

# Kreisbewegung einmal anders

## Computerunterstützte Messungen an der Looping-Bahn

Die Attraktivität des doch eher »trockenen« Mechanikunterrichts der Sekundarstufe II lässt sich erheblich steigern, wenn interessante Experimente mit hohem Alltagsbezug unter Anwendung moderner Messmethoden durchgeführt werden. Im Folgenden wird ein solches Experiment, die computerunterstützte Messung der beim Durchfahren einer Spielzeug-Looping-Bahn auftretenden Kräfte und Geschwindigkeiten, beschrieben. Die Messungen können mit den von Lehrmittelfirmen angebotenen PC-Messsystemen, Kraftsensor und Lichtschranken durchgeführt werden. Hervorragend geeignet sind aber insbesondere die an vielen Schulen eingeführten grafikfähigen Taschenrechner mit zugehörigem Interface und Sensoren, da hiermit Schülerinnen und Schüler eigenständig messen können.

### 1 Einführung

Die Physik der senkrecht zur Erdoberfläche ablaufenden Kreisbewegung und insbesondere die dabei auftretenden Kräfte werden in zahlreichen Jahrmarktattraktionen wie Loopingbahn, Schiffschaukel oder Rotor ausgenutzt. Diese Form der Kreisbewegung hat also einen hohen Bezug zur Erlebniswelt von Schülerinnen und Schülern. Im Unterricht der Sekundarstufe II ist sie als Übungsaufgabe oder Rechenbeispiel »beliebt« (siehe z. B. [1, S. 89], [2, S. 55], [3]), da die Berechnung der auftretenden Geschwindigkeiten und Kräfte die Kenntnis und Anwendung vieler im Mechanikunterricht eingeführter Größen, Gesetzmäßigkeiten oder Techniken erfordert: sowohl die Gesetze der Kreisbewegung, die Zentripetalkraft und die Komponentenzerlegung der Kräfte aber auch die kinetische und potentielle Energie und der Energieerhaltungssatz werden benötigt.

Mit Hilfe der schon seit vielen Jahren als »motivierendes Spielzeug im Physikunterricht« benutzten Spielzeug-Loopingbahn (Darda-Bahn) [4–7], Gabellichtschranken und computerunterstützter Kraftmessung können viele der sonst nur berechneten Größen – auch von Schülerinnen und Schülern selbst – mit relativ wenig Aufwand experimentell bestimmt werden. Wir benutzen zur Kraftmessung die an vielen Schulen bereits eingeführten grafikfähigen Taschenrechner TI-Voyage 200 oder TI-89 mit dem Datenerfassungssystem CBL2 und zugehörigem Kraftsensor. Natürlich können die Messungen auch mit anderen Taschenrechner-Systemen – wie dem von CASIO – oder den von Lehrmittelfirmen gelieferten PC-kompatiblen Messsystemen durchgeführt werden.

### 2 Physik im Looping – Kräfte und Geschwindigkeiten bei der senkrechten Kreisbewegung

Bei der Loopingfahrt wird die Zentripetalkraft  $\vec{F}_Z$ , die einen Wagen der Masse  $m$  auf die senkrecht stehende Kreisbahn zwingt, durch das Zusammenwirken seiner Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  und der durch die elastische Verformung der Bahn bewirkten Rückstellkraft (im folgenden »Bahnkraft«  $\vec{F}_B$  genannt) geliefert (vgl. auch [1, S. 89], [4]). Reibungseffekte seien vernachlässigt. Es gilt:

$$\vec{F}_Z = \vec{F}_B + \vec{F}_N \quad (1)$$

Wobei  $\vec{F}_N$  die Normalkomponente der Gewichtskraft ist. Die Zerlegung der Gewichtskraft in ihre Komponenten normal und tangential zur Bahn ist in Abbildung 1 illustriert.

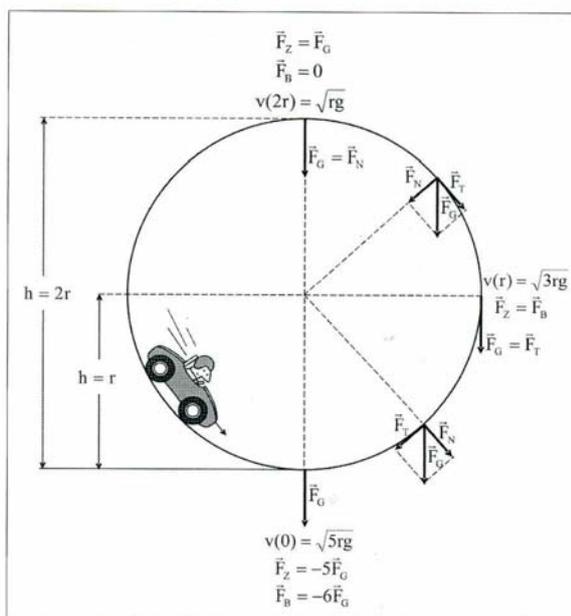


Abb. 1. Illustration der Kräfte und Geschwindigkeiten im Looping (vgl. auch [1, 4]). Die angegebenen Formeln gelten für den Grenzfall der gerade noch absturzfrenen Fahrt.

Anders als bei der waagerechten Kreisbewegung ist die Zentripetalkraft im Looping nicht konstant, da sich der Betrag der Geschwindigkeit abhängig von der Höhe  $h$ , auf der sich der Wagen während seiner Fahrt

befindet, ändert. Wie in den typischen Aufgaben zur Loopingfahrt betrachten wir auch hier den Grenzfall, bei dem die Geschwindigkeit des Wagens im oberen Loopingpunkt ( $h = 2r$ ,  $r$ : Radius des Loopings) gerade so groß ist, dass das Looping ohne Absturz durchfahren wird. In diesem Fall wird die Zentripetalkraft im höchsten Bahnpunkt vollständig durch die hier genau zum Kreismittelpunkt gerichtete Gewichtskraft geliefert; die Bahnkraft ist Null. Gleichsetzen von Gewichtskraft und Zentripetalkraft liefert die unter diesen Bedingungen im oberen Bahnpunkt auftretende Geschwindigkeit

$$v(2r) = \sqrt{r \cdot g} \quad (2)$$

wobei  $g$  natürlich die Erdbeschleunigung ist.

Der Wagen wird nach Durchfahren des höchsten Punktes durch die Gewichtskraft des Wagens nach unten beschleunigt; er erreicht seine höchste Geschwindigkeit im Fußpunkt des Loopings. Die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkt der Bahn,  $v(h)$ , erhält man mit Hilfe von (2) durch Anwendung des Energieerhaltungssatzes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot v(2r)^2 + m \cdot g \cdot 2r &= \frac{1}{2}m \cdot v(h)^2 + m \cdot g \cdot h \\ \Rightarrow v(h) &= \sqrt{5r \cdot g - 2g \cdot h} \end{aligned} \quad (3)$$

Aus der Komponentenzerlegung der Gewichtskraft tangential und normal zur Kreisbahn ist direkt ersichtlich (Abb. 1), dass die Normalkomponente  $\vec{F}_N$  in der oberen Hälfte des Loopings ( $h > r$ ) zum Kreismittelpunkt hin gerichtet ist und die Gewichtskraft des Wagens somit zumindest einen Teil der Zentripetalkraft liefert. Bei  $h = r$  ist  $\vec{F}_G = \vec{F}_T$  bzw.  $\vec{F}_N = 0$  – hier muss die Zentripetalkraft vollständig durch die Bahnkraft aufgebracht werden. Für  $h < r$  ist die Normalkomponente der Gewichtskraft der Zentripetalkraft entgegen gerichtet. Die Bahnkraft muss hier nicht nur die Zentripetalkraft liefern, sondern zusätzlich die Normalkomponente kompensieren. Im unteren Loopingpunkt erreicht die Bahnkraft dann ihren Maximalwert, da sowohl die auf Grund maximaler Geschwindigkeit vorliegende maximale Zentripetalkraft aufgebracht als auch die komplette Gewichtskraft des Wagens kompensiert werden muss. Die Bahnkraft im unteren Loopingpunkt entspricht hier dem sechsfachen der Gewichtskraft, wie Einsetzen von (3) mit  $h = 0$  zeigt:

$$\begin{aligned} F_B(0) = F_Z(0) + mg &= \frac{m \cdot v(0)^2}{r} + mg = \frac{m \cdot 5r \cdot g}{r} + mg \\ &= 6mg = 6F_G \end{aligned} \quad (4)$$

bzw. in der exakten vektoriellen Schreibweise der Gleichung (1):

$$\begin{aligned} \vec{F}_B(0) = \vec{F}_Z(0) - \vec{F}_N(0) &= \frac{m \cdot v(0)^2}{r} \cdot \left( \frac{-\vec{g}}{g} \right) - m\vec{g} \\ &= -\frac{m \cdot 5r \cdot g}{r} \cdot \left( \frac{\vec{g}}{g} \right) - m\vec{g} = -6m\vec{g} = -6\vec{F}_G \end{aligned} \quad (5)$$

Auf Grund des Prinzips *actio = reactio* übt der Wagen natürlich eine gleich große Kraft auf die Bahn aus. Durch einen mit mehreren Personen besetzten Wagen einer realen Loopingbahn wird daher im unteren Loopingpunkt eine Kraft auf die Bahn ausgeübt, die einer Gewichtskraft von mehreren Tonnen entspricht. Sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Studierende ist im Allgemeinen nicht nur die Größe dieser Kraft sehr überraschend, sondern auch die Tatsache, dass die Maximalkraft auf die Loopingbahn bei der Ein- und Ausfahrt des Wagens ausgeübt wird.

### 3 Versuchsaufbau und -ergebnisse

Sowohl die Kraft im unteren Loopingpunkt als auch die Geschwindigkeiten an verschiedenen Punkten der Bahn können im Spielzeug-Looping einfach experimentell bestimmt bzw. überprüft werden. Dazu wird eine Bahn, bestehend aus Looping-Schleife und Startrampe (Abb. 2), so aufgebaut, dass sich die Schleife genau zwischen zwei Tischen befindet (Abb. 2 und 3). Die Looping-Schleife liegt locker auf dem an einem Stativ befestigten Kraftsensor auf. Der Rechner zeigt dann zunächst die vom Looping ausgeübte Gewichtskraft an; dieser Wert wird mit Hilfe der Software kompensiert. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, den oberen Teil des Loopings durch leicht anliegendes Stativmaterial (Stangen, Klemmen o. ä.) seitlich etwas zu stabilisieren (vgl. Abb. 2 und 4), da es zu starken Schwankungen zur Seite kommt, wenn ein Wagen das Looping durchfährt. Ohne Stabilisierung kann

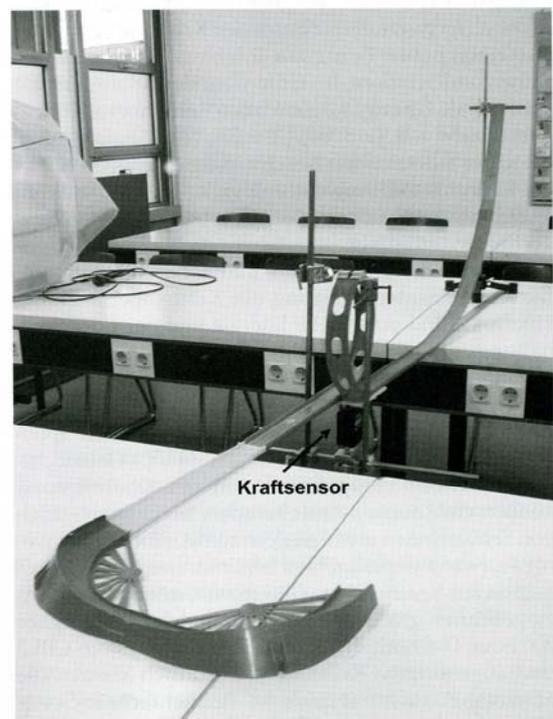


Abb. 2. Aufbau der Loopingbahn mit Startrampe.

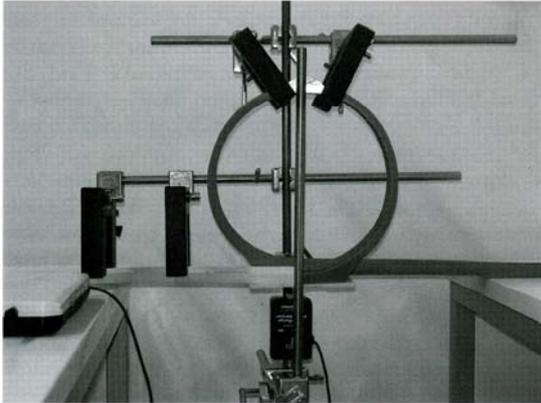


Abb. 3. Aufbau der Looping-Bahn mit Kraftsensor und Lichtschrankenpaaren für die Bestimmung der Geschwindigkeiten bei der Einfahrt ins Looping und im höchsten Punkt. Die für den Betrieb der Lichtschranken benötigten Kabel wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit auf diesem Foto weggelassen.

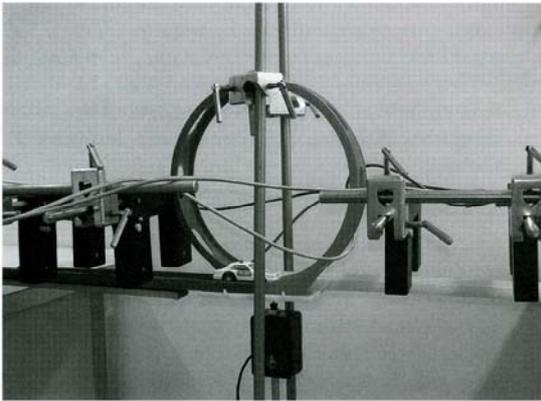


Abb. 4. Abweichungen der gemessenen Gewichtskraft des in die Bahn gestellten Wagens vom »theoretischen Wert« (Waage) liefert zuverlässige Hinweise auf Fehler im Aufbau.

das Looping vom Kraftmesser leicht abrutschen; die Ergebnisse der Kraftmessung sind häufig nicht aussagekräftig. Bei der Stabilisierung ist darauf zu achten, dass das Looping nicht fest eingeklemmt wird, da dann keine verlässliche Kraftmessung mehr möglich ist. Die vom Kraftsensor angezeigte Gewichtskraft des Loopings darf sich durch die seitliche Stabilisierung nicht ändern. Für die Stabilität häufig ebenfalls günstig, ist das Unterschieben einer Holzlatte, Maßstab o. ä. im Einfahrtbereich des Loopings (Abb. 2). Auch hier sollte man darauf achten, dass die Kraftmessung dadurch nicht verfälscht wird. Einen guten Test für einwandfreien Aufbau und Nullpunkteinstellung des Kraftsensors liefert die Messung der Gewichtskraft des in die Bahn gestellten Wagens (Abb. 4). Der Wert sollte mit dem mit Hilfe einer Waage ermittelten »theoretischen Wert« möglichst gut übereinstimmen – Abweichungen in der zweiten Nachkommastelle sind jedoch

tolerierbar. Bei sehr gutem Aufbau haben wir in unserem Experiment für den abgebildeten Wagen mit dem Kraftsensor 0.322 N gemessen – wiegen ergab 32.6 g (0.32 N). Nach Entfernen des Wagens sollte der angezeigte Kraftwert natürlich wieder Null betragen.

Die Geschwindigkeit des Wagens wird mit Hilfe von jeweils 2 Gabellichtschranken (Abstand einige Zentimeter) an verschiedenen Punkten der Bahn bestimmt. Abb. 3 zeigt die Lichtschrankenpaare zur Bestimmung der Geschwindigkeiten bei der Einfahrt ins Looping,  $v(0)$ , und im höchsten Punkt,  $v(2r)$ . Aber auch Messungen an anderen Bahnpunkten sind natürlich möglich, zum Beispiel bei der Ausfahrt aus dem Looping (Abb. 4) zum Vergleich mit der hier ausgeübten Kraft. Bei der Montage der Lichtschrankenpaare ist darauf zu achten, dass die Höhe der beiden Schranken des Paares möglichst exakt übereinstimmt, so dass gewährleistet ist, dass Start- und Stoppsignal der Uhr vom selben Bereich des Wagens ausgelöst werden. Das ist relativ einfach auf den geraden Stücken der Bahn realisierbar, erfordert aber für Messungen im kreisförmigen Bahnbereich des eigentlichen Loopings einige Justierarbeit, die zusätzlich dadurch erschwert wird, dass sich die Bahn beim Durchfahren des Loopings verformt und bewegt. Dabei kann sie u. U. in den Lichtweg gelangen und das Start- oder Stoppsignal vorzeitig auslösen.

Zum Vergleich mit den Berechnungen muss die Starthöhe des Wagens so groß gewählt werden, dass das Looping gerade durchfahren werden kann, ohne dass der Wagen abstürzt (vgl. 2.). Diese Starthöhe, die wegen Reibung natürlich größer als die mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes für den Idealfall berechnete ist, muss experimentell möglichst sorgfältig ermittelt und markiert werden. Der Wagen muss dafür – und auch bei den nachfolgenden Messungen – sehr gerade und daher sorgfältig mitten in die Bahn gestellt werden. Sonst kommt es zu Kollisionen mit der Bahnbegrenzung, die die Geschwindigkeit reduzieren. Bedingt dadurch stürzt der Wagen auch bei eigentlich korrekter gewählter Starthöhe im Looping ab, was häufig dazu führt, dass die Bahn vom Kraftsensor abrutscht. Nach der Wiederauflage ist meistens ein erneuter Nullpunktgleich (Kompensation der Gewichtskraft des Loopings) erforderlich.

Abbildung 5 zeigt ein Beispiel für eine Messung des zeitlichen Kraftverlaufs während einer Loopingfahrt (Messintervall  $\Delta t = 0.01$  s), aufgenommen mit dem TI-Voyage 200 mit CBL2 und dem zugehörigen Dual-Range Force-Sensor (Messbereich 10 N). Die Messkurve zeigt zwei ausgeprägte Kraftspitzen, die – wie erwartet – jeweils beim Durchfahren des niedrigsten Bahnpunktes entstehen. Im oberen Loopingpunkt wird natürlich keine Kraft auf den Sensor ausgeübt. Die leichten Schwankungen um die Nulllinie entstehen durch die Bahnschwankungen beim Durchfahren des Loopings. Die Kraftspitze bei der Einfahrt ins Looping wurde mit dem Cursor markiert, sodass der Kraftwert (hier: 2.38 N) vom System angezeigt wird. Die bei der Ausfahrt aus dem Looping ausgeübte Kraft ist geringer als die bei der Einfahrt. Das hängt mit Rei-

bungsverlusten zusammen; die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und damit die Zentripetalkraft nehmen mit der Länge der Fahrstrecke natürlich ab. Das negative Vorzeichen der gemessenen Kraft ist im System begründet: wird, wie bei dieser Messung, auf den Sensor gedrückt, so wird die Kraft grundsätzlich negativ angezeigt. Zug erzeugt hingegen positive Kraftwerte.

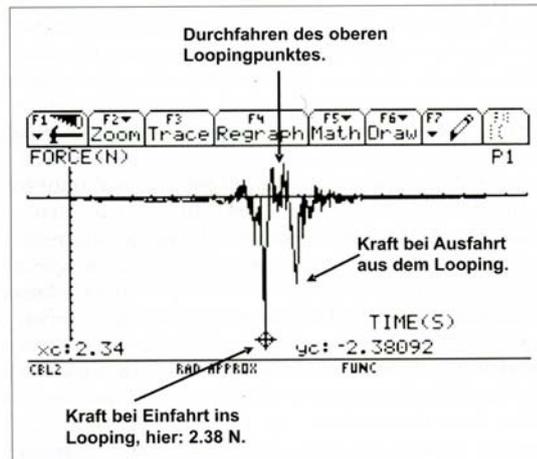


Abb. 5. Kraftmessung bei der Loopingfahrt, Hard-Copy vom Rechnerdisplay.

In Tabelle 1 ist das Ergebnis von mehr als 20 Messungen der Bahnkraft bei Einfahrt ins Looping und der Geschwindigkeiten bei der Einfahrt und im höchsten Punkt des Loopings zusammengefasst. Angegeben sind die Mittelwerte und deren mittlerer Fehler. Die gemessenen Werte stimmen sehr gut mit den Berechnungen der Gleichungen (2), (3) und (5) überein (Loopingradius  $r = 0.112$  m), sind aber – wie zu erwarten – etwas größer als die berechneten. Das hängt damit zusammen, dass in der Rechnung keine Reibung berücksichtigt wurde. Tatsächlich müssen die Geschwindigkeiten natürlich im Experiment etwas größer als die berechneten Minimalwerte gewählt werden, um die reibungsbedingten Verluste beim Durchfahren des Loopings auszugleichen. Entsprechend ist natürlich die Zentripetalkraft und damit auch die Bahnkraft bei Einfahrt ins Looping größer.

|          | Messung             | »Theorie«       |
|----------|---------------------|-----------------|
| $F_B(0)$ | $2.01 \pm 0.1$ N    | $\geq 1.92$ N   |
| $v(0)$   | $2.37 \pm 0.01$ m/s | $\geq 2.34$ m/s |
| $v(2r)$  | $1.09 \pm 0.02$ m/s | $\geq 1.05$ m/s |

Tab. 1. Vergleich von gemessenen und berechneten Werten.  
 $F_B(0)$ : Bahnkraft bei Einfahrt ins Looping (vgl. Gl. 5)  
 $v(0)$ : Geschwindigkeit bei Einfahrt ins Looping (vgl. Gl. 3)  
 $v(2r)$ : Geschwindigkeit im oberen Loopingpunkt (vgl. Gl. 2).

Während die der Geschwindigkeitsbestimmung zugrunde liegende Messung der Durchfahrtszeit durch die Lichtschrankenpaare kaum schwankt, sind die Messungen der Bahnkraft deutlich größeren Schwankungen unterworfen. Das hängt wahrscheinlich mit der mechanischen Instabilität des nur lose auf dem Kraftmesser aufliegenden Loopings und einem Verutschen während der Durchfahrt zusammen. Es sollte daher auch im Unterricht immer eine Messreihe aufgenommen werden. Beim Durchfahren des Loopings treten hin und wieder Messungen auf, bei denen die bei der Ausfahrt aus dem Looping gemessene Kraft größer als die bei der Einfahrt gemessene ist. Die genaue Beobachtung hat zeigt, dass dieses Phänomen auftritt, wenn das Looping nicht sauber durchfahren wurde und der Wagen (und sei es nur auf den letzten Zentimetern) den Kontakt zur Bahn verloren hat. Er fällt dann bei der Ausfahrt praktisch auf den Kraftsensor. Dabei gerät er häufig nicht aus der Spur, sondern kann seine Fahrt auf der folgenden geraden Strecke fortsetzen. Alle Messwerte solcher Fahrten, die entstehen, wenn der Wagen während der Fahrt die Fahrbahnbegrenzung berührt hat, sollten keine Berücksichtigung bei der Mittelwertbildung finden.

#### Literatur

- [1] R. GAITZSCH et al.: HAMMER · KNAUTH · KÜHNEL, Physik Jahrgangsstufe 11, Mechanik Fundamentum. – München: Oldenbourg 1996
- [2] J. GREHN – J. KRAUSE: Metzler Physik. – Hannover: Schroedel 2005
- [3] [http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web\\_ph11/schulaufgaben/2sa\\_00hell/2sahell.htm](http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web_ph11/schulaufgaben/2sa_00hell/2sahell.htm) (7.2.07)
- [4] J. BECKER – M. HEGNER: Eine Spielzeugautobahn (Darda-Bahn) im Physikunterricht. – In: W. B. SCHNEIDER (Hg): Wege in der Physikdidaktik 1991, Nr. 2, 15–29
- [5] J. BECKER: Spielzeug im Physikunterricht: – Physik in der Schule (1996) Nr. 34, 298–300, 317–318
- [6] E. CAVELIUS: Experimente zur Energieerhaltung und Zentripetalkraft an einer einfachen Fahrbahn: – Praxis der Naturwissenschaften Physik (1979) Nr. 10, 258–260
- [7] <http://sinus.lernnetz.de/aufgaben/index.htm?group=1&ugroup=1> (7.2.07)

Prof. Dr. BÄRBEL FROMME, [bfromme@physik.uni-bielefeld.de](mailto:bfromme@physik.uni-bielefeld.de), arbeitet an der Universität Bielefeld im Bereich »Physik und ihre Didaktik«.

Dr. MICHAELA SCHULZ, [mschulz@physik.uni-bielefeld.de](mailto:mschulz@physik.uni-bielefeld.de), ist als akademische Rätin an der Universität Bielefeld im Bereich »Physik und ihre Didaktik« beschäftigt.