenden Nukleonen genauer berücksichtigt als im Tröpfchenmodell. Zu diesem Zweck wird ein Kern als eine Menge von in einem Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen beschrieben.

Die zugrundeliegende Idee der Modelle ist, dass sich die Wirkung aller anderen Nukleonen auf ein beliebiges Nukleon effektiv zu einem „mittleren“ Potential mitteln lässt, welches das Nukleon in einem kleinen Raumbereich — entsprechend dem Kernvolumen — einsperrt und identisch für alle Nukleonen ist. Löst man das quantenmechanische Problem eines Teilchens im mittleren Potential, so findet man verschiedene gebundene Ein-Teilchen-Zustände auf sukzessiven Energieniveaus, die das Nukleon besetzen kann. Ein den Atomkern darstellender Viel-Teilchen-Zustand ergibt sich dann, indem die A Nukleonen auf solche Ein-Teilchen-Zustände verteilt werden. Dabei soll der Spin $\frac{1}{2}$ der Protonen und Neutronen — die somit sog. *Fermionen* sind — berücksichtigt werden: wenn mehrere davon sich im Potentialtopf befinden, gehorchen sie dem Pauli-Prinzip, sodass jeder verfügbare quantenmechanische Ein-Teilchen-Zustand von maximal nur einem Proton bzw. Neutron besetzt werden darf.

Im Fermi-Gas-Modell verzichtet man auf das exakte Spektrum der gebundenen Energieniveaus. Stattdessen verwendet man eine statistische Beschreibung — die eigentlich nur im Fall einer unendlichen Zahl von Teilchen begründet ist — und betrachtet man die im Potentialtopf eingeschlossenen Protonen und Neutronen als ein quantenmechanisches „Gas“, wobei die letztere Bezeichnung bedeutet, dass die Wechselwirkungen zwischen den im Potential eingeschlossenen Teilchen klein⁽³⁰⁾ sind. Da es sich bei diesem Gas um Fermionen handelt, spricht man von einem *Fermi-Gas* (§ II.3.1). Hiernach wird der Atomkern zunächst als ideales Fermi-Gas aus Nukleonen (§ II.3.2), dann als ideale Mischung zweier idealer Fermi-Gase aus Protonen und Neutronen (§ II.3.3) beschrieben. Durch diesen Ansatz lassen sich einige Eigenschaften des Atomkerns erklären, wie hiernach am Beispiel der in der Bethe–Weizsäcker-Massenformel phänomenologisch eingeführten Asymmetrie-Energie illustriert wird.

II.3.1 Ideales Fermi-Gas

Im Folgenden werden die elementaren Grundlagen der Theorie des idealen quantenmechanischen Fermi-Gases bei Null-Temperatur kurz dargelegt. Ausführlichere Darstellungen sind in Lehrbüchern der Statistischen Physik zu finden, z.B. in Refs. [36, 37].

Eine Menge aus $\mathcal{N}$ nicht-wechselwirkenden Teilchen — ein ideales Gas — sei in einem räumlichen Volumen $\mathcal{V}$ eingeschlossen, z.B. durch das Kastenpotential $V(\vec{r}) = 0$ wenn $\vec{r} \in \mathcal{V}$, $V(\vec{r}) = \infty$ sonst. Für große Volumina wird der Abstand zwischen sukzessiven Energieniveaus sehr gering und man kann annehmen, dass die Niveaus ein fast kontinuierliches Spektrum bilden. Genauer ergibt sich, dass die Anzahl von Teilchen mit einem Impuls zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + d^3\vec{p}$ durch

$$d\mathcal{N}(\varepsilon_{\vec{p}}) = g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\text{II.6})$$

gegeben ist, wobei $\varepsilon_{\vec{p}}$ die mit dem Impuls $\vec{p}$ assoziierte Energie ist: für nicht-relativistische Teilchen mit der Masse m , $\varepsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$, wobei die Massenenergie weggelassen wurde. g ist der *Entartungsgrad* der Teilchen, d.h. die Zahl von unabhängigen (inneren) Freiheitsgraden einer bestimmten Teilchenart: für Teilchen mit dem Spin s gilt üblicherweise $g = 2s+1$, entsprechend der Anzahl der möglichen Werte von m_s .⁽³¹⁾

Schließlich bezeichnet $f(\varepsilon)$ die mittlere Besetzungszahl eines Zustands mit der Energie ε . Die funktionale Form von $f(\varepsilon)$ hängt von der Teilchenart ab, und zwar davon, ob die Teilchen einen

⁽³⁰⁾ Genauer soll die mit diesen Wechselwirkungen assoziierte potentielle Energie klein gegenüber die kinetische Energie der Teilchen sein.

⁽³¹⁾ Es gibt aber wichtige Ausnahmen zu dieser Regel, wie z.B. bei Photonen, die in nur $g = 2$ Polarisationszuständen vorkommen können, obwohl sie Teilchen mit dem Spin 1 sind.

ganzzahligen (Boson) oder halbzahligen (Fermionen) Spin haben. Hiernach werden nur Protonen und Neutronen, also Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, betrachtet. Daher kann jeder Zustand laut dem Pauli-Ausschließungsprinzip durch maximal ein Teilchen besetzt werden: die Besetzungszahl eines Zustands ist entweder 0 und 1, und die genaue mittlere Besetzungszahl hängt von der Temperatur ab. Hiernach wird angenommen, dass die Nukleonen ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur Null bilden, was sich im Nachhinein prüfen lässt. In diesem Fall ist

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0 & \text{für } \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

wobei ε_F die sog. *Fermi-Energie* ist, die somit die Energie des höchsten besetzten Niveaus ist, während tiefere Energieniveaus voll besetzt sind.

Integriert man Gl. (II.6) über Energien ε von 0 bis ∞ , so soll man die Gesamtzahl von Teilchen $\mathcal{N}$ erhalten. Äquivalent kann man über alle Impulse $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ integrieren. Da die Besetzungszahl nur von $\varepsilon_{\vec{p}}$ und dadurch vom Betrag $p \equiv |\vec{p}|$ abhängt, sind sphärische Koordinaten im Impulsraum für das Integral günstig. Dabei kann man sofort über die Winkeln, die keine Rolle spielen, integrieren, und somit $d^3\vec{p}$ durch $4\pi p^2 dp$ ersetzen, wobei p von 0 bis ∞ läuft. Assoziiert man der Fermi-Energie einen *Fermi-Impuls* p_F , so kann man die obere Grenze des Integrals durch p_F , denn die Niveaus mit höherem Impuls sind bei Null-Temperatur unbesetzt. Somit ergibt sich

$$\mathcal{N} = \int_0^\infty g f(\varepsilon_{\vec{p}}) \frac{\mathcal{V} 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{g\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{g\mathcal{V}}{6\pi^2\hbar^3} p_F^3. \quad (\text{II.8})$$