

KAPITEL II

Struktur von Kernen. Kernmodelle

II.1	Phänomenologie	29
II.2	Tröpfchenmodell	30
II.2.1	Bethe–Weizsäcker Massenformel	31
II.2.2	Stabilität im Tröpfchenmodell	33
II.2.3	Zwischenakt: Eine kühne Extrapolation	36
II.3	Atomkern als ideales Fermi-Gas	36
II.3.1	Ideales Fermi-Gas	37
II.3.2	Der Kern als Einkomponenten-Fermi-Gas von Nukleonen	38
II.3.3	Der Kern als Zweikomponenten-Fermi-Gas von Protonen und Neutronen	39
II.3.4	Mögliche Verbesserungen des Modells	41
II.4	Schalenmodell des Atomkerns	42
II.4.1	Motivation für ein Schalenmodell	43
II.4.2	Erste Versuche eines Schalenmodells des Atomkerns	45
II.4.3	Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung	51
II.4.4	Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells des Atomkerns	54
II.4.5	Stärken und Mängel des Einteilchen-Schalenmodells	58

II.1 Phänomenologie

- Es gibt ungefähr 250 stabile Kerne (d.h. Nuklide ohne bisherigen beobachteten Zerfall, entsprechend einer mittleren Lebensdauer $T_{1/2} \gtrsim 10^{20}$ Jahre), davon⁽²²⁾

Z	N	
gerade	gerade	145 „gg-Kerne“
gerade	ungerade	53 „gu-Kerne“
ungerade	gerade	48 „ug-Kerne“
ungerade	ungerade	5 „uu-Kerne“

Die stabilen uu-Kerne sind die leichtesten: ${}^2_1\text{H}$ (Deuterium), ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$. Dazu ist der angeregte Zustand mit $E^* = 77,1$ keV und $J_{\text{Kern}} = 9^-$ vom ${}^{180}_{73}\text{Ta}$ -Nuklide mit der Halbwertszeit $T_{1/2} > 2,9 \cdot 10^{17}$ Jahre besonders *metastabil*.

Außerdem gibt es 35 instabile Nuklide mit einer sehr langen Halbwertszeit größer als 10^8 Jahre (und sogar größer als 10^{10} Jahre für 32 davon). Darunter sind 23 gg-Kerne, 3 gu-Kerne, 5 ug-Kerne und 4 uu-Kerne (insbesondere ${}^{40}\text{K}$).

- Die meisten stabilen bzw. gebundenen Kerne haben $Z \leq N$: die Coulomb-Abstoßung zwischen Protonen wirkt destabilisierend auf protonenreiche Kerne.

⁽²²⁾Referenz [24] beinhaltet eine moderne Datenbank von Kerneigenschaften, mit insbesondere dem Spin und der Parität der Kerne, sowie den Halbwertszeiten der instabilen Nuklide.

Der relative Neutronenüberschuss bzw. das Verhältnis N/Z wächst mit der Massenzahl A : N/Z nimmt von 1 bei den leichten stabilen Kernen auf 1,54 beim schwersten stabilen Kern $^{208}_{82}\text{Pb}$ und 1,59 bei dem langlebigen $^{238}_{92}\text{U}$ zu.

- Bindungsenergie (vgl. § I.3.2) $B(Z, A) \equiv [Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A)] c^2$

Die Bindungsenergie pro Nukleon $B(Z, A)/A$ ist in erster Näherung konstant für $A \gtrsim 20$: $B(Z, A)/A \approx 7,5 - 8,5 \text{ MeV}$ (Abb. I.11).

- Es gibt manchmal viele stabile Isotope mit einer der *magischen Zahlen* $Z = 8, 20, 28, 50, 82$ — z.B. 10 stabile $_{50}\text{Sn}$ -Isotope (Zinn) —, sowie viele stabile Isotone mit $N = 8, 20, 28, 50, 82, 126$. Außerdem sind solche Nuklide (und ^4_2He : $Z = N = 2$) besonders stabil im Bezug auf ihre Nachbarn (mehr dazu in § II.4.1).
- Aus der Systematik der gemessenen Spins und Paritäten (J_{Kern}^P) sowie magnetischen Dipolmomenten (μ) und elektrischen Quadrupolmomenten (Q) von Atomkernen (s. Ref. [24] oder Experimente 56-57 in Ref. [8]) lassen sich ein paar Regelmäßigkeiten beobachten:
 - für alle gg-Kerne sind $J_{\text{Kern}}^P = 0^+$ und $\mu = 0$;
 - die Parität der ug- bzw. gu-Kerne ändert sich oft bei einem der oben erwähnten magischen Protonen- bzw. Neutronenzahlen; sonst bleibt die Parität zwischen zwei aufeinanderfolgenden magischen Zahlen in den meisten Fällen unverändert;
 - die magnetischen Dipolmomente der ug-Kerne sind bis auf einige Ausnahmen immer positiv und nehmen mit wachsendem Kernspin zu; bei gu-Kernen existiert keine solche Tendenz;
 - bei den magischen Protonenzahlen ändert sich das Vorzeichen des elektrischen Quadrupolmoments: Q ist positiv unterhalb einer magischen Zahl, negativ oberhalb.

Verschiedene Kernmodelle werden eingeführt, um diese gemessenen Eigenschaften zu beschreiben bzw. zu erklären. Es soll aber sofort klar sein, dass „Various models of the nucleus emphasize different features of the nucleus. No single simple model explains all nuclear properties“ (E.Fermi: Kap. 8, Abschnitt H in Ref. [30]). Um die oben erwähnten Eigenschaften teilweise wiederzugeben werden in den drei folgenden Abschnitten drei Modelle des Atomkerns eingeführt, die unterschiedlichen Beschreibungsarten mit Betonung auf diversen Aspekten entsprechen.

II.2 Tröpfchenmodell

In Abschn. I.2 wurde die gute Beschreibung der Ladungsdichteverteilungen von (stabilen) Atomkernen mit $A \geq 20$ mithilfe der Woods–Saxon Verteilung (I.21) erwähnt. Dementsprechend ist die Teilchendichte $n(0)$ im Zentrum des Kerns in guter Näherung dieselbe für alle schweren Kerne: $n(0) \simeq n_\infty = 0,17 \text{ Nukleonen/fm}^3$. Diese Universalität liegt zugrunde dem Begriff der *Kernmaterie*,^(xxix) d.h. einer Art Materie, die aus stark wechselwirkenden Nukleonen besteht.⁽²³⁾ Die *Sättigungsdichte* n_∞ ist dann die Dichte dieser Kernmaterie im Gleichgewicht bei verschwindender Temperatur T .⁽²⁴⁾

⁽²³⁾ Um eine Art von Materie puristisch zu definieren, muss man zuerst ein unendliches System von wechselwirkenden Nukleonen betrachten.

⁽²⁴⁾ Unter üblichen Bedingungen ist die Temperatur T solche, dass die kinetische Energie $\simeq k_B T$ der Nukleonen viel kleiner ist, als die typische Energie in der Kernphysik $\approx 1\text{--}10 \text{ MeV}$. Nicht-vernachlässigbare Temperaturen bzw. kinetische Energien werden nur in der allerletzten Phase des Lebens schwerer Sterne erreicht, oder in Kernkollisionen.

^(xxix) nuclear matter

Die Eigenschaften der Kernmaterie sind bei $T = 0$ jene einer (kompressiblen) Flüssigkeit:
 – die Kohäsionskräfte sind stark genug, um spontane Verdampfung zu verhindern (es existieren stabile gebundene Kerne!); kein Gas;
 – die Kernmaterie besitzt kontinuierliche Rotations- und Translationssymmetrie, sie ist also kein Festkörper.

In diesem Bild ist ein Atomkern als ein Tröpfchen von Kernmaterie dargestellt: ein bestimmter Kern wird nur durch seine Massenzahl A (bzw. seinen Radius $\propto A^{1/3}$) und seine elektrische Ladung Z charakterisiert; der Rest seiner Eigenschaften sollen jene der Kernmaterie spiegeln. In diesem Modell besteht die Bindungsenergie des Kerns aus nur ein paar Beiträgen, und zwar zuerst einem Volumen- und einem Oberflächenterm mit umgekehrtem Vorzeichen. Da der Kern elektrisch geladen ist, soll auch ein betreffender „Coulomb“-Term der Energie beitragen.

Neben diesen Beiträgen können weitere Terme ins Modell eingeführt werden, um verschiedene Kerneigenschaften wiederzugeben. Im Folgenden werden nur zwei solche halb-phänomenologische Beiträge betrachtet, die Vorhersagen über die Stabilität von Kernen ermöglichen.

II.2.1 Bethe–Weizsäcker Massenformel

Die Bindungsenergie wird als die Summe verschiedener Beiträge geschrieben [31, 32]:

$$B = B_V + B_S + B_C + B_A + B_\delta, \quad (\text{II.1})$$

wobei $B_V, B_S, B_C, B_A, B_\delta$ von (A, Z) und von positiven Koeffizienten $a_V, a_S, a_C, a_A, a_\delta$ abhängen.

- Volumenenergie $B_V = a_V A$ (Nukleonenzahl $A \propto$ Volumen V)
 Dieser Term entspricht einer konstanten Energiedichte ($\Leftrightarrow$ konstanten Teilchendichte);
 a_V wird manchmal *Sättigungsenergie* genannt.
- Oberflächenterm $B_S = -a_S A^{2/3}$ (Oberfläche $S \propto R^2 \propto A^{2/3}$)
 Die Nukleonen an der Oberfläche sind weniger gebunden als solche im Inneren, weil sie weniger Nachbarn besitzen.
- Coulomb-Term $B_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$ ($\propto Q^2/R$)
 Die Z Protonen stoßen einander ab: verringerte Bindung.

Es sei eine homogen geladene Kugel mit dem Radius r' und der Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}$. Für Abstände $r \geq r'$ erzeugt sie das elektrostatische Coulomb-Potential $U(r) = q'/4\pi\epsilon_0 r$, wobei $q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho_{\text{el.}}$.

Um weitere Ladungen vom Unendlichen zuzuführen, z.B. eine Kugelschale mit dem inneren bzw. äußeren Radius r' bzw. $r' + dr'$, entsprechend einer Ladung $dq' = 4\pi r'^2 dr' \rho_{\text{el.}}$, muss man eine Arbeit $\delta W = -dq' [U(\infty) - U(r')] = U(r') dq'$ leisten. Um einen Kern mit dem Radius $r' = R$ und der Ladung $Ze = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{el.}}$ zu kondensieren benötigt man insgesamt eine Arbeit

$$W = \int_0^R dW = \frac{4\pi\rho_{\text{el.}}^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r'^4 dr' = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}.$$

Mithilfe der Formel $R = r'_0 A^{1/3}$ wobei $r'_0 = 1,128$ fm erhält man also $a_V = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r'_0} = 0,77$ MeV.

Dieser Term kann experimentell mithilfe von sog. *Spiegelkernen*^(xxx) bestimmt werden, d.h. einem Paar von Kernen mit (Z, N) und $(Z - 1, N + 1 = Z)$ [z.B. ($^3_2\text{He}, ^3_1\text{H}$), ($^{13}_7\text{N}, ^{13}_6\text{C}$)]: die Differenz zwischen den Bindungsenergien der Kerne lautet

$$\Delta B = a_C \left(\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{(Z-1)^2}{A^{1/3}} \right) = a_C \frac{2Z-1}{A^{1/3}} = a_C A^{2/3}.$$

Aus einer Anpassung der $\Delta B(A)$ -Abhängigkeit für die vorhandenen Spiegelkernpaare wird dann a_C erhalten (vgl. z.B. Ref. [33]).

^(xxx)mirror nuclei

- Asymmetrie-Energie $B_A = -a_A(A/2 - Z)^2 A^{-1}$
Quantenmechanische Effekte (s. § II.3.3) im Bezug auf die gemessene annähernde Ladungsunabhängigkeit der Nukleon–Nukleon-Kräfte bevorzugen einen möglichst kleinen Neutronenüberschuss. Umgekehrt sind Kerne mit hohen Werten von $N - Z = A - 2Z$ weniger gebunden.

- Paarungsterm B_δ

Motiviert durch die Beobachtung, dass es mehr Kerne mit geraden Protonen- und Neutronenzahl gibt, als mit ungerader Z oder N :

$$B_\delta = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

wobei $\delta = a_\delta A^{-1/2}$ (oder manchmal $\propto A^{-3/4}$: die A -Abhängigkeit ist rein empirisch).

Insgesamt erhält man die Bethe^(ai)–Weizsäcker^(aj) Massenformel

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A (Z - \frac{A}{2})^2 A^{-1} \pm \delta}{c^2}. \quad (\text{II.2})$$

Die verschiedenen Koeffizienten werden durch Anpassung den experimentellen Daten bestimmt. Man findet z.B. $a_V = 15,85$ MeV, $a_S = 18,34$ MeV, $a_C = 0,71$ MeV, $a_A = 92,86$ MeV, $a_\delta = 11,46$ MeV [34]. Der angepasste Wert des Parameters a_C ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der elektrostatischen Berechnung. Mit diesen Parametern liefert die Massenformel (II.2) eine sehr gute Beschreibung der gemessenen Massen bzw. Bindungsenergien stabiler Kerne, mit einer Genauigkeit von etwa 1% für $A > 30$, vgl. Abb. II.1.

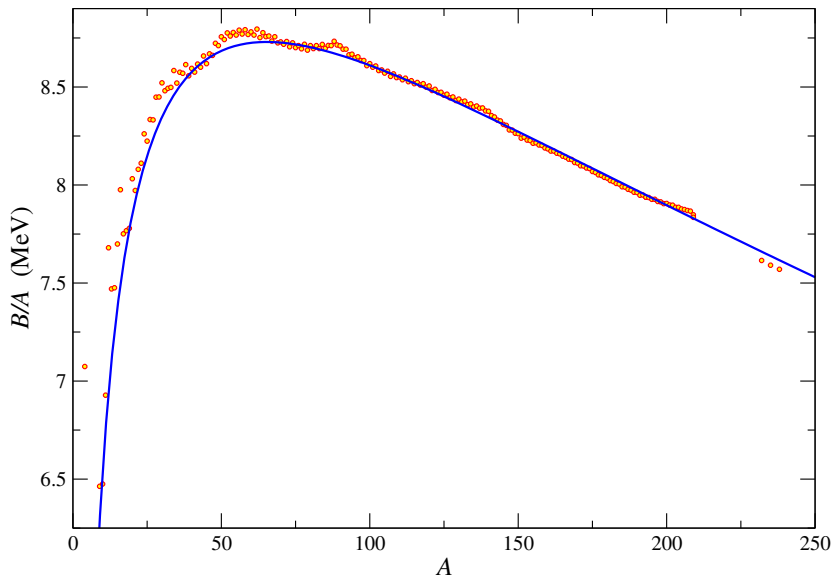


Abbildung II.1 – Bindungsenergien pro Nukleon stabiler Kerne (vgl. Bildtext von Abb. I.11) zusammen mit der durch Gl. (II.1) gegebenen Anpassung unter Auslassung des Paarungsterms B_δ .

Die jeweiligen Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie werden in Abb. II.2 dargestellt: Die Oberflächenenergie spielt die größte Rolle bei kleinen Kernen, B_S/A sinkt aber mit wachsender A . Im Gegensatz sind die relativen Höhen der Coulomb- und Asymmetrie-Terme bei leichten Kernen gering, nehmen aber bei schwereren Kernen zu.

^(ai)H. BETHE, 1906–2005 ^(aj)C. F. VON WEIZSÄCKER, 1912–2007

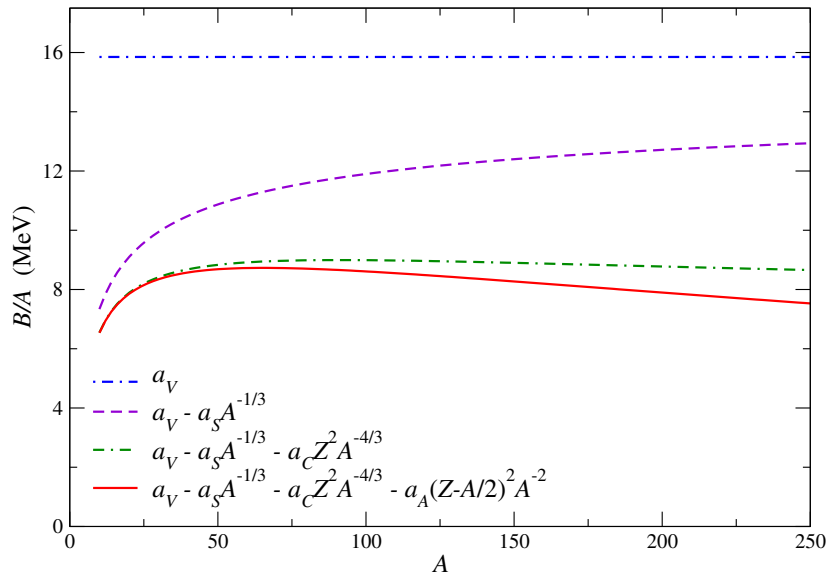


Abbildung II.2 – Jeweilige Höhen der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon. Für Z wurde der durch Gl. (II.3) gegebene Wert des stabilsten Kerns bei gegebener A benutzt.

In einigen Büchern wird der Coulomb-Beitrag als $B_C = -Z(Z-1)/A^{1/3}$ statt des oben gegebenen Terms geschrieben. Der angebliche Grund ist, die „Selbstwechselwirkung“ jedes Protons nicht zweimal zu zählen. Eine solche Verfeinerung wird im Folgenden nicht betrachtet: Erstens ist der Unterschied zwischen Z^2 und $Z(Z-1)$ nur bedeutsam bei kleinem Z , wo der Coulomb-Term immerhin eine geringe Rolle spielt. Zweitens ist es nicht klar, warum im Zähler der „Selbstenergie“ der Protonen der Kernradius vorkommt, und nicht der Protonenradius.