

## Das GPS-System

Eine theoretische Annäherung und Ansätze zur Anwendung  
im Physikunterricht

Abschlussarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Master of  
Education (M.Ed.)

vorgelegt von

Carina Homrighausen

Matrikelnr.: 1652277

Weibeweg 2, 57258 Freudenberg

27. Oktober 2008

Betreuer:

Frau Prof. Dr. B. Fromme

Frau Dr. M. Schulz

Universität Bielefeld

Fakultät für Physik

Fachbereich Physik und ihre Didaktik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die satellitengestützte Navigation</b>	<b>4</b>
1.1	Navigation . . . . .	4
1.2	Satellitengestützte Ortungssysteme . . . . .	6
1.2.1	Positionsbestimmung . . . . .	7
1.3	Referenzsysteme . . . . .	12
1.3.1	Modelle der Erdform . . . . .	12
1.3.2	Koordinatensysteme . . . . .	15
1.3.3	Höhenbestimmung . . . . .	19
1.3.4	Zusammenfassung . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Das NAVSTAR-GPS als ein System satellitengestützter Ortung</b>	<b>22</b>
2.1	Historische Entwicklung . . . . .	23
2.2	Positionsbestimmung mit GPS . . . . .	24
2.2.1	Geschwindigkeitsbestimmung mit GPS . . . . .	25
2.2.2	Zeit und GPS . . . . .	27
2.2.3	Zusammenfassung . . . . .	29
2.3	Aufbau des GPS-Systems . . . . .	29
2.3.1	Das Weltraumsegment . . . . .	29
2.3.2	Das Kontrollsegment . . . . .	34
2.3.3	Das Benutzersegment . . . . .	35
2.3.4	Zusammenfassung . . . . .	36
2.4	Charakteristik der Signale . . . . .	37
2.4.1	Allgemeines über elektromagnetische Wellen . . . . .	37
2.4.2	Signalstrukturen . . . . .	46

2.4.3	Auswertung der Signale . . . . .	50
2.4.4	Zusammenfassung . . . . .	54
2.5	Fehlerquellen bei GPS . . . . .	55
2.5.1	Satellitenfehler . . . . .	55
2.5.2	Signalausbreitungsfehler . . . . .	56
2.5.3	Empfängerfehler . . . . .	57
2.5.4	Gesamtüberblick . . . . .	57
2.5.5	Erhöhte Genauigkeit durch DGPS . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Die Nutzung des GPS im Physikunterricht des Gymnasiums</b>	<b>61</b>
3.1	Gründe für den Einsatz des GPS in der Schule . . . . .	61
3.2	Allgemeine Grundlagen . . . . .	64
3.2.1	Das GPS-Empfangsgerät . . . . .	64
3.2.2	Übertragung und Auswertung der Daten . . . . .	65
3.3	Die Projekte . . . . .	67
3.3.1	Projekt I: Gleichmäßige Bewegung . . . . .	68
3.3.2	Projekt II: Bewegungsdiagramme . . . . .	73
3.3.3	Projekt III: Energieumsatz beim Fahrradfahren . . . . .	79
3.4	Abschlussbetrachtungen . . . . .	92

# Vorwort

Das Navigationsgerät im Auto, beim Fahrradfahren und beim Wandern, Geocaching als Freizeitbeschäftigung - die Nutzung satellitengestützter Navigation ist schon längst in unserem Alltag angekommen. Wie das komplexe Navigationssystem, auf das wir uns vielerorts verlassen, funktioniert, ist den meisten jedoch wahrscheinlich nicht bekannt. Aus dem persönlichen Interesse heraus, das GPS-System besser kennen zu lernen, ist diese Arbeit entstanden.

Ich habe mich dabei für eine Betrachtung von zwei verschiedenen Seiten entschieden. In den ersten beiden Kapiteln erfolgt eine theoretische Annäherung an das Thema. Dabei wird die Funktionsweise der Navigation mit GPS so erklärt, dass der physikalisch unwissende Leser die Grundzüge des Systems versteht und der physikalisch versierte einige Vertiefungen zu interessanten Sachverhalten wieder findet.

Als angehende Physiklehrerin war als zweiter Aspekt für mich die Nutzung des GPS-Systems für den Physikunterricht besonders interessant. Ausgehend von den theoretischen Betrachtungen erfolgt in Kapitel 3 die Beschäftigung mit der Idee, ob und wie man das System theoretisch und praktisch im Unterricht nutzen kann. Die Versuche, die dabei entstanden sind, sollen vor allem die vielfältigen Möglichkeiten aufzeigen, die das System bietet.

Alles in allem soll die Arbeit eine Informationsmöglichkeit über das GPS-System bieten und, vor allem für Lehrerinnen und Lehrer, sowohl eine theoretische Beschäftigung mit dem Thema ermöglichen als auch praktische Ideen und Tipps für den Einsatz im Unterricht geben.

# Kapitel 1

## Einführung in die satellitengestützte Navigation

Um die Bedeutung des GPS-Systems für die Navigation zu verdeutlichen, erfolgt im ersten Kapitel eine Einführung in das Thema, in der ein historischer Überblick über Navigation im Allgemeinen gegeben wird und die Grundlagen der Positionsbestimmung mit Satelliten erläutert werden. Im Zuge dessen wird auf mögliche zugrundeliegende Referenzsysteme eingegangen, mit deren Hilfe Positionen auf und über der Erdoberfläche angegeben werden können. Die genaue Funktionsweise der Positionsbestimmung wird dann im zweiten Kapitel anhand des GPS-Systems dargestellt und erläutert.

### 1.1 Navigation

*Einfach ist die Fahrt, so lange man weiß, wo man ist und wohin es gehen soll, doch gerät das Land außer Sicht, sind die Antworten auf die beiden Fragen **wo bin ich** und **wo muss ich hin** von entscheidender Bedeutung.*

[3]

Ortung und Navigation spielen in der Geschichte der Menschheit eine bedeutende Rolle und gewannen mit der aufkommenden Technik und der Weiterentwicklung von Fahrzeugen immer mehr an Bedeutung. *Ortung* meint dabei die ‘Feststellung der geographischen Länge und Breite eines Ortes auf der Erdoberfläche mit Hilfe von Gestirnen oder durch Funkortung’ [6, S.239], *Navigation* die ‘Aufgabe und [den] Vorgang, ein Fahrzeug auf einem vorbestimmten Weg von einem Ausgangsort (Start) zu einem Ziel zu steuern’ [6, S.329].

Entwickelt wurde die Kunst der Navigation im Altertum vor etwa 6000 Jahren in

Indien und zeitgleich auch in Ägypten und dem Libanon, wobei zum Navigieren von Schiffen in Küstengewässern Landmarken und das Lot benutzt wurden [6, S.329]. Ohne weitere Hilfsmittel war die Navigation in der folgenden Zeit auf Naturbeobachtungen gestützt. So nutzten die Wikinger ab dem 7. Jahrhundert die Betrachtung von Wolken, Vögeln, Wellen und Gestirnen, um mit ihren Schiffen das gewünschte Ziel zu erreichen [3].

Der zu Beginn des 12. Jahrhunderts [3] entwickelte Kompass stellte dann eines der ersten technischen Hilfsmittel dar. Weitere Messgeräte wurden in Folge der ersten Anwendungen der astronomischen Navigation im 15. Jahrhundert entwickelt. Zu dieser Zeit wurde aus der Beobachtung der Höhe des Nordsterns die geographische Breite ermittelt, da der Höhenwinkel des Polarsterns über dem Horizont relativ genau den geographischen Breitengrad angibt [5, S.9].

Das erste Messgerät zur Bestimmung dieses Winkels war das von den Arabern entwickelte Astrolabium [3]. Später kam der Jakobsstab hinzu, welcher jedoch das Problem mit sich brachte, dass bei einer Messung genau in die Sonne gesehen werden musste [3]. Präzise Messungen erfolgten erst nachdem Headley, Godtray und Newton im Jahre 1731 den Sextanten entwickelt hatten [5, S.9].

Die üblichen Navigationsverfahren ab dem 15. Jahrhundert beruhten auf dem Grundprinzip [5, S.9], ‘dass ein Gestirn überall auf einem Kreis um seinen Fußpunkt die gleiche Höhe hat. Der Fußpunkt ist der Ort auf der Erde, wo das Gestirn im Zenit steht, er wird in der astronomischen Navigation als Bildpunkt bezeichnet.’ Zusätzlich zu dem Höhenwinkel des Nordsterns wurde die Mittagshöhe der Sonne sowie bei Bedarf die Höhe eines weiteren Gestirns vermessen. Der geographische Breitengrad ergibt sich dann als Schnittpunkt der Kreise um die jeweiligen Fußpunkte [5, S.9].

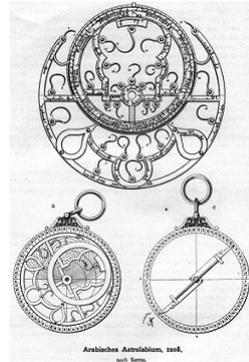


Abbildung 1.1: Das Astrolabium



Abbildung 1.2: Der Jakobsstab

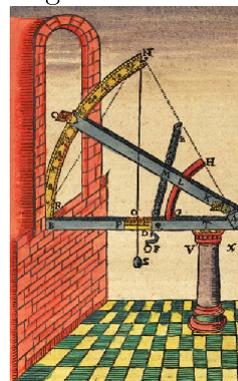


Abbildung 1.3: Der Sextant

Ein großes Problem stellte zu dieser Zeit die Bestimmung des Längengrads dar. Für sie waren sehr genaue Zeitangaben notwendig, die erst 1737 mit dem von John Harrison erfundenen Chronometer gemacht werden konnten. Ab diesem Zeitpunkt war es möglich, durch die Kombination von Sextant und Chronometer mit trigonometrischen Berechnungen Standorte genau zu bestimmen.

Seit 1875 wird dazu das Näherungsverfahren nach Admiral Marq Blond de St. Hilaire verwendet [5, S.9]. Bei diesem Verfahren wird von einem angenommenen Standort (Koppelort) aus die Höhe der beobachtbaren Gestirne bestimmt, wobei der Beobachtungszeitraum auf die Sekunde genau bekannt sein sollte. Die Positionen der Beobachtungsobjekte, Ephemeride genannt, werden dabei mit dem Nautischen Jahrbuch oder einem Rechner bestimmt. Der Vergleich der so berechneten Höhe mit der beobachteten liefert letztlich die Abweichung vom Koppelort. Da dieses Verfahren sehr schwierig und fehleranfällig ist, wurde der Ruf nach besseren Verfahren mit der Zeit immer größer.

*Gerade die Wetterabhängigkeit der astronomischen Navigation verlangte nach Positionsbestimmungen, die mit Radiowellen von der Sicht unabhängig sind. Diese Verfahren waren anfangs auf Küstenbereiche beschränkt, so dass die Idee nahe lag, künstliche Erdtrabanten als Navigationsgestirne zu verwenden. [5, S.10]*

## 1.2 Satellitengestützte Ortungssysteme

In der Mitte des 20. Jahrhunderts war die Erdvermessung und Navigation an einen Punkt gelangt, an dem vor allem im wissenschaftlich orientierten Bereich die bis dahin bekannten Techniken nicht mehr ausreichten, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Zudem kam von Seiten des Militärs der Wunsch nach einem Verfahren, mit dem Positionen weltweit so genau wie möglich bestimmt werden konnten [2, S.40f]. Zusammen führte dies zur Entwicklung des ersten satellitengestützten Ortungssystems TRANSIT, welches 1964 von der US-amerikanischen Marine in Betrieb genommen wurde. Das System wies allerdings an vielen Stellen Mängel auf, so dass eine ständige 3-dimensionale Ortung, vor allem von Nutzern in Bewegung, nicht möglich war. Kurze Zeit später wurden verschiedene Varianten von TRANSIT entwickelt. Bei dem Projekt TIMATION wurde besonderer Wert auf eine präzise Zeitübertragung gelegt, das System 621B zeichnete sich vor allem durch eine bessere dreidimensionale Ortung aus [1, S.2].

Um die Vorteile aller Systeme zusammenzufassen, wurde als verbessertes System das

heute als GPS bekannte NAVSTAR-GPS<sup>1</sup> entwickelt, welches momentan das einzige voll funktionsfähige satellitengestützte Ortungssystem darstellt [2, S.151-152]. Auf die Entstehung des GPS wird in Abschnitt 2.1 genauer eingegangen. Weitere Systeme sind das im Jahr 1982 von der Sowjetunion aufgebaute GLONASS sowie das sich noch im Aufbau befindliche GALILEO der EU.

Alle satellitengestützten Ortungssysteme beruhen auf dem gleichen Funktionsprinzip. Mehrere Satelliten umkreisen die Erde auf verschiedenen Orbits, wobei ihre Position jederzeit bekannt ist. Dabei senden sie in regelmäßigen Abständen Signale in Form elektromagnetischer Wellen aus, die dann von einem Nutzer zur Positionsbestimmung verwendet werden können. Im nachfolgenden Abschnitt wird erläutert, wie aus den empfangenen Signalen die Position bestimmt werden kann.

### 1.2.1 Positionsbestimmung

Die Positionsbestimmung mit satellitengestützten Ortungssystemen beruht auf dem Prinzip der Laufzeitmessung. Dieses beinhaltet die Messung der Zeit  $t$ , die ein Signal, das von einem Sender an einem bekannten Ort ausgesendet wird, benötigt, um zum Empfänger zu gelangen. Die Multiplikation dieser Zeit mit der Geschwindigkeit  $v$  des Signals liefert gemäß der Gleichung

$$s = v \cdot t \tag{1.1}$$

die Entfernung  $s$  des Empfängers (Benutzers) vom Sender. Um die genaue Position des Benutzers zu bestimmen, müssen Laufzeitmessungen von Signalen mehrerer Sender durchgeführt werden.

Das Prinzip der Laufzeitmessung wird nun an einem einfachen Beispiel einer 2D-Positionsbestimmung veranschaulicht, welches in [1, S.15-19] aufgeführt ist. Dazu wird ein Schiff betrachtet, das vor Anker liegt und dessen Kapitän seine Position bestimmen will. Das Schiff befindet sich in Hörweite von drei Nebelhörnern, die jeweils zur vollen Minute ein für sie spezifisches Tonsignal aussenden. Der Kapitän kennt die Standorte der Nebelhörner sowie die Zeitpunkte, an denen die Signale ausgesendet werden. Es wird hierbei angenommen, dass die Uhren in den Nebelhörnern und die Uhr des Kapitäns genau synchronisiert sind und dieselbe Zeit anzeigen. Bestimmt der Kapitän den Zeitpunkt, an dem er das Signal des ersten Nebelhorns hören kann, so gibt die von diesem Zeitpunkt an verstrichene Zeit die Signallaufzeit  $t_1$  an. Da sich das Tonsignal mit der Schallgeschwindigkeit  $c = 343 \frac{m}{s}$  fortbewegt, kann der Kapitän nun mittels

---

<sup>1</sup>NAVigation Satellite Timing and Ranging - Global Positioning System

$$R1 = c \cdot t_1 \quad (1.2)$$

seine Entfernung von diesem Nebelhorn bestimmen. Er weiß dann, dass sich sein Schiff auf einem Kreis des Radius  $R1$  um das erste Nebelhorn befindet.

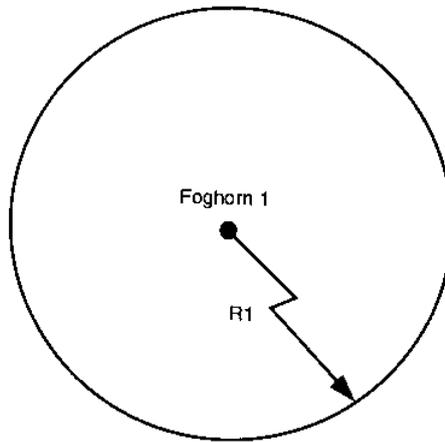


Abbildung 1.4: Entfernungsbestimmung bei einer Signalquelle

Empfängt der Kapitän auf die gleiche Art und Weise den Signalton eines zweiten Nebelhorns, so kann aus der Signallaufzeit  $t_2$  auch die Entfernung  $R2$  von diesem Nebelhorn bestimmt werden. Aus Abbildung 1.5 wird ersichtlich, dass sich das Schiff nun entweder an Position A oder Position B befinden könnte.

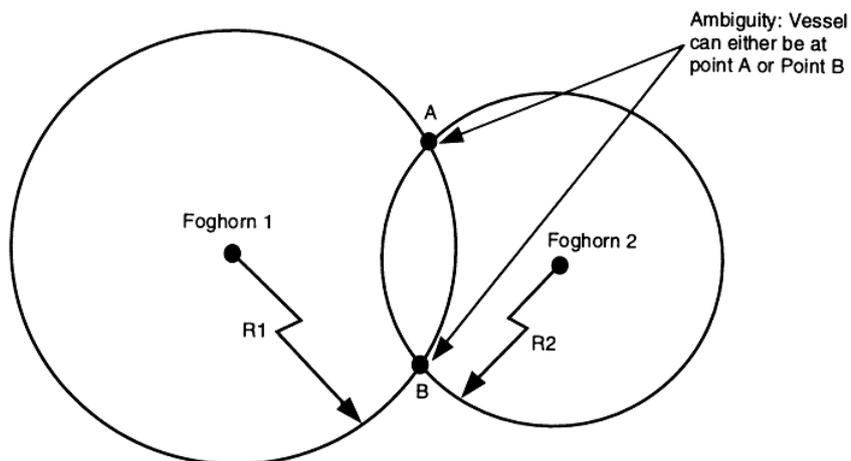


Abbildung 1.5: Entfernungsbestimmung bei zwei Signalquellen

Weiß der Kapitän, wo sich sein Schiff ungefähr befindet, so kann er einen der beiden Standorte ausschließen und mit zwei Laufzeitmessungen seine Position genau bestimmen. Ist dies nicht der Fall, so muss die Entfernung  $R_3$  zu einem dritten Nebelhorn bestimmt werden, wodurch sich folgende Situation ergibt.

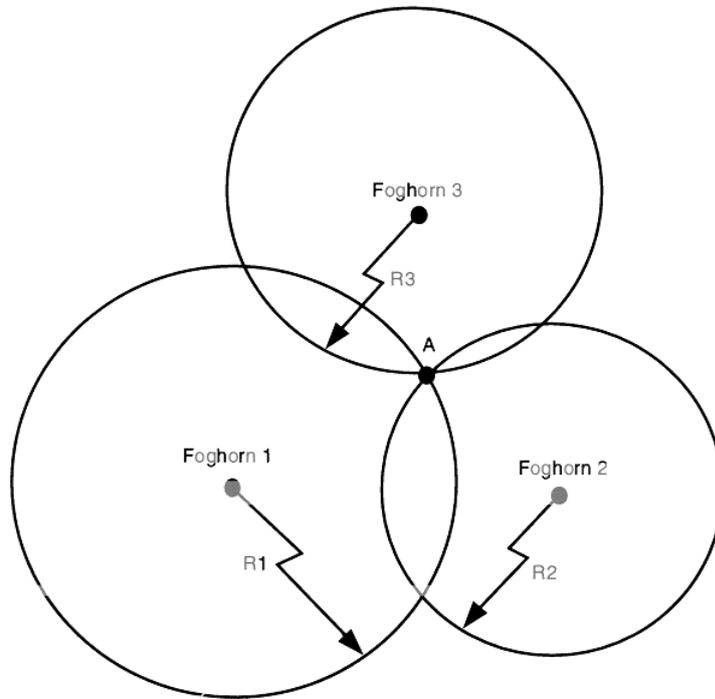


Abbildung 1.6: Entfernungsbestimmung bei drei Signalquellen

Durch Hinzunehmen eines dritten Signals kann also die Ambiguität bei der Positionsbestimmung verhindert werden.

Die vorhergehenden Betrachtungen erfolgten unter der Voraussetzung, dass alle Uhren genau synchronisiert sind. Da dies meistens nicht der Fall ist, wird nun der Einfluss von Zeitverschiebungen auf die Positionsbestimmung untersucht. Dazu wird angenommen, dass die drei Nebelhörner eine gemeinsame Zeitbasis haben und die Uhr des Kapitäns von dieser um das Zeitintervall  $\delta t$  abweicht. Der Kapitän misst nun die Laufzeit  $t_1 + \delta t$  des Tonsignals vom ersten Nebelhorn, obwohl die tatsächliche Laufzeit des Signals  $t_1$  beträgt. Mit Formel (1.1) bestimmt der Kapitän

$$s_1 = c \cdot (t_1 + \delta t) = \underbrace{c \cdot t_1}_{=R_1} + \underbrace{c \cdot \delta t}_{:=\epsilon} \quad (1.3)$$

als Entfernung vom ersten Nebelhorn, die um  $\epsilon$  von der tatsächlichen Entfernung abweicht. Da die Abweichung von allen Uhren der Nebelhörner gleich ist, ergibt sich

auch für die Messung der Entfernungen von den anderen Nebelhörnern ein Fehler der Größe  $\epsilon$ . Die sich daraus ergebende Positionsbestimmung ist in Abbildung 1.7 dargestellt. Aus der Sicht des Kapitäns kann sich das Schiff irgendwo in der durch die Punkte C, D und E festgelegten Fläche um die tatsächliche Position A befinden. Da der Fehler  $\epsilon$  in den Entfernungen nur von  $\delta t$  abhängig ist, kann die Position genau bestimmt werden, sobald der Kapitän weiß, um wie viel seine Uhr von der Zeitbasis abweicht.

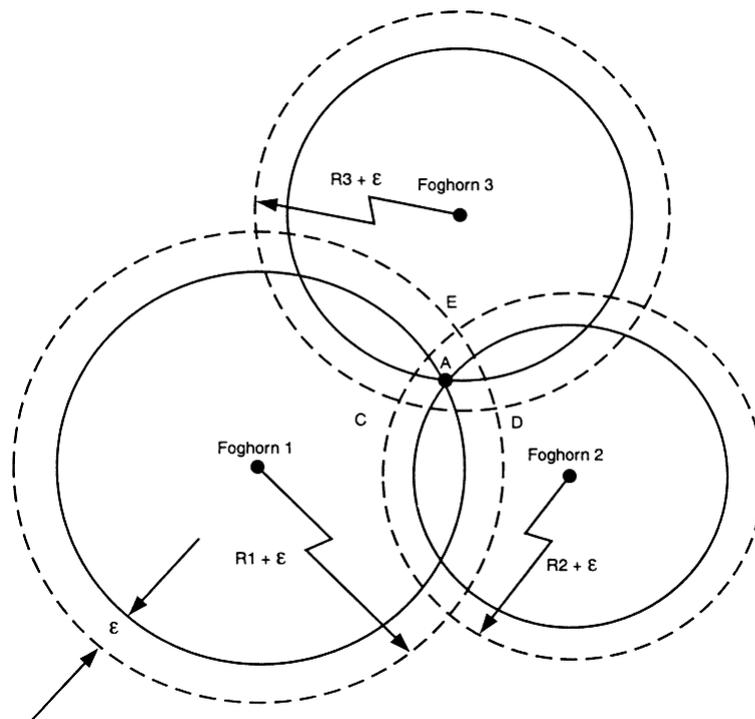


Abbildung 1.7: Einfluss von Zeitverschiebungen auf die Positionsbestimmung

Das Beispiel dient dazu, die Grundidee der auf Laufzeitmessungen basierenden Positionsbestimmung zu verdeutlichen. Überträgt man diese Grundidee auf die satellitengestützten Ortungssysteme, so nehmen die Satelliten die Position der Nebelhörner ein. Sie senden von bekannten Positionen aus zu bestimmten Zeiten Signale in Form von elektromagnetischen Wellen aus. Der Empfänger bestimmt die Laufzeit des Signals und erhält durch Multiplikation mit dessen Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit, seinen Abstand zum Satelliten.

Da die Positionsbestimmung im Raum, also 3-dimensional, erfolgt, kann sich der Benutzer auf der Oberfläche einer Kugel um den jeweiligen Satelliten befinden.



Abbildung 1.8: 3-D-Positionsbestimmung bei einer Signalquelle

Werden Laufzeitmessungen zu drei Satelliten durchgeführt, so ergeben sich als Schnittpunkte der drei Kugeloberflächen zwei mögliche Standorte des Benutzers.

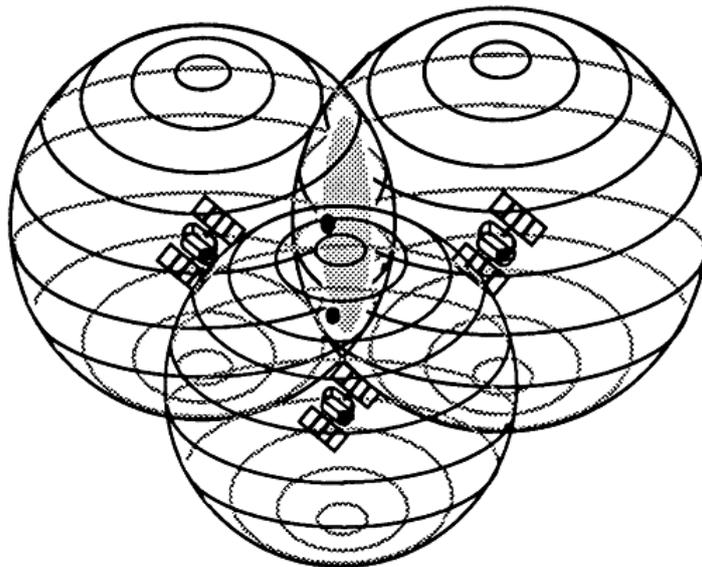


Abbildung 1.9: 3-D-Positionsbestimmung bei drei Signalquellen

Befindet sich der Benutzer auf der Erdoberfläche, so kann der höhere Punkt ausgeschlossen und der Standort somit eindeutig bestimmt werden.

In der Realität ist die Funktionsweise satellitengestützter Ortungssysteme durch verschiedenste Faktoren beeinflusst, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit nach und nach eingegangen wird. Ein sehr wichtiger Punkt ist, dass bei der Ortung mit Satelliten die Position im Raum, also 3-dimensional, bestimmt werden muss. Um diese

dann weltweit genau angeben zu können, benötigt man ein Bezugssystem, in dem die Position mit Koordinaten festgelegt werden kann.

## 1.3 Referenzsysteme

Schon seit mehreren Jahrhunderten werden Koordinatensysteme verwendet, um Positionen auf der Erdoberfläche anzugeben. Auch heute gibt es diverse Möglichkeiten, Positionsangaben auf der Erde durch Koordinaten auszudrücken, wobei das am meisten verwendete System das geographische Gitter ist, welches Breitengrade und Längengrade verwendet. Die Frage nach der Auswahl eines Koordinatensystems ist eng verknüpft mit der Frage nach der Form der Erde, die zur genauen Angabe einer Position möglichst genau bestimmt werden sollte. Im Folgenden werden verschiedene Modelle der Erde vorgestellt, auf denen die in Abschnitt 1.3.2 beschriebenen Koordinatensysteme aufbauen.

### 1.3.1 Modelle der Erdform

Bei der Betrachtung eines Globus der Erde fällt auf, dass diese dort dem Wortstamm<sup>2</sup> nach als *Kugel* dargestellt wird. Die Idee einer Kugelgestalt der Erde stammt aus dem Altertum [7] und wird auch heute noch bei vielen vereinfachten Berechnungen verwendet. Vor allem für Karten mit kleinem Maßstab ist es ausreichend, die Erde als vollkommene Kugel mit einem Radius von 6370 km zu modellieren.



Abbildung 1.10: Erdkugel

Durch Berechnungen von Isaac Newton<sup>3</sup> wurde später bekannt, dass die Erde aufgrund ihrer Rotation und ihres Gravitationsfelds am Äquator etwas aufgewölbt und

---

<sup>2</sup>lat. *globus*: Kugel

<sup>3</sup>Isaac Newton: 1643-1727

an den Polen leicht abgeplattet ist. Bei der so bestimmten Form der Erde handelt es sich um ein *Rotationsellipsoid*, welches sich besser als Grundlage für die Erstellung großmaßstäblicher Karten eignet als die Kugelform [7]. Ein Rotationsellipsoid kann mathematisch durch die Angabe der beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  beschrieben werden, die im Fall der Erde als äquatorialer Radius und polarer Radius bezeichnet werden [12].

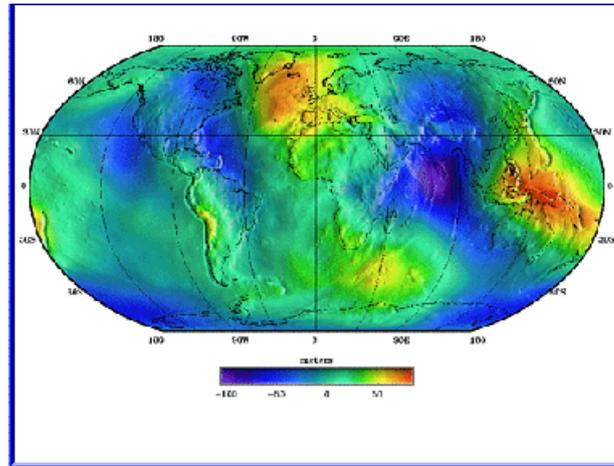


Abbildung 1.11: Rotationsellipsoidmodell der Erde

Dass auch das Rotationsellipsoid nur eine Annäherung der wirklichen Form der Erde darstellt, erkannte Carl Friedrich Gauß<sup>4</sup> zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Wegen der ungleichmäßigen Masseverteilung innerhalb der Erde kann es sich nicht um einen regelmäßigen Körper handeln [7]. Als besseres Modell führte Gauß das Geoid als Modell der Erde ein, welches er über die Äquipotentialflächen des Erdschwerefeldes definierte [4, S. 68].

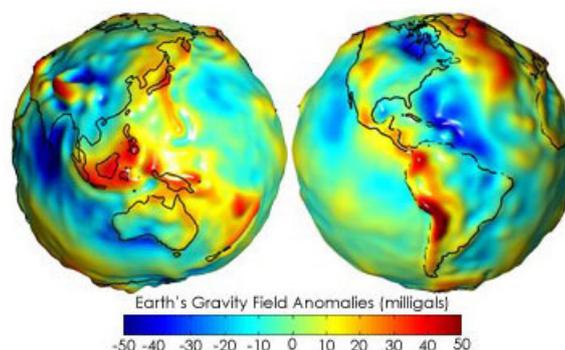


Abbildung 1.12: Geoidmodell der Erde

---

<sup>4</sup>C.F.Gauß: 1777-1855

Allgemein bezeichnet der Begriff *Äquipotentialfläche* eine Fläche, in der die potentielle Energie überall gleich ist [9, S.731]. Bezüglich der Erde werden als Äquipotentialflächen<sup>5</sup> die Flächen konstanten Schwerepotentials bezeichnet [4, S. 52]. Zur Erinnerung sei hier angemerkt, dass sich das Schwerepotential der Erde aus dem Gravitationspotential und einem aus der Rotation der Erde resultierenden Zentrifugalpotential zusammensetzt [4, S. 51]. Bei Betrachtung des Schwerefeldes der Erde kann diese mit einer Zwiebel verglichen werden, wobei die einzelnen Zwiebelschalen durch die verschiedenen Flächen gegeben sind, in denen das Schwerepotential gleich groß ist. Als Oberfläche des Geoiden wurde diejenige Äquipotentialfläche ausgewählt, die am besten mit dem mittleren Meeresspiegel zusammenfällt. Aus den Eigenschaften des Erdschwerefeldes folgt dabei, dass das Geoid eine in sich geschlossene und stetige Fläche ist. Unter den Kontinenten verläuft die Geoidfläche teilweise im Inneren der Erde [4, S. 68]. Vereinfacht könnte man die Annäherung der Erdoberfläche durch das Geoid wie folgt darstellen.



Abbildung 1.13: Annäherung der Erdoberfläche durch den Geoiden

Obwohl der Geoid die Form der Erde genauer darstellt als die anderen Modelle, kann er als Grundlage für ein Koordinatensystem nicht genutzt werden. Seine mathematische Beschreibung ist aufgrund der vielen Unregelmäßigkeiten sehr schwierig. Allerdings wird er häufig für Höhenmessungen<sup>6</sup> verwendet. Als Grundlage für die Koordinatensysteme dient entweder das Kugel- oder das Rotationsellipsoidmodell der Erde. Bei den Ellipsoidmodellen haben sich im Laufe der Zeit mehrere Varianten durchgesetzt, die verschiedene Bereiche der Erde unterschiedlich genau darstellen.

<sup>5</sup>auch *Niveauflächen* oder *Geopotentialflächen*

<sup>6</sup>siehe Abschnitt 1.3.3

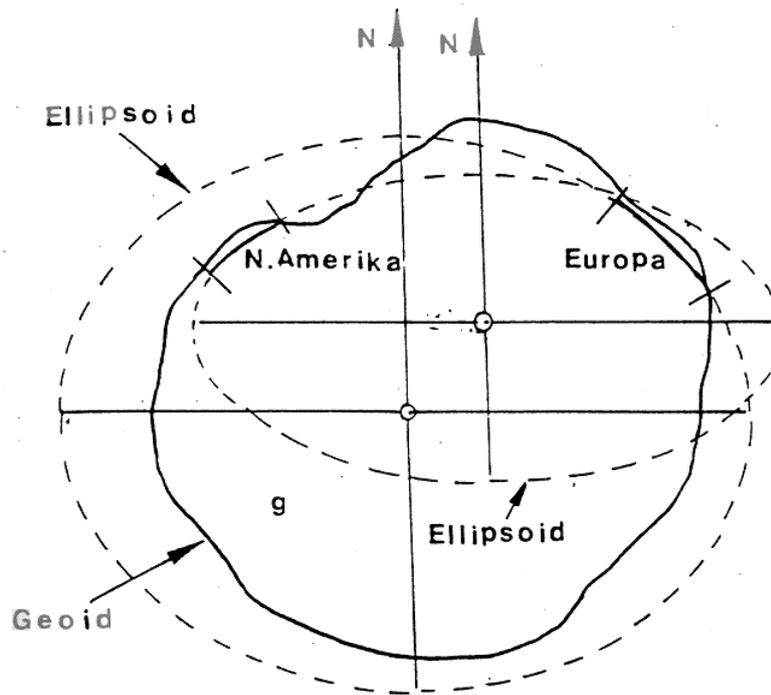


Abbildung 1.14: Lokal bestanschließende Ellipsoide

Verschiedene Länder oder Behörden verwenden je nach Anwendungsbereich das am besten geeignete Referenzellipsoid. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen sind gering, wie aus Tabelle 1.1 erkennbar ist [7]. Als Grundlage für das GPS setzt sich immer mehr das weltweit gültige Referenzellipsoid WGS-84 durch.

Besselscher Ellipsoid	Potsdam Datum	$a=6377,397 \text{ km}$	$b=6356,079 \text{ km}$
Internationaler Ellipsoid	ED50	$a=6378,388 \text{ km}$	$b=6356,912 \text{ km}$
European Terrestrial Reference System	ETRS89	$a=6378,137 \text{ km}$	$b=6356,752 \text{ km}$
World Geodetic System 1984	WGS84	$a=6378,137 \text{ km}$	$b=6356,752 \text{ km}$

Tabelle 1.1: Gegenüberstellung verschiedener Ellipsoidmodelle der Erde

### 1.3.2 Koordinatensysteme

Wie schon vorher erwähnt ist das bekannteste globale Koordinatensystem das *geographische Gitter*, welches Positionen auf der Erdoberfläche unter Angabe von Breiten- und Längengraden beschreibt. Ausgehend von dem Kugelmodell der Erde wird diese mit einem Netz von 360 Längengraden und 180 Breitengraden überzogen [11, S.2].

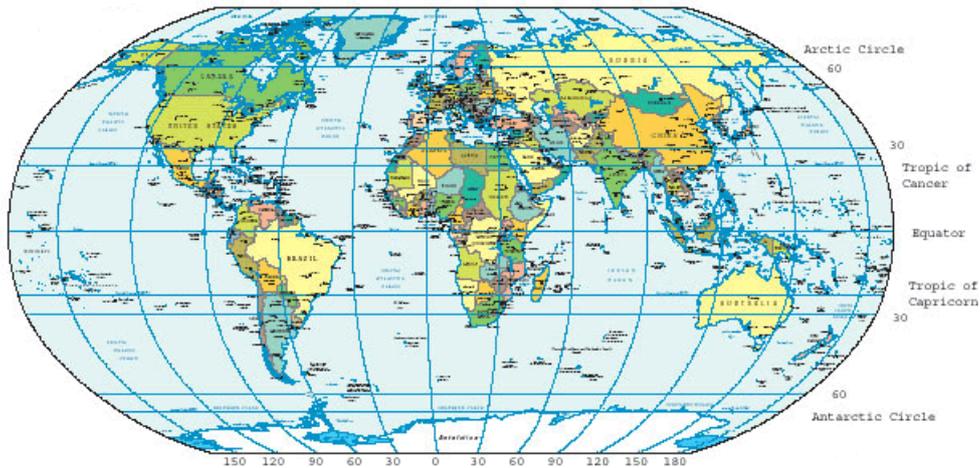


Abbildung 1.15: Das geographische Gitter

Als nullter Breitengrad ist der senkrecht zur Erdachse stehende Äquator definiert. Ausgehend von diesem sind dann die anderen Breitengrade in nördlicher und in südlicher Richtung äquidistant zueinander angeordnet. Seit 1883 ist der nullte Längengrad (Nullmeridian) so definiert, dass er durch die Sternwarte von Greenwich, England verläuft. Die weiteren Längengrade verlaufen ebenso wie die Breitengrade in gleichem Abstand zueinander [12]. Da der Abstand der einzelnen Grade für viele Positionsangaben zu ungenau ist, erfolgt eine Aufteilung des Grads ( $^{\circ}$ ) in 60 Bogenminuten ( $'$ ), welche wiederum aus 60 Bogensekunden ( $''$ ) bestehen. Da die Längengrade an Nord- und Südpol zusammenlaufen, ist der Abstand zweier Längengrade überall unterschiedlich. Dadurch ist die Unterteilung in Grad und Minuten für Entfernungsmessungen ungeeignet [11, S.2].

Bei dem im GPS-System verwendeten *UTM-Gitter* wird diese Schwäche umgangen. Ausgehend von einem Rotationsellipsoidmodell der Erde (meist WGS-84) wird die gesamte Erdoberfläche durch eine Einteilung in 60 Längen- und 20 Breitenstreifen in 1200 kleinere Abschnitte aufgeteilt. Die einzelnen  $6^{\circ}$  breiten Längestreifen werden mit der sogenannten Gauss-Krüger-Projektion so auf eine Ebene projiziert, dass ein Rechteck entsteht.

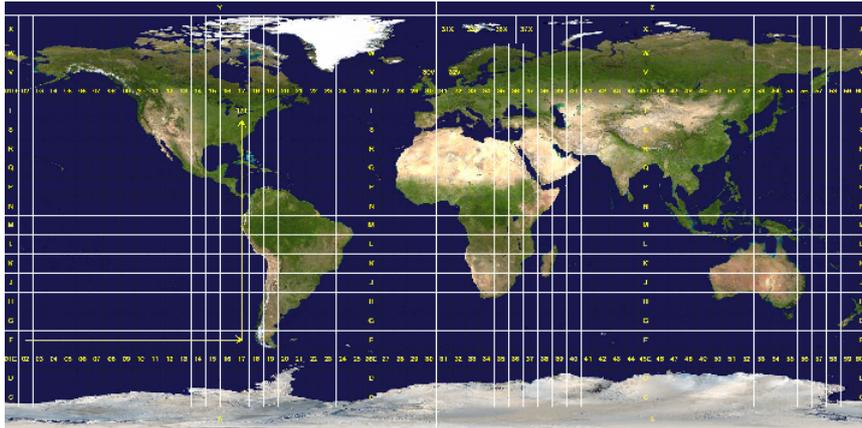


Abbildung 1.16: Überdeckung mit UTM-Zonen

Bei der Gauss-Krüger-Projektion wird ein elliptischer Zylinder derart um das Rotationsellipsoid gelegt, dass der Mittelmeridian<sup>7</sup> des ausgewählten Streifens den Zylinder durchgehend berührt. Der Streifen wird dann auf die Zylinderwand projiziert, durch deren Abwickeln er als ebenes Rechteck dargestellt wird [8, S.66f].

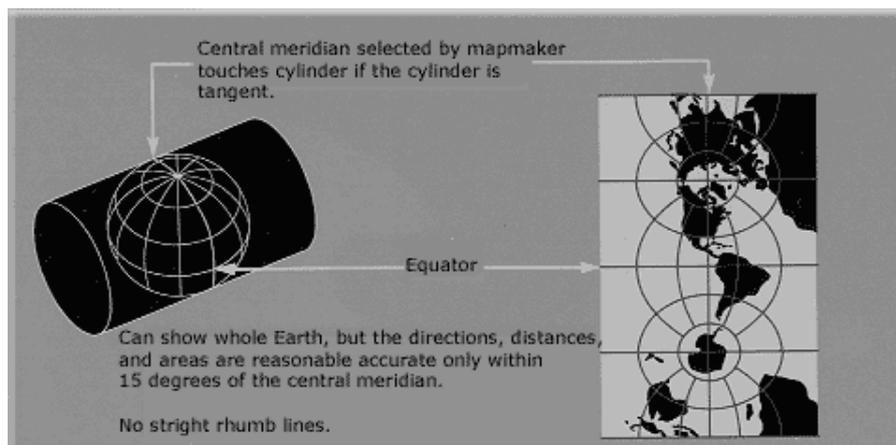


Abbildung 1.17: Gauss-Krüger-Projektion

Die bisher beschriebenen Koordinatensysteme sind fest an die Erdoberfläche gebunden, so dass sich mit ihnen nur Punkte auf dieser beschreiben lassen. Im Fall der satellitengestützten Ortungssysteme stellen die Satelliten wichtige Bezugspunkte zur Positionsbestimmung dar. Da sich diese in einem gewissen Abstand zur Erdoberfläche befinden, wird ein Koordinatensystem benötigt, das sowohl Punkte auf der Erdoberfläche als auch über dieser darstellen kann. Beim GPS wird dazu das ECEF-Koordinatensystem<sup>8</sup> verwendet, welches wie folgt [1, S.24] festgelegt ist:

<sup>7</sup>Längengrad, der genau in der Mitte des Streifens liegt

<sup>8</sup>Earth Centered Earth-Fixed Coordinate System

- Koordinatenursprung: Geozentrum<sup>9</sup>
- xy-Ebene: Äquatorebene
- positive x-Achse: schneidet den Nullmeridian
- positive y-Achse: schneidet den 90°E Längengrad
- z-Achse: verläuft senkrecht zur xy-Ebene in Richtung des geographischen Nordpols

Dieses Koordinatensystem ist rechtshändig und rotiert mit der Erde. Mit ECEF-Koordinaten können also alle Punkte auf der Erdoberfläche aber auch Positionen über dieser, zum Beispiel von Flugzeugen oder Satelliten, dargestellt werden.

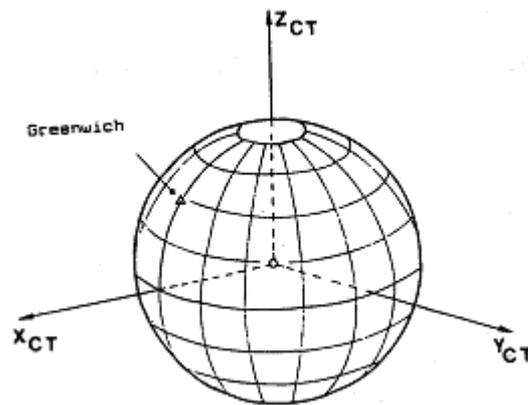


Abbildung 1.18: ECEF-Koordinatensystem

Für verschiedene Berechnungen ist es wichtig, dass es sich bei dem zugrunde liegenden Koordinatensystem um ein Inertialsystem handelt. Nach [13, S. 241] sind Inertialsysteme ‘[...] Bezugssysteme, die sich gegenüber dem System der fernen Galaxien nicht beschleunigt bewegen, sondern ruhen oder eine geradlinig konstante Geschwindigkeit besitzen.’

Das ECEF-Koordinatensystem ist durch Unregelmäßigkeiten in der Erdbewegung nicht inertial [1, S. 24]. Zum einen bewegt sich die Erde auf einer in etwa elliptischen Bahn um die Sonne. Die durch diese Abweichung von der Kreisbahn entstehenden Beschleunigungen sind jedoch so gering, dass sie vernachlässigt werden können. Nicht vernachlässigt werden kann die Präzessionsbewegung der Erde. Die Drehachse der Erde verläuft beim Umlauf der Erde um die Sonne auf einem Kegelmantel. Dadurch ist

---

<sup>9</sup>Massenmittelpunkt der Erde

die Drehachse der Erde, welche die z-Achse im ECEF-Koordinatensystem definiert, nicht mehr raumfest. Zur Definition eines raumfesten Inertialsystems wurde deshalb folgende Vereinbarung getroffen:

- Die z-Achse des ECEF-Koordinatensystems wird festgelegt durch die Lage der Erdachse am 01.01.2000.

In ECEF-Koordinaten berechnete Positionen auf der Erdoberfläche können in Koordinaten anderer Systeme umgerechnet werden.

### 1.3.3 Höhenbestimmung

Im Rahmen der Positionsbestimmung mit satellitengestützten Ortungssystemen wird man oft mit dem Problem der Höhenbestimmung konfrontiert. Da das Ellipsoid die gängige Grundlage für Referenzsysteme ist, scheint es zunächst sinnvoll, ellipsoidische Höhen wie folgt zu definieren.

- ‘Die *ellipsoidische Höhe* eines Punktes P ist gleich der Länge des Lotes vom Punkt P auf das Ellipsoid.’ [2, S.28]

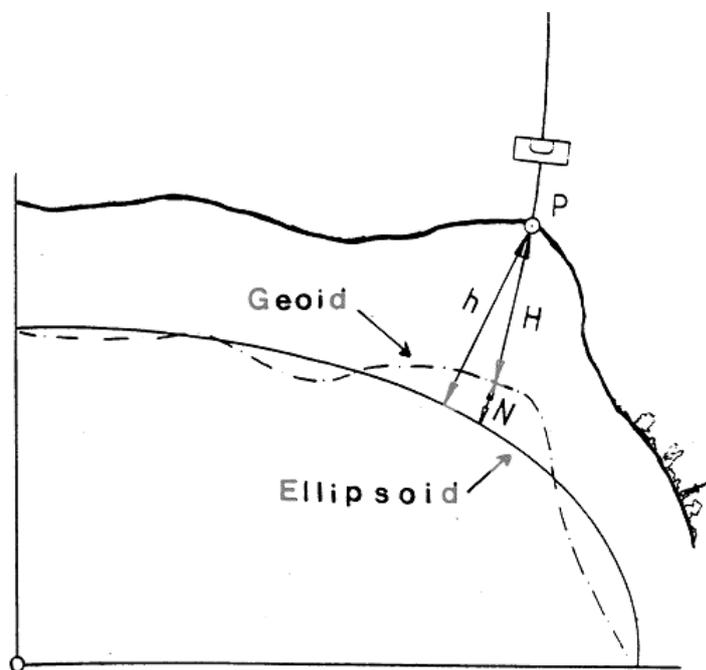


Abbildung 1.19: Ellipsoidische Höhe  $h$

Problematisch wird diese Definition bei der Vermessung von Wasseroberflächen. Bei einer ungestörten Wasseroberfläche sollten alle Punkte dieser die gleiche Höhe haben.

Wie in Abbildung 1.20 ersichtlich wird, erfüllen die ellipsoidischen Höhen  $h_A$  und  $h_B$  dieses Kriterium nicht. Da sich der Geoid der Definition nach an dem mittleren Meeresspiegel orientiert, liegt es nahe, diesen als Bezugsfläche für Höhenangaben zu nutzen. Die zugehörige Höhe wird als *orthometrische Höhe* bezeichnet:

- ‘Die orthometrische Höhe ist die Länge der Lotlinie vom Geländepunkt zum Geoid.’ [2, S.38]

In der Abbildung handelt es sich bei den Höhen  $H_A$  und  $H_B$  um orthometrische Höhen.

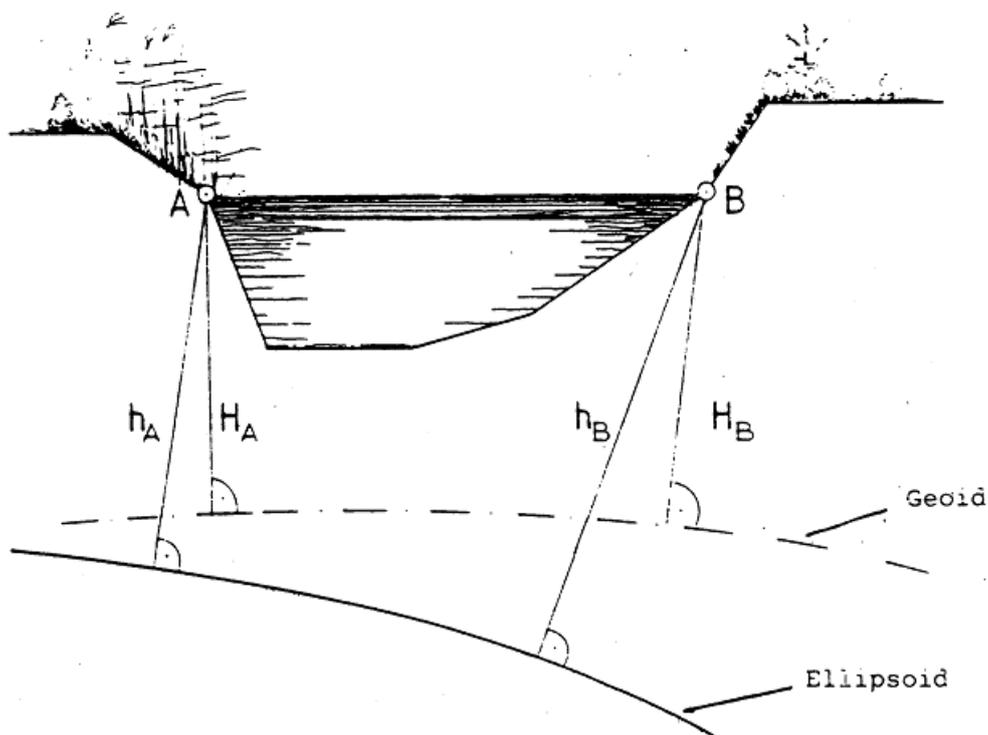


Abbildung 1.20: Orthometrische und ellipsoidische Höhen

Gewinnt man mit Satellitensystemen Höhenangaben, so handelt es sich zunächst um ellipsoidische Höhen. Einige Empfängergeräte können diese jedoch in orthometrische Höhen umrechnen. Dennoch ist die Höhenangabe im Mittel um den Faktor 1,7 schlechter als die anderen Koordinaten [11, S.9]. Aus diesem Grund besitzen moderne GPS-Empfänger häufig eingebaute Barometer zur Höhenbestimmung.

### 1.3.4 Zusammenfassung

Unter dem Begriff Referenzsystem werden alle theoretischen Vereinbarungen zusammengefasst, die zur Konkretisierung eines Koordinatensystems notwendig sind. Ins-

besondere bedeutet dies, dass das zugrunde liegende Erdmodell, der Typ des Koordinatensystems und die Art der Höhenbestimmung festgelegt werden. Das auf dem Kugelmodell der Erde beruhende geographische Gitter ist dabei das bekannteste Koordinatensystem, eignet sich aber nicht zur Bestimmung von Entfernungen und kann damit nicht als Grundlage für satellitengestützte Ortungssysteme dienen. Obwohl der Geoid die Gestalt der Erde am besten annähert, wird er nur zur Höhenbestimmung benutzt. Als Grundlage für Koordinatensysteme eignet sich das Modell des mathematisch einfach beschreibbaren Rotationsellipsoid besser. Unter dem Begriff des ‘map datum’<sup>10</sup> werden die mathematischen Größen zur Beschreibung des Referenzellipsoids (Länge der Halbachsen, Lage des Ellipsoids) zusammengefasst. Die Abweichungen zwischen Rotationsellipsoid und Geoid werden als Geoidulationen bezeichnet [2, S.27].

In einem GPS-Gerät ist eine Vielzahl von Referenzsystemen gespeichert. Der GPS-Empfänger berechnet Positionen zunächst in ECEF-Koordinaten (Referenzsystem WGS-84), die dann aber in ein vom Benutzer eingestelltes Koordinatensystem umgerechnet werden. Voreingestellt ist dabei meistens das UTM-System. Soll das GPS-Gerät zusammen mit einer Karte verwendet werden, ist es daher wichtig, das Kartendatum dieser Karte am GPS-Gerät einzustellen.

---

<sup>10</sup>deutsch: Kartenbezugssystem oder Kartendatum

# Kapitel 2

## Das NAVSTAR-GPS als ein System satellitengestützter Ortung

Das NAVSTAR-GPS ist ein satellitengestütztes Ortungssystem, das von dem US-amerikanischen Verteidigungsministerium<sup>1</sup> zu militärischen Zwecken entwickelt wurde. Heute ist es überwiegend unter dem Namen GPS<sup>2</sup> bekannt und auch für zivile Zwecke nutzbar. Mit dem GPS können so gut wie alle Navigationsprobleme gelöst werden [2, S.151], es wird sowohl in der Luft-, Land- und Seefahrtnavigation als auch im Vermessungswesen eingesetzt [12].

Zu Beginn dieses Kapitels wird ein Abriss der Entstehungsgeschichte des NAVSTAR-GPS gegeben, in dem die wichtigsten historischen Daten aufgezählt werden. Anschließend erfolgt die Erläuterung der Positionsbestimmung, wobei auf die Geschwindigkeitsbestimmung und die relevanten Zeitsysteme eingegangen wird. Die für die Funktionsweise des GPS notwendigen Systemkomponenten Satelliten, Bodenkontrollstationen und Benutzer werden im dritten Abschnitt dargestellt und hinsichtlich ihrer Bedeutung für das System untersucht. Den Schwerpunkt des Kapitels bildet die Beschreibung der Charakteristik der Satellitensignale. Die physikalischen und mathematischen Eigenschaften elektromagnetischer Wellen sind maßgebend für die Bestimmung der Laufzeit des Signals und somit auch für die Positionsbestimmung. Den Abschluss bildet eine Analyse der Hauptfehlerquellen bei der Positionsbestimmung mit GPS. Im Zuge dessen werden Korrekturmöglichkeiten aufgezeigt und das DGPS als Erweiterung des GPS zur Verbesserung der Navigationsgenauigkeit skizziert.

---

<sup>1</sup>DOD: Department of Defense

<sup>2</sup>General Positioning System

## 2.1 Historische Entwicklung

Da die ersten drei Systeme satellitengestützter Ortung, TRANSIT, TIMATION und 621B, unterschiedliche Schwächen und Probleme aufwiesen, wurde im DOD am 17.04.1973 der Entschluss gefasst, basierend auf diesen Systemen ein verbessertes System, das NAVSTAR-GPS, zu entwickeln [2, S.152].

*‘Die Forderungen an NAVSTAR können wie folgt zusammengefasst werden:*

*Einem GPS-Nutzer - egal ob in Ruhe oder in Bewegung - sollen extrem genaue Informationen über seine (dreidimensionale) Position, seine Geschwindigkeit sowie über die Zeit überall auf oder nahe der Erde zur Verfügung gestellt werden. Diese Informationen soll das System ständig liefern, unabhängig von Wetterbedingungen.’ [2, S.152]*

Nachdem die Luftwaffe die Zuständigkeit für die Entwicklung des Systems erhalten hatte, begann der Aufbau, welcher sich in drei Phasen gliedern lässt [2, S.152-153].

- **1974-1979: Überprüfungsphase**

In dieser Zeit wurden erste Systemtest durchgeführt. Die vorgesehene Konzeption wurde vor allem daraufhin überprüft, ob sie alle Anforderungen erfüllt und ob die Finanzierung gesichert ist. Am 27.06.1977 wurde der erste Testsatellit gestartet.

- **1979-1985: Entwicklungsphase**

In der folgenden Phase lag die Konzentration auf der technischen Entwicklung des Systems. Nach und nach wurden immer mehr Block I-Satelliten<sup>3</sup> gestartet. Gleichzeitig wurden die Empfangssysteme entwickelt [12].

- **1985-1995: Ausbauphase**

Mit der Zeit erfolgte der komplette Ausbau des Systems. Im Jahr 1989 wurde der erste Satellit des neuen Typs Block II<sup>4</sup> aktiviert. Die Freigabe für die zivile Nutzung erfolgte 1993 und am 17.07.1995 wurde dann die volle Betriebsbereitschaft<sup>5</sup> des Systems bekannt gegeben.

Ein weiterer bedeutsamer Termin in der Geschichte des GPS ist der 01.05.2000. An diesem Tag erklärte der damalige Präsident der USA, Bill Clinton, die Abschaltung

---

<sup>3</sup>siehe Abschnitt 2.3.1

<sup>4</sup>siehe Abschnitt 2.3.1

<sup>5</sup>FOC: Full Operational Capability

der Selective Availability (SA)<sup>6</sup>. Dabei handelt es sich um eine künstliche Ungenauigkeit, die die Positionsbestimmung für den zivilen Nutzer einschränkt. Die Genauigkeit wurde dadurch von etwa 100 m auf 20 m erhöht [12].

Am 25.09.2005 startete der erste Satellit des Typs IIR-M, der als erster Satellit eine zweite zivile Frequenz unterstützt [12]. Zur Zeit <sup>7</sup> sind 31 Satelliten aktiv, die sich auf sieben verschiedenen Bahnen mit einem mittleren Abstand von 20.200 m zur Erdoberfläche um die Erde bewegen [12].

## 2.2 Positionsbestimmung mit GPS

Im Folgenden soll das fundamentale Konzept zur Positionsbestimmung mit GPS erläutert werden. Dabei werden mögliche Fehlerquellen und Verzögerungen des Signals zunächst nicht berücksichtigt.

Wie bei allen Systemen satellitengestützter Ortung beruht die Positionsbestimmung mit dem GPS-System auf der Messung der Signallaufzeit des von den Satelliten ausgesendeten Signals. Die aktiven Satelliten übertragen dazu permanent Signale auf zwei verschiedenen Frequenzen [2, S. 161]:

- Signal  $L_1$ : Frequenz  $f_1 = 1575,42$  MHz
- Signal  $L_2$ : Frequenz  $f_2 = 1227,60$  MHz.

Die Auswahl dieser beiden Frequenzen erfolgte nach verschiedenen Kriterien, auf die in Abschnitt 2.4.2 eingegangen wird. Da die Signale frei empfangen werden können und auch zu militärischen Zwecken genutzt werden, ist bei einer Aussendung als einfache harmonische Schwingung das Risiko einer unerwünschten Fremdnutzung zu hoch. Außerdem wäre bei Messung der Phasenlage das Ergebnis im Bereich einer Wellenlänge mehrdeutig und die aktuelle Position des Satelliten könnte nicht über das Signal zum Benutzer übertragen werden [2, S.161]. Um diese Probleme zu umgehen, werden Phasenmodulationen der Signale vollzogen. Durch die Phasenmodulation der Trägerfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  mit pseudozufälligen Sequenzen (PRN-Codes<sup>8</sup>) wird folgendes erreicht [2, S.163]:

1. Die Signale erhalten Strukturen, mit deren Hilfe sie eindeutig dem Satelliten, von dem sie ausgesendet wurden, zugeordnet werden können.
2. Die Signale werden Träger einer Navigationsnachricht, die die Bahndaten der Satelliten, Zeitangaben und Zusatzinformationen enthält.

---

<sup>6</sup>siehe Abschnitt 2.4.2.3

<sup>7</sup>Stand 17.09.2008

<sup>8</sup>Pseudo Random Noise

3. Durch Geheimhaltung mancher bei der Modulation verwendeten Codes kann die freie Nutzung der Signale eingeschränkt werden.

Auf den genauen Ablauf der Signalmodulation wird in Abschnitt 2.4.2 eingegangen. Die modulierten Signale können dann zur Positionsbestimmung genutzt werden. Dies geschieht über ein GPS-Empfangsgerät, mit welchem der Benutzer die Signale empfangen und auswerten kann. Befindet sich ein GPS-Empfangsgerät in Reichweite eines Satelliten, so empfängt dieses das Signal und bestimmt dessen Laufzeit  $\Delta t$  durch Erzeugen eines identischen Signals und Messung der Phasenverschiebung<sup>9</sup>. Durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  kann die *Pseudo-Entfernung*

$$\rho = c \cdot \Delta t \quad (2.1)$$

des Benutzers vom Satelliten berechnet werden. Die Betrachtungen erfolgen ausgehend von der Annahme, dass die unterschiedlichen Uhren nicht synchronisiert sind. Geht man von einer Bezugszeit, der Systemzeit des GPS aus, so soll die Abweichung der Benutzerzeit von der Systemzeit  $t_u$  und die Abweichung der Satellitenzeit von der Systemzeit  $t_s$  betragen. Auf weitere Fehler wird erst im weiteren Verlauf der Arbeit eingegangen. Die Pseudo-Entfernung enthält demnach noch einen durch die Zeitunterschiede verursachten Fehler, so dass für den tatsächlichen Abstand des Benutzers vom Satelliten gilt:

$$r = \rho - c(t_u + t_s). \quad (2.2)$$

Die Abweichung der Satellitenuhr von der Systemzeit kann von den GPS-Kontrollstationen<sup>10</sup> korrigiert werden. Um den Benutzeruhrenfehler auszugleichen, müssen Pseudo-Entfernungsmessungen zu vier Satelliten durchgeführt werden. Aus den Pseudo-Entfernungen ergeben sich vier Gleichungen, mit denen sich die drei Koordinaten der Empfängerposition  $\mathbf{u}$  sowie der Zeitfehler  $t_u$  bestimmen lassen. Die Gleichungen sowie der Lösungsalgorithmus werden in Abschnitt 2.4.4 dargestellt.

## 2.2.1 Geschwindigkeitsbestimmung mit GPS

Für einige Anwendungen des GPS ist es für den GPS-Nutzer notwendig oder zumindest wünschenswert, seine Geschwindigkeit zu kennen. Daher beinhalten manche GPS-Empfangsgeräte die Möglichkeit, Geschwindigkeitsangaben zu machen. Beachtet werden muss dabei, dass es sich bei der Geschwindigkeit des Benutzers um eine vektorielle Größe handelt. Oftmals wird vom Empfangsgerät nur der Betrag der

---

<sup>9</sup>siehe Abschnitt 2.4.3

<sup>10</sup>siehe Abschnitt 2.3.2

Geschwindigkeit ohne die Richtung ausgegeben. Je nach Art des Geräts wird die Geschwindigkeit mit einem der folgenden Verfahren bestimmt:

- Numerisches Differenzieren der Empfängerposition
- Trägerphasenauswertung

Beide Verfahren werden nun beschrieben und erläutert.

### Numerisches Differenzieren der Empfängerposition

Bei dieser Methode wird die Geschwindigkeit durch Annähern der Ableitung der Empfängerposition abgeschätzt. Die Empfängerposition zur Zeit  $t$  sei dabei mit  $\mathbf{u}(t)$  bezeichnet. Ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  etwa konstant, so kann sie folgendermaßen aus den Positionen zur Zeit  $t_1$  und  $t_2$  berechnet werden [1, S.48]:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (2.3)$$

Werden  $\mathbf{u}(t_1)$  und  $\mathbf{u}(t_2)$  dabei unabhängig voneinander bestimmt, so ergeben sich trotz der relativ hohen Genauigkeit der Positionsangaben beim GPS sehr große Fehler für die Geschwindigkeitsangabe. Das kann an folgendem Beispiel veranschaulicht werden.

Steht ein Benutzer an einem festen Ort und bestimmt im Abstand von einer Sekunde zweimal seine Position, so können die beiden berechneten Positionen einen Abstand von 5 m haben. Daraus ergibt sich mit der obigen Formel eine Geschwindigkeit von

$$v = \frac{5m}{1s} = 18 \frac{km}{h},$$

obwohl überhaupt keine Bewegung geschehen ist.

In der Praxis wird die Geschwindigkeit deshalb numerisch bestimmt. Befindet sich der GPS-Nutzer zur Zeit  $t_0$  an der Position  $\mathbf{u}(t_0)$ , so kann seine Position zur Zeit  $t$  kurz danach mit folgender Taylor-Entwicklung beschrieben werden:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.4)$$

Dabei ist

$$\left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t=t_0}$$

die Geschwindigkeit des Benutzers zum Zeitpunkt  $t_0$  und

$$\frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right|_{t=t_0}$$

seine Beschleunigung. Geht man von einer konstanten Geschwindigkeit im Zeitintervall  $[t_0, t]$  aus, so reduziert sich die Gleichung auf folgende Form:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0), \quad (2.5)$$

in der sich Gleichung (2.3) wiedererkennen lässt. Im GPS-Empfangsgerät wird ein bestimmter Algorithmus, das sogenannte Kalman-Filtering, verwendet, um die Position des Empfängers numerisch zu differenzieren und dabei seine Geschwindigkeit zu erhalten [1, S.54]. Die Erläuterung der genauen Arbeitsweise dieses Algorithmus kann in [1, Chapter 9] nachgelesen werden.

### Trägerphasenauswertung

In vielen GPS-Empfangsgeräten wird die Geschwindigkeit unter Ausnutzung des Dopplereffekts bestimmt. Nachdem das Satellitensignal empfangen wurde, wird im Empfangsgerät zunächst der Signalinhalt von der Trägerwelle getrennt. Es kann dann die Frequenz  $f_E$  der empfangenen Trägerwelle bestimmt werden. Da die ausgesendete Trägerfrequenz  $f_T$  bekannt ist ( $f_1$  oder  $f_2$ ), kann anschließend die durch die Bewegung des Benutzers verursachte Dopplerverschiebung  $\Delta f = f_E - f_T$  bestimmt werden. Es gilt folgende Gleichung<sup>11</sup>:

$$\Delta f = f_E - f_T = \frac{f_T}{c} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad (2.6)$$

wobei  $\frac{ds}{dt}$  die relative Geschwindigkeit des Benutzers in Bezug auf den Satelliten und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit darstellt. Da die Geschwindigkeit des Satelliten bekannt ist und mit der Navigationsnachricht übertragen wird, kann mittels dieser Formel der Betrag der Benutzergeschwindigkeit berechnet werden. Die Bestimmung der Geschwindigkeit mit diesem Verfahren ist genauer als die erste Methode.

## 2.2.2 Zeit und GPS

Das Prinzip der Positionsbestimmung mit GPS beruht auf Laufzeitmessungen, die Synchronisation der unterschiedlichen Uhren ist dabei sehr wichtig - durch diese beiden Aspekte wird deutlich, dass die Zeit eine der wesentlichen Größen im System darstellt. Das GPS-System besitzt dabei sein eigenes Zeitsystem, die GPS-Systemzeit, die nicht mit der Weltzeit UTC<sup>12</sup> übereinstimmt.

<sup>11</sup>siehe Abschnitt 2.4.1.1

<sup>12</sup>Universal Time Coordinated

## Die Weltzeit UTC

Die UTC bildet die Grundlage für die Zeitbestimmung im täglichen Leben und vielen wissenschaftlich-technischen Anwendungen, auf ihr basieren zum Beispiel die MEZ<sup>13</sup> und die MESZ<sup>14</sup>. Die UTC wurde als Kompromiss zwischen zwei anderen Zeitskalen, der TAI<sup>15</sup> und der UT1<sup>16</sup>, eingeführt.

Die internationale Atomzeit TAI ist eine Zeitskala die auf der Grundeinheit der Zeitmessung, der Sekunde, basiert. Die Definition der Sekunde lautet dabei

*‘Die Sekunde ist das 9192631770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids <sup>133</sup>Cs entsprechenden Strahlung.’* [11, S.26]

In verschiedenen Ländern gibt es über 50 Zeitinstitute, die die TAI mit etwa 250 Atomuhren realisieren.

Bei der UT1 handelt es sich um eine astronomische Zeitskala, die die Erdrotation relativ zur Sonne berücksichtigt. Durch die UT1 wird die aktuelle Orientierung des ECEF-Koordinatensystems definiert. Allerdings fehlt ihr die Gleichmäßigkeit einer atomaren Zeitskala.

Aus dem Wunsch nach einer gleichmäßigen Zeitskala, die die Eigenschaften der UT1 inne hat, entstand die UTC. Diese verwendet als Skalenmaß die Sekunde, wird aber durch das Hinzufügen von Schaltsekunden immer wieder an die UT1 angepasst [1, S.55].

## Die GPS-Systemzeit

Das GPS hat sein eigenes Zeitsystem mit einer kontinuierlichen Zeitskala. Bei dieser wird die Wochennummer und innerhalb einer Woche die Anzahl der verstrichenen Sekunden angegeben. Die GPS-Woche beginnt immer um Mitternacht zwischen Samstag und Sonntag [2, S.177]. Realisiert werden die Zeitangaben durch in den Satelliten und den Kontrollsegmenten installierte Atomuhren. Da Atomuhren eine komplizierte Technik aufweisen und sehr teuer sind, können sie in den üblichen GPS-Empfangsgeräten nicht verwendet werden. Damit dennoch eine für den GPS-Nutzer verwendbare Zeitangabe gemacht werden kann, ist die Differenz der GPS-Systemzeit zur UTC-Weltzeit mit einer Genauigkeit von 100  $\mu$ s bekannt.

---

<sup>13</sup>Mitteleuropäische Zeit

<sup>14</sup>Mitteleuropäische Sommerzeit

<sup>15</sup>Temps Atomique International

<sup>16</sup>Universal Time 1

### 2.2.3 Zusammenfassung

Um die genaue Position und eventuell die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Benutzers bestimmen zu können, müssen im GPS-Empfangsgerät die Signale mehrerer Satelliten empfangen und ausgewertet werden. Zentral ist dabei die Bestimmung der Laufzeit des Signals, bei dem es sich um eine modulierte elektromagnetische Welle handelt. Die Trägerfrequenz der Welle ist für alle Satelliten gleich, durch die Modulation erhält das Signal eine für den jeweiligen Satelliten spezifische Kennzeichnung. Dabei spielt die Synchronisation der Satelliten- und Empfängeruhren mit der GPS-Systemzeit eine wichtige Rolle für eine genaue Laufzeitmessung. Die Synchronisation der Satellitenuhren erfolgt dabei über ein Bodenkontrollsystem, der Empfängeruhrfehler kann berechnet werden, wenn Laufzeitmessungen zu mindestens vier Satelliten gleichzeitig durchgeführt werden.

## 2.3 Aufbau des GPS-Systems

Aus den vorherigen Betrachtungen wird ersichtlich, dass drei Bausteine für den Aufbau des GPS-Systems wesentlich sind. Die Satelliten senden die Signale aus, mit denen die Benutzer ihre Position bestimmen können. Um die Satelliten zu überwachen und zum Beispiel Zeitfehler zu korrigieren, muss eine Kontrolle vom Boden aus statt finden. Nur so kann eine genaue Positionsbestimmung garantiert werden. Es ergibt sich demnach eine Unterteilung in folgende Segmente [8, S.19]:

1. Das Weltraumsegment (aktive Satelliten)
2. Das Kontrollsegment (zur Überwachung des Systems dienende Bodenstationen)
3. Das Benutzersegment (zivile und militärische Anwender des Systems)

Es werden nun der Reihe nach die einzelnen Segmente hinsichtlich ihrer Aufgaben im System, ihrer Funktionsweise und ihres Aufbaus betrachtet.

### 2.3.1 Das Weltraumsegment

Um überall eine dauerhafte Positionsbestimmung garantieren zu können, müssen von jedem Punkt der Erde aus jederzeit vier Satelliten sichtbar sein. Beim Entwurf einer Satellitenkonstellation spielen außerdem folgende Aspekte eine Rolle [2, S.153]:

- *Große Bahnhöhen* haben gegenüber kleinen Bahnhöhen den Vorzug, dass die Anzahl der benötigten Bahnen gering ist.

- *Geneigte Bahnen* haben gegenüber Polbahnen den Vorzug, dass einerseits polnahe Gebiete beobachtet werden können, aber andererseits unnötige Satellitenhäufungen an den Polen vermieden werden.
- *Gleichverteilung der Satelliten* erlaubt eine komplette Überdeckung bei minimalem Aufwand und hat zugleich den Vorzug, dass mögliche Satellitenkontakte gut überschaubar bleiben.
- *Symmetrie der Satellitenbahnen* bewirkt, dass im Mittel auf alle Satelliten die gleichen Störfaktoren wirken, so dass die Konstellation relativ stabil ist.

Unter Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte hat sich ein aus mindestens 24 Satelliten bestehendes Weltraumsegment ergeben. Die Satelliten befinden sich dabei in sechs verschiedenen Bahnebenen, die mit den Buchstaben A bis F bezeichnet werden. Innerhalb dieser bewegen sich jeweils mindestens vier Satelliten auf einer elliptischen Bahn. Die Bahnneigung zum Äquator beträgt  $55^\circ$ , in der Äquatorebene sind die einzelnen Bahnen um jeweils  $60^\circ$  gegeneinander versetzt. Da die große Halbachse der Satellitenbahnen 26.609 km lang ist, beträgt die Umlaufzeit einen halben Sternentag, das sind etwa 11:58 h [2, S.155].

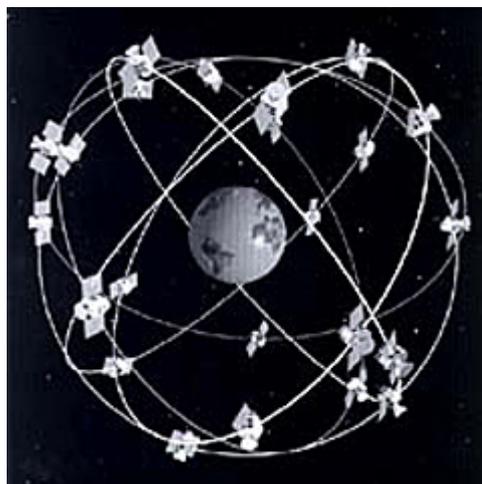


Abbildung 2.1: Satellitenkonstellation im GPS-System

Für die Positionsbestimmung mit GPS muss die Position jedes Satelliten immer genau bekannt sein, wofür eine mathematische Beschreibung seiner Umlaufbahn benötigt wird. Da der Umlauf der Satelliten um die Erde mit der Rotation der Erde um die Sonne verglichen werden kann, wird die Beschreibung der Satellitenbahn über die Keplerschen Gesetze hergeleitet.

### 2.3.1.1 Die Keplerschen Gesetze für Satelliten

Die Keplerschen Gesetze<sup>17</sup>, die die Bewegung der Planeten um die Sonne beschreiben, wurden von J. Kepler<sup>18</sup> aus Beobachtungen empirisch abgeleitet. Später konnten sie durch das Newtonsche Gravitationsgesetz erklärt werden. Dieses lautet:

Jeder punktsymmetrische Körper übt auf jeden anderen punktsymmetrischen Körper eine anziehende Kraft aus, die proportional zu den Massen der beiden Körper und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen ihnen ist. [9, S.359]

Betrachtet man die Erde und die Satelliten als punktsymmetrische Körper, so gilt das Gravitationsgesetz auch für das System Erde-Satellit. Da die Keplerschen Gesetze aus der Gravitationskraft hergeleitet werden, können sie folgendermaßen abgeändert werden.

### Die Keplerschen Gesetze für Satelliten

1. Alle Satelliten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Erde, in deren einem Brennpunkt das Geozentrum der Erde liegt.
2. Die Verbindungslinie zwischen dem Geozentrum der Erde und irgendeinem Satelliten überstreicht in gleichen Zeitabständen die gleiche Fläche.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Satelliten sind proportional zur dritten Potenz der großen Achse der Bahnellipse.

Diese Gesetze und die Gravitationskraft sind die Grundlage für einen Algorithmus, mit dem die Position eines Satelliten zu einem beliebigen Zeitpunkt bestimmt werden kann.

### 2.3.1.2 Beschreibung der Satellitenposition

Der zur Bestimmung der Position eines Satelliten verwendete Algorithmus arbeitet im Wesentlichen mit den folgenden Parametern:

- Große Halbachse  $\mathbf{a}$  der Ellipse
- Numerische Exzentrizität  $\mathbf{e}$ :  $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ ,  $b$  kleine Halbachse

---

<sup>17</sup>zum Nachlesen: [9, S.359]

<sup>18</sup>J. Kepler: 1571-1630

- Winkel  $\omega$  zwischen aufsteigendem Knoten<sup>19</sup>, Geozentrum G und Perigäum<sup>20</sup>  $Pe$
- Zeitpunkt  $T$  des Satellitendurchgangs durch das Perigäum

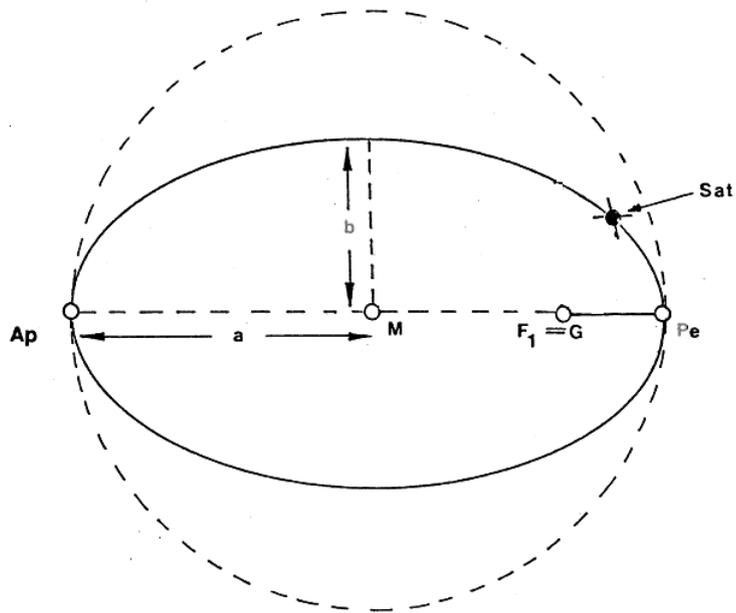


Abbildung 2.2: Bahnellipse des Satelliten

Durch die ersten beiden Parameter wird die Geometrie der Ellipse festgelegt, der Winkel  $\omega$  definiert die Lage der Ellipse im Raum. Somit ist die Satellitenbahn in Bezug auf das Geozentrum der Erde räumlich festgelegt und die Position des Satelliten kann später in ECEF-Koordinaten angegeben werden. Der Zeitpunkt  $T$  ist wichtig als Referenzwert, von dem aus zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  die Position des Satelliten auf der Ellipsenbahn bestimmt werden kann. Die genaue Funktionsweise des Algorithmus sowie die aus den Gesetzen hergeleiteten Formeln können in [2, S.77-78] nachgelesen werden. Diverse Abweichungen der Realsituation vom theoretischen Modell machen allerdings Korrekturen der angewendeten Gesetze notwendig, wobei folgende Faktoren berücksichtigt werden müssen [2, S.79-80].

- Da es sich bei der Erde nicht um einen kugelsymmetrischen Körper handelt, gelten die im vorherigen Abschnitt aufgeführten Gesetze nur näherungsweise. Durch die Abweichungen der Erdfigur von der Kugelform und die ungleichmäßige Masseverteilung ist das Gravitationsfeld der Erde nicht kugelsymmetrisch und die Bahnen der Satelliten sind keine exakten Ellipsen.

<sup>19</sup>Punkt der Bahnellipse, in dem der Satellit die Äquatorebene von Süden nach Norden durchstößt  
<sup>20</sup>erdnächster Punkt der Ellipsenbahn

- Bisher wurde nur das System Satellit-Erde betrachtet. Da das Gravitationsgesetz ebenso für die Systeme Satellit-Sonne und Satellit-Mond gilt, wirken weitere Gravitationskräfte auf den Satelliten und beeinflussen seine Umlaufbahn.
- Der von der Sonne ausgehende direkte Strahlungsdruck und der durch von der Erde reflektierte Strahlen verursachte indirekte Strahlungsdruck führen zu einer Störung der Satellitenbahn. Befindet sich der Satellit im Erdschatten, so fällt dieser Einfluss weg.
- Ein weiterer Faktor ist die Beschleunigung des Satelliten durch Reibung an sich in der Atmosphäre befindlichen Restteilchen.

Die Summe aller Störungseinflüsse führt dazu, dass sich der Satellit auf einer spiralförmigen Bahn bewegt, deren Lage im Raum sich ständig ändert. Da die durch Gravitation verursachten Störungen genau berechnet und die nicht-gravitativen Störungen gut abgeschätzt werden können, kann die unregelmäßige Bahn des Satelliten auf Dezimeter genau angegeben werden. Die sich ständig ändernden Bahnelemente (Ephemeriden) werden dem Nutzer in der Navigationsnachricht mitgeteilt [2, S.82].

### 2.3.1.3 Der Aufbau eines Satelliten

Seit am 27.06.1977 [2, S. 152] der erste Satellit in seine Umlaufbahn gebracht wurde, sind einige Weiterentwicklungen an den Satellitenmodellen vorgenommen worden. Heute<sup>21</sup> existieren sechs verschiedene Baureihen, die sich in einigen Kenngrößen unterscheiden, jedoch den gleichen Grundaufbau aufweisen.



Abbildung 2.3: Satellit des Typ Block-II    Abbildung 2.4: Satellit des Typ Block IIF

Wie in den Abbildungen gut erkennbar, verfügen die Satelliten über Solarpaneele zur Stromversorgung. Während eines Umlaufs verändern die beweglichen Panele auto-

---

<sup>21</sup>Stand August 2008

matisch ihre Ausrichtung zur Sonne hin. Befindet sich der Satellit im Erdschatten, so erfolgt die Energieversorgung über einen an Bord befindlichen *NiCd*-Akku [2, S. 155].

Ein weiterer wesentlicher Bestandteil des Satelliten sind die beiden Antennen zum Empfang und Senden von Signalen. Die kurze L-Band<sup>22</sup>-Antenne dient zur Ausstrahlung der Satellitensignale, über die längere S-Band<sup>23</sup>-Antenne erfolgt der Informationsaustausch mit dem Kontrollzentrum [2, S. 155]. Zur genauen Zeitbestimmung beinhaltet der Satellit drei Atomuhren, die je nach Bauart aus unterschiedlich vielen Cäsium- und Rubidiumuhren bestehen. Weitere Bauteile sind ein Mikroprozessor und interne Speicherkapazität, die vor allem der Aufnahme der Navigationsdaten, die vom Kontrollzentrum im Voraus berechnet werden, dienen. Je nach Größe des Speichers können die Satelliten unterschiedlich lange ohne Kontakt zum Kontrollzentrum bleiben. Im Normalfall erfolgt jedoch alle acht Stunden ein Datenaustausch mit dem Kontrollzentrum [2, S.155].

Es sollen nun die wichtigsten Daten der unterschiedlichen Satellitentypen gegenüber gestellt werden.

Baureihe	Masse [kg]	Uhren	Lebensdauer [a]	Implementierungszeitraum
Block I	ca. 845	1 Cs/ 2 Rb	ca. 10	1978 - 1985
Block II	ca. 1500	2 Cs/ 1 Rb	ca. 7,5	1989 - 1990
Block II A	ca. 1500	2 Cs/ 1 Rb	ca. 7,5	1990 - 1997
Block II R	2032	2 Cs/2 Rb	ca. 10	1997-2005
Block II R-M	2060	3 Rb		ab 2005
Block II F		Wasserstoffmaser		ab 2010

Tabelle 2.1: Wichtige Kenngrößen der Satellitenbaureihen

Nach dem Ende ihrer Funktionsfähigkeit werden die Satelliten mit bordeigenen Mitteln auf eine Friedhofsbahn gebracht, die sich unterhalb oder oberhalb der Bahnen der aktiven Satelliten befindet [2, S. 155].

### 2.3.2 Das Kontrollsegment

Für die Positionsbestimmung in Echtzeit müssen verschiedene Navigationsdaten erzeugt und berechnet werden. Diese Aufgabe übernimmt das Kontrollsegment des GPS-Systems, welches in der Hand der US-Armee liegt. Insbesondere werden dabei folgende Aufgaben erfüllt [8, S. 26]:

---

<sup>22</sup>L-Band: Frequenz 1-2,6 GHz

<sup>23</sup>S-Band: Frequenz 2,6-3,95 GHz

- Die Satellitenbewegungen werden beobachtet und die Bahndaten der Satelliten berechnet.
- Die Satellitenuhren werden überwacht und untereinander synchronisiert.
- Die genauen Bahndaten und Vorhersagen über das Uhrenverhalten werden den Satelliten per Funkkontakt zur Weitergabe an den Benutzer übermittelt.

Um diese vielfältigen Aufgaben zu erledigen, besteht das Kontrollsegment aus unterschiedlichen Bodenstationen.

Die *Monitorstationen* (monitor stations) sind im Wesentlichen stationäre GPS-Empfangsgeräte, die zusätzlich eine Cäsium-Uhr und Sensoren zum Sammeln meteorologischer Daten besitzen. Die Stationen empfangen die Signale der sichtbaren Satelliten und berechnen ihre Pseudo-Entfernung zum Satelliten. Da die genaue Position der Station bekannt ist und die Atomuhr die genaue Systemzeit liefert, kann das Signal um einige fehlerhafte Größen wie zum Beispiel atmosphärische Verzögerungen korrigiert werden. Die korrigierten Daten werden dann zur Weiterverarbeitung an die Hauptkontrollstation weitergeleitet [2, S.158].

Die *Hauptkontrollstation* (Master Control Station MCS) befindet sich in einer Basis der Airforce im US-Staat Colorado. Sie ruft die von den Monitorstationen gesammelten Daten ab und berechnet aus ihnen die Ephemeriden und Vorhersagen der Satellitenbahn. Die errechneten Daten werden dann zu einer Navigationsnachricht zusammengefasst und zu dem jeweiligen Satelliten übertragen [2, S.158].

Die Übermittlung der Daten geschieht über *Bodenantennen* (ground antennas), die Signale im S-Band versenden. Durch eine weltweite Verteilung der Antennen wird gewährleistet, dass sich jeder Satellit immer in Reichweite von mindestens zwei Stationen befindet.

### 2.3.3 Das Benutzersegment

Unter dem Begriff Benutzersegment werden die vielfältigen GPS-Empfangsgeräte in militärischer und ziviler Nutzung zusammengefasst. Die Navigationsgenauigkeit der Geräte ist dabei unterschiedlich, da das Genauigkeitspotential des GPS in zwei Kategorien, dem SPS (Standard Positioning Service) und dem PPS (Precise Positioning Service), bereitgestellt wird. Der PPS kann nur von speziell autorisierten Benutzern, zumeist militärischen Dienststellen, genutzt werden. Er schöpft die volle Genauigkeit des GPS aus. Der SPS hat dagegen nur eine Navigationsgenauigkeit von heute etwa 5-10 m, steht dafür aber weltweit jedem Nutzer uneingeschränkt zur Verfügung [2, S. 168].

Zudem handelt es sich bei den bisher zivil erhältlichen Empfangsgeräten um Ein-Frequenzempfänger. Diese können nur das von den Satelliten ausgestrahlte Signal  $L_1$  empfangen, während die meisten militärischen Empfangsgeräte beide Frequenzen empfangen können. Zwei-Frequenzempfänger bieten den Vorteil, dass einige Verzögerungen des ankommenden Signals direkt vom Gerät ausgeglichen werden können. Die noch in Planung befindlichen Satelliten des Typ IIF sollen allerdings über das Signal  $L_5$  eine dritte Frequenz zur zivilen Nutzung unterstützen. Im weiteren Verlauf der Arbeit erfolgt eine Konzentration auf zivile Ein-Frequenzempfänger. Es sollen im Folgenden der grundlegende Aufbau und die Arbeitsweise dieser Empfangsgeräte skizziert werden.

Über die *Antenne* werden die L-Band-Signale der Satelliten empfangen. Die Antenne ist rechts-zirkular polarisiert und bietet eine nahezu hemisphärische Überdeckung von etwa  $160^\circ$  [1, S. 68-69]. Der *Empfänger* dient der Signalerfassung und -verarbeitung. Dabei müssen gleichzeitig die Signale von mindestens vier Satelliten verarbeitet werden, wofür meistens mehrere Empfangskanäle (pro Satellit ein Kanal) zur Verfügung stehen. Die aus dem Signal erfassten Daten wie die Pseudoentfernung und die decodierte Navigationsnachricht werden für weitere Berechnungen an die Prozessoren weitergeleitet [11, S. 37]. Für die Messgrößenverarbeitung werden verschiedene *Prozessoren* benötigt, die die Gleichungen zur Positionsbestimmung lösen und diverse Korrekturmodelle miteinbeziehen. Als Ausgabe werden dann die Position, die Geschwindigkeit sowie die genaue Zeitangabe erhalten [1, S. 71]. Das *Nutzerinterface* ist stark geräteabhängig und beinhaltet Möglichkeiten zur Dateneingabe und Datenausgabe [11, S. 37]. Zudem verfügt ein GPS-Empfangsgerät über eine interne und/oder externe *Stromversorgung*. Bei den Handgeräten erfolgt meist eine interne Stromversorgung über Alkali- oder Lithium-Batterien.

Da die Nutzung des GPS-Systems nicht auf Ortungs- und Vermessungsaufgaben beschränkt ist, sondern auch auf Zeitbestimmung und -synchronisation sowie Frequenzkontrollen ausgeweitet werden kann, gibt es mittlerweile eine Vielzahl von unterschiedlichsten Empfangsgeräten verschiedener Hersteller. Diese besitzen die gleiche Grundkonzeption, unterscheiden sich aber in der Art der Signalverarbeitung.

### 2.3.4 Zusammenfassung

Für die Funktionsweise des GPS sind drei Systemkomponenten unabdinglich. Die Satelliten als künstliche Erdtrabanten sorgen dafür, dass dem Benutzer unabhängig von Wetterbedingungen und Standort jederzeit ausreichend Signale zur Verfügung stehen, um seine Position dreidimensional bestimmen zu können. Zur Berechnung seiner Position benötigt der Benutzer neben der Signallaufzeit vor allem die Position

des Satelliten zur Zeit der Signalausendung. Diese wird im Bodenkontrollsystem mit einem Algorithmus, der auf den Keplerschen Gesetzen aufbaut, berechnet und über das Satellitensignal zum Benutzer übertragen. Zudem sorgt das Kontrollsystem für eine Überwachung der Satelliten. Abhängig von dem Empfangsgerät hat der Benutzer unterschiedliche Möglichkeiten die empfangenen Signale auszuwerten.

## 2.4 Charakteristik der Signale

Im Folgenden soll auf die Signale eingegangen werden, über die die zur Positionsbestimmung wichtigen Daten vom Satelliten zu den Empfängern übertragen werden. Dabei sollen vor allem die Besonderheiten deutlich werden, die eine Erfassung und Verfolgung des Signals eines bestimmten Satelliten möglich machen. Da es sich bei den von den künstlichen Satelliten ausgesendeten Signalen um elektromagnetische Wellen handelt, werden zunächst deren grundlegende sowie einige weitere, für die GPS-Navigation wichtige, Eigenschaften erläutert.

### 2.4.1 Allgemeines über elektromagnetische Wellen

Als *elektromagnetische Welle* wird eine periodische Zustandsänderung des elektromagnetischen Felds bezeichnet, die sich aus den Zustandsvektoren des elektrischen und des magnetischen Felds zusammensetzt [2, S.101]. Eine allgemeine mathematische Beschreibung kann aus den Maxwell<sup>24</sup> - Gleichungen gewonnen werden. Zum Nachlesen sei an dieser Stelle [14, S. 216ff] empfohlen. In der GPS-Technik werden ausschließlich ebene harmonische Wellen benutzt, welche sich dadurch auszeichnen, dass die Auslenkung aus der Ruhelage sowohl zeitlich als auch räumlich periodisch erfolgt [15]. Mathematisch kann die Welle daher über eine einfache Sinusfunktion beschrieben werden. Eine mögliche Beschreibung ist

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad (2.7)$$

mit

- $A$ : Amplitude
- $k$ : Wellenzahl,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  mit  $\lambda$ : Wellenlänge
- $\omega$ : Kreisfrequenz,  $\omega = 2\pi f$  mit  $f$ : Frequenz
- $\varphi$ : Phasenwinkel der Welle zum Zeitpunkt  $t=0$ .

---

<sup>24</sup>J.C. Maxwell: 1831-1879

Um die Begriffe noch einmal zu verdeutlichen, werden zwei Fälle betrachtet [2, S.102f].

1. Wird das Feld an einem konstanten Ort betrachtet, so wird mit der Schwingungsdauer  $T$  der zeitliche Abstand zwischen zwei Punkten desselben Schwingungszustandes bezeichnet. Die Frequenz ergibt sich dann mittels  $f = \frac{1}{T}$ .
2. Unter der Annahme eines festen Zeitpunkts ändert sich das Feld mit zunehmendem Abstand vom Sender periodisch und der räumliche Abstand zwischen zwei Punkten derselben Phase wird als Wellenlänge  $\lambda$  definiert.

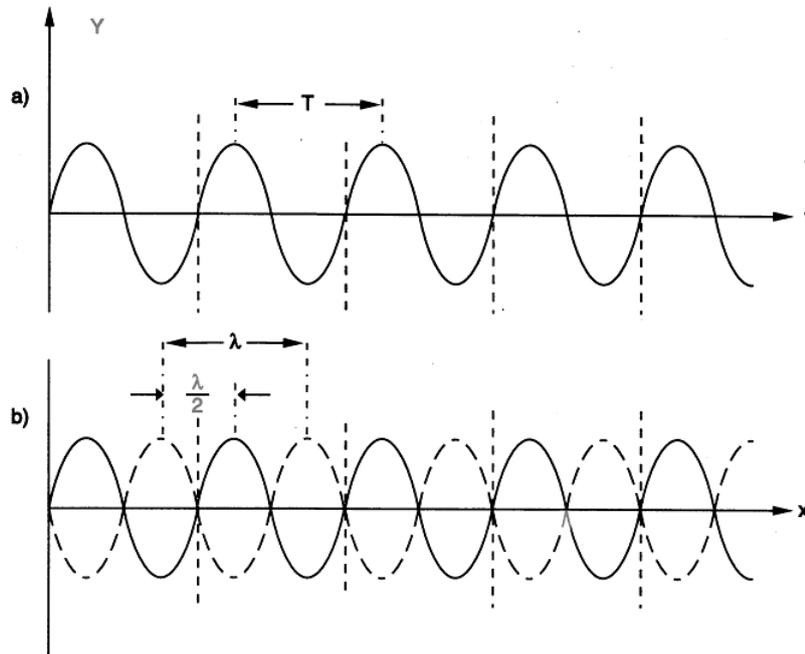


Abbildung 2.5: Schwingungsdauer und Wellenlänge

Während der Zeit  $T$  verschiebt sich die Welle um  $\lambda$ , daher wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Raum als *Phasengeschwindigkeit*  $v$  wie folgt definiert:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f. \quad (2.8)$$

Im Vakuum breiten sich elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit aus; in der Erdatmosphäre und auf dem Erdkörper wird ein Teil der elektrischen Energie durch Reibung in Wärme umgewandelt, was zu einer Dämpfung der Welle führt. Das Verhalten einer elektromagnetischen Welle in der Erdatmosphäre ist dabei frequenzabhängig, wobei hohe Frequenzen besser zur Signalübertragung geeignet sind. Daher werden aus dem breiten Spektrum elektromagnetischer Wellen für die Datenübertragung mit GPS nur Frequenzbänder im Mikrowellenbereich genutzt.

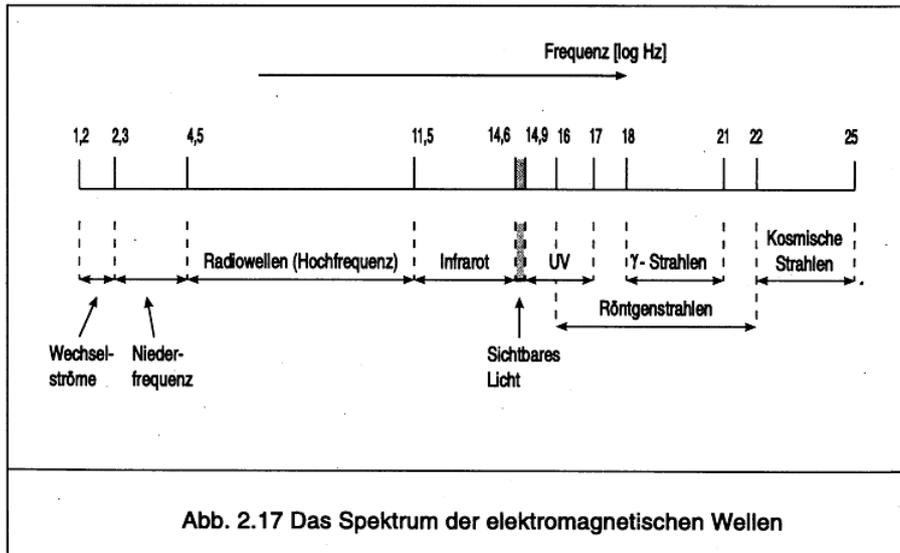


Abbildung 2.6: Das Spektrum elektromagnetischer Wellen

Insbesondere wird zur Signalübertragung vom Satelliten zum Benutzer das L-Band und zum Informationsaustausch zwischen Kontrollsegment und Satellit das S-Band genutzt [2, S. 106f].

Frequenz [GHz]	Wellenlänge [cm]	Band
0,23 - 1	130 - 30	P
1 - 2	30 - 15	L
2 - 4	15 - 7,5	S
4 - 8	7,5 - 3,75	C
8 - 12,5	3,75 - 2,4	X
12,5 - 18	2,4 - 1,67	K <sub>u</sub>
18 - 26,5	1,67 - 1,13	K
26,5 - 40	1,13 - 0,75	K <sub>a</sub>

Abbildung 2.7: Frequenzbänder im Mikrowellenbereich

### 2.4.1.1 Der Doppler-Effekt

Der Doppler-Effekt wurde im Jahr 1842 von dem österreichischen Physiker Chr. Doppler<sup>25</sup> entdeckt und besagt, dass sich Frequenz und Wellenlänge einer Welle ändern, wenn sich der Sender und der Empfänger der Welle relativ zueinander bewegen [2, S. 109]. Aus dem Alltag ist dieses Phänomen von vorbeifahrenden Rettungsfahrzeugen mit tönendem Signalhorn bekannt. Ein an der Straße stehender Beobachter registriert mit dem Ohr, dass sich die Tonhöhe des Signals beim Vorbeifahren des Fahrzeugs ändert. Bei der Bewegung des Senders, also in diesem Fall des Rettungsfahrzeugs, auf den Empfänger (Beobachter) zu wird ein hoher Ton, eine hohe Frequenz, wahrgenommen. Bewegt sich der Sender vom Empfänger weg, so erklingt das Horn mit niedrigerem Ton, einer tiefen Frequenz.

Ist  $f_0$  die vom Sender ausgestrahlte Frequenz,  $v$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und  $u$  die relative Geschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger, so gilt für die vom Empfänger empfangene Frequenz  $f_E$  [9, S.496]:

$$f_E = f_0 \left( 1 + \frac{u}{v} \right), \quad (2.9)$$

falls sich Sender und Empfänger aufeinander zu bewegen, und

$$f_E = f_0 \left( 1 - \frac{u}{v} \right), \quad (2.10)$$

falls sich Sender und Empfänger voneinander weg bewegen.

Der Unterschied zwischen ausgesendeter und empfangener Frequenz wird als *Doppler-Frequenzverschiebung* bezeichnet [2, S. 111]. In der folgenden Grafik ist die Doppler-Frequenzverschiebung in Abhängigkeit vom relativen Abstand zwischen Sender und Empfänger dargestellt.

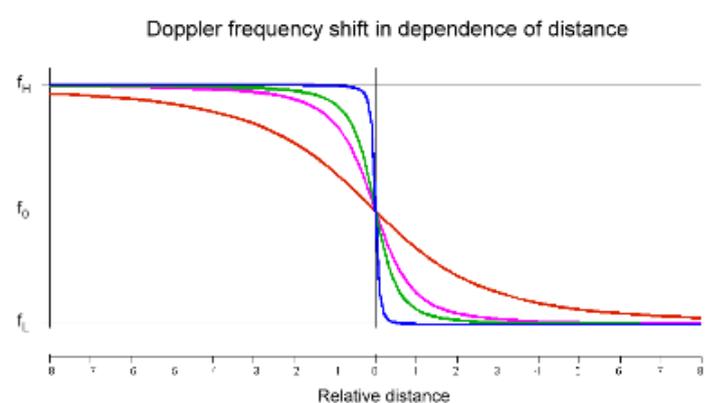


Abbildung 2.8: Doppler-Frequenzverschiebung

<sup>25</sup>Chr. Doppler: 1803 - 1853

Falls sich der Empfänger direkt in der Bahn eines sich geradlinig bewegenden Senders befindet (blaue Kurve), so kommt es zu einem scharfen Frequenzsprung. Je weiter der Empfänger sich außerhalb der Bewegungsbahn des Senders befindet, desto kontinuierlicher wird dieser Übergang (rote Kurve). Die beiden Gleichungen (2.9) und (2.10) können dann zu folgender Gleichung zusammengefasst werden [2, S. 111]

$$f_E = f_0 \left( 1 - \frac{1}{v} \frac{ds}{dt} \right), \quad (2.11)$$

wobei das Differential  $\frac{ds}{dt}$  die sich kontinuierlich ändernde relative Geschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger bezeichnet. Im Fall der durch Formel (2.9) beschrieben wird, hat  $ds$  ein negatives Vorzeichen, so dass die Formeln auch in diesem Fall übereinstimmen.

#### 2.4.1.2 Die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets

Bisher wurde nur eine Welle mit fester Frequenz betrachtet. In der Realität werden jedoch immer Wellenpakete mit unterschiedlichen Frequenzen, also Frequenzgruppen, versendet. Der Begriff der *Bandbreite* bezeichnet dabei die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten Frequenz innerhalb eines Wellenpakets [2, S. 116]. Um das Verhalten eines solchen Wellenpakets zu untersuchen, wird die Überlagerung zweier beliebiger Wellen aus dem Paket behandelt. Wird zur Vereinfachung der Rechnung der Nullphasenwinkel der beiden Wellen als Null angenommen, so haben die Wellen nach (2.7) die Form

$$y_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t) \quad (2.12)$$

sowie

$$y_2(x, t) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t). \quad (2.13)$$

Nach dem Superpositionsprinzip unter Verwendung des Additionstheorems

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.14)$$

überlagern sich diese beiden Wellen zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  zum Mischsignal

$$y_M(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (2.15)$$

$$= A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t) \quad (2.16)$$

$$= 2A \sin \left( \frac{(k_1 + k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \right) \cos \left( \frac{(k_1 - k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right) \quad (2.17)$$

Durch Ersetzen von

$$k_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,2}}$$

und

$$\omega_{1,2} = 2\pi f_{1,2}$$

kann Gleichung (2.17) umgeschrieben werden zu

$$y_M(x, t) = 2A \sin \left( \frac{\left( \frac{2\pi}{\lambda_1} + \frac{2\pi}{\lambda_2} \right) x}{2} - \frac{(2\pi f_1 + 2\pi f_2) t}{2} \right) \cos \left( \frac{\left( \frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} \right) x}{2} - \frac{(2\pi f_1 - 2\pi f_2) t}{2} \right) \quad (2.18)$$

$$= 2A \sin 2\pi \left( \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{x}{2} - (f_1 + f_2) \frac{t}{2} \right) \cos 2\pi \left( \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{x}{2} - (f_1 - f_2) \frac{t}{2} \right) \quad (2.19)$$

Aus Gleichung (2.19) lassen sich dann verschiedene Kenngrößen der Wellengruppe ableiten [2, S. 117f]:

- Die *Frequenz der Amplitudenschwankungen* beträgt

$$f_A = \frac{1}{2} (f_1 - f_2). \quad (2.20)$$

- Für die *Breite der Wellengruppe*  $\lambda_A$  gilt

$$\frac{1}{\lambda_A} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2} \Rightarrow \lambda_A = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.21)$$

- Aus den beiden Größen  $f_A$  und  $\lambda_A$  lässt sich dann eine weitere Geschwindigkeit, die *Gruppengeschwindigkeit*, definieren:

$$v_{Gr} = \lambda_A \cdot f_A = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1}{2} (f_1 - f_2) = \lambda_1\lambda_2 \frac{f_1 - f_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.22)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenpakets und im Allgemeinen nicht gleich der Phasengeschwindigkeit. Im Fall der GPS-Signale befinden sich innerhalb des Wellenpakets nur Wellen mit kleinen Frequenz- und Wellenlängenunterschieden. Dann gilt für die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{Gr} = \lambda_1\lambda_2 \frac{f_1 - f_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad |\lambda_1 \approx \lambda_2 := \lambda, f_1 \approx f_2 := f| \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow v_{Gr} = \lambda^2 \frac{df}{d\lambda} \quad (2.24)$$

Zur Erinnerung: Die Phasengeschwindigkeit war definiert als  $v_{Ph} = \lambda \cdot f$ . Falls  $v_{Ph}$  und  $f$  voneinander unabhängig sind, gilt

$$v_{Ph} = \lambda \cdot f \quad (2.25)$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{v_{Ph}}{\lambda} \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} v_{Ph} \quad (2.27)$$

$$\Leftrightarrow v_{Ph} = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} = -v_{Gr} \quad (2.28)$$

Bei einer gemischten Welle aus mehreren Frequenzen sind die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit also nur dann gleich, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz sind [2, S. 118]. Ein Medium, in dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzabhängig ist, wird als *dispersiv* bezeichnet.

### 2.4.1.3 Ausbreitung in der Erdatmosphäre

Basierend auf den bisherigen Betrachtungen wird nun das Verhalten einer elektromagnetischen Welle beim Durchlaufen der Erdatmosphäre genauer analysiert. Allgemein kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem beliebigen Medium durch den Brechungsindex  $n$  charakterisiert werden, der wie folgt definiert ist [2, S.119]:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\text{Geschwindigkeit im Vakuum}}{\text{Geschwindigkeit im Medium}}. \quad (2.29)$$

Die Erdatmosphäre besteht aus verschiedenen Schichten, die sich durch unterschiedliche Brechungsindizes auszeichnen. Die Unterscheidung der Schichten kann dabei nach unterschiedlichen Merkmalen wie der Temperatur, dem Ionisationsgrad oder der Gaszusammensetzung erfolgen.

Höhe	Temperatur	Ionisation	Gaszusammensetzung
über 60 000 km		Interplanetarischer Raum	
über 1000 km	Thermopause	Protosphäre (Exosphäre)	Heterosphäre
	Thermosphäre		
etwa 80 km	Mesopause	Ionosphäre	
etwa 50 km	Mesosphäre		
etwa 10 km	Stratopause	Neutrosphäre	Homosphäre
	Stratosphäre		
etwa 10 km	Troposphäre		
0 km		Erdboden	

Abbildung 2.9: Aufbau der Erdatmosphäre

Für die Untersuchung des Verhaltens elektromagnetischer Signale ist allerdings ein einfaches Modell ausreichend, welches nur zwei Bereiche unterscheidet [2, S. 123]:

- Troposphäre (bis rund 50 km über der Erdoberfläche)
- Ionosphäre (bis etwa 1000 km über der Erdoberfläche)

Im Folgenden wird die Refraktion<sup>26</sup> in beiden Schichten untersucht.

### Ionosphärische Refraktion

Innerhalb der Ionosphäre sind die vorhandenen Gasmoleküle durch die Ultraviolett- und Röntgenstrahlung der Sonne in hohem Maß ionisiert. Der Grad der Ionisation ist dabei aufgrund unterschiedlicher Strahlungsintensitäten unter anderem abhängig von der Ortszeit, der Jahreszeit und der geographischen Breite [2, S. 123].

Die Satellitensignale werden in der Ionosphäre durch freigesetzte Elektronen, das Magnetfeld der Erde und Kollisionen der Elektronen mit anderen Partikeln beeinflusst. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist daher nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit. Für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen ist ausschlaggebend, dass es sich bei der Ionosphäre um ein dispersives Medium handelt. Damit sind die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit unterschiedlich und es gilt [2, S.128]

$$v_{Ph} = c \left( 1 + \frac{40,3N_e}{f^2} \right), \quad (2.30)$$

<sup>26</sup>Brechung einer Wellenbewegung beim Übergang zu einem Medium mit anderem Brechungsindex

$$v_{Gr} = c \left( 1 - \frac{40,3N_e}{f^2} \right) \quad (2.31)$$

mit  $N_e$ : Elektronendichte (Anzahl der Elektronen pro  $m^3$ ). Die Herleitung dieser Gleichungen kann in [2, S. 126ff] nachgelesen werden.

### Troposphärische Refraktion

Im Gegensatz zur Ionosphäre befinden sich in der Troposphäre so gut wie keine freien Elektronen oder Ionen. Nach einem einfachen Modell besteht die Troposphäre aus einer feuchten Komponente, dem Wasserdampf, sowie einer trockenen Komponente, die sich aus verschiedenen Gasen zusammensetzt [2, S. 135].

Im Bereich der Radiowellen ist die Troposphäre ein nicht-dispersives Medium. Die Refraktion ist praktisch unabhängig von der Frequenz und damit die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit gleich. Auch in der Troposphäre ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit [1, S. 251f]. Der Brechungsindex hängt von der Temperatur, dem Druck und der Luftfeuchtigkeit ab und lässt sich mit folgender Formel berechnen [2, S.135]:

$$(n - 1) \cdot 10^{-6} = \frac{77,6}{T} \left( P + \frac{4810P_W}{T} \right), \quad (2.32)$$

- $T$ : Temperatur in K
- $P$ : Druck in mbar
- $P_W$ : Wasserdampfdruck in mbar

Die in die Formel eingehenden Parameter sind alle ortsabhängig, was ihre Bestimmung schwierig macht. Während das Verhalten von Temperatur und Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe über der Erdoberfläche gut abgeschätzt werden kann, ist die Bestimmung des Wasserdampfdrucks sehr kompliziert.

#### 2.4.1.4 Mehrwegeausbreitung

Eine der Hauptfehlerquellen bei der Übertragung der Signale vom Satelliten ist die Mehrwegeausbreitung (Multipath). Das von den Satelliten ausgesendete Signal erreicht das Empfangsgerät oft direkt und auf Umwegen. Vor allem in dicht besiedelten Gebieten werden die elektromagnetischen Wellen an Gebäuden, Fahrzeugen und anderen Hindernissen reflektiert und weitergeleitet. Erreicht das reflektierte Signal ebenfalls

die Antenne des Empfängers, so kommt es zu einer Überlagerung beider Signale. Hat das direkte Signal die Form

$$y_D = A \cos \phi_D \quad (2.33)$$

mit  $\phi_D$ : Phasenlage des direkten Systems, so kann das reflektierte Signal folgendermaßen beschrieben werden:

$$y_R = \epsilon A \cos (\phi_D + \Delta\phi_R). \quad (2.34)$$

Die Dämpfung des Signals wird durch  $\epsilon$  angegeben ( $\epsilon=1$ : keine Dämpfung,  $\epsilon=0$ : Reflexion),  $\Delta\phi_R$  ist die Phasenverschiebung gegenüber dem direkten Signal. Für das Mischsignal ergibt sich

$$y_D + y_R = A \cos \phi_D + \epsilon A \cos (\phi_D + \Delta\phi_R) \quad (2.35)$$

$$= A' \cos (\phi_D + \delta\phi); \quad (2.36)$$

$A'$  ist die Amplitude des Summensignals,  $\delta\phi$  der Fehler der beobachteten Trägerphase [2, S. 137]. Die wichtigsten Auswirkungen lassen sich wie folgt zusammenfassen [2, S. 140]:

1. Mehrwegeausbreitung führt zu Fehlern der Phasenlage des Signals, die sprunghaft auftreten können.
2. Durch Mehrwegeausbreitung wird die Amplitude des beobachteten Signals verändert. Mit zunehmendem Fehler der Phasenlage verschlechtert sich auch die Signalstärke.

## 2.4.2 Signalstrukturen

Jeder GPS-Satellit sendet permanent zwei Signale aus, das Signal  $L_1$  auf der Frequenz  $f_1=1575,42$  MHz (Wellenlänge  $\lambda_1=0,19$  m) und das Signal  $L_2$  auf der Frequenz  $f_2=1227,60$  MHz (Wellenlänge  $\lambda_2=0,24$  m). Die Gründe für die Auswahl dieser beiden Frequenzen sind vielfältig [3, S.161]:

- Die Verzögerung des Signals im Vakuum ist umso geringer, je höher die gewählte Frequenz ist.
- Die ionosphärische Verzögerung ist bei Frequenzen  $< 100$  MHz besonders groß, während die troposphärische Dämpfung bei hohen Frequenzen ( $> 10$  GHz) groß ist.

- Die Aussendung der Signale auf zwei Frequenzen ermöglicht den Nutzern beider Frequenzen die Bestimmung der ionosphärischen Verzögerung.
- Für die verwendeten PRN-Codes werden große Bandbreiten benötigt, die nur im Frequenzbereich des L-Bandes zur Verfügung stehen.

Die Grundfrequenz des Satellitenoszillators, aus der alle Frequenzen abgeleitet werden, beträgt  $f_0 = 10,23$  MHz (Wellenlänge  $\lambda_0 = 29,3$  m). Bei der Einstellung dieser Frequenz müssen relativistische Effekte berücksichtigt werden.

In der Speziellen Relativitätstheorie besagt das Phänomen der Zeitdilatation, dass Uhren in schnell bewegten Bezugssystemen langsamer gehen als solche in ruhenden Bezugssystemen [9, S. 330]. Übertragen auf das GPS-System bedeutet dies, dass die Uhren in den Satelliten langsamer gehen als die Uhr des Empfängers am Boden. Berücksichtigt man in Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie auch noch die Gravitationskräfte, so laufen Uhren in schwachen Gravitationsfeldern schneller als solche in starken Gravitationsfeldern [2, S. 250]. Da das Gravitationsfeld der Erde mit zunehmender Entfernung schwächer wird, folgt aus diesem Effekt, dass die Satellitenuhren schneller laufen als die Empfängeruhr.

Fasst man beide Effekte zusammen und betrachtet statt des Zeitversatzes die Frequenzverschiebung, so ergibt sich für das GPS-System, dass die Frequenz der Satellitenuhren um den Faktor  $4,5 \cdot 10^{-10}$  Hz höher ist als die einer Referenzuhr auf der Erdoberfläche [2, S. 250]. Um diesen Effekt auszugleichen und von einer Grundfrequenz von 10,23 MHz ausgehen zu können, werden die Frequenzen der Satellitenuhren auf einen Wert von

$$f = 10,22999999545 \text{ MHz} \quad (2.37)$$

eingestellt [1, S. 243].

#### 2.4.2.1 Signalmodulation

Um das Signal eines bestimmten Satelliten für den Empfänger erkennbar zu machen und die Navigationsnachricht zu übertragen, werden die Signale in mehreren Schritten moduliert, in dem die Phasen der Trägerfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  nach Maßgabe von pseudozufälligen Sequenzen der Werte +1 und -1 (PRN-Sequenzen) verändert werden. Bei einer *zufälligen* Sequenz nimmt jedes Element die Werte +1 und -1 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an, bei einer *pseudozufälligen* Sequenz wiederholt sich die Abfolge der Elemente nach einer gewissen Zeit, der Periode der Sequenz. Die Werte +1 und -1 sind im Fall der GPS-Signale Funktionswerte einer Treppenfunktion der Satellitenzeit  $T$  und bewirken folgendes [2, S. 162]:

- Bei +1 bleibt das Signal unverändert.

- Bei -1 erfolgt eine Phasenverschiebung um  $180^\circ$ .

In Abbildung 2.10 ist eine solche Phasenmodulation anschaulich dargestellt. Die Ursprungswelle wird zunächst in ihrer Frequenz angepasst und dann nach Maßgabe der Treppenfunktion  $F(T)$  phasenverschoben.

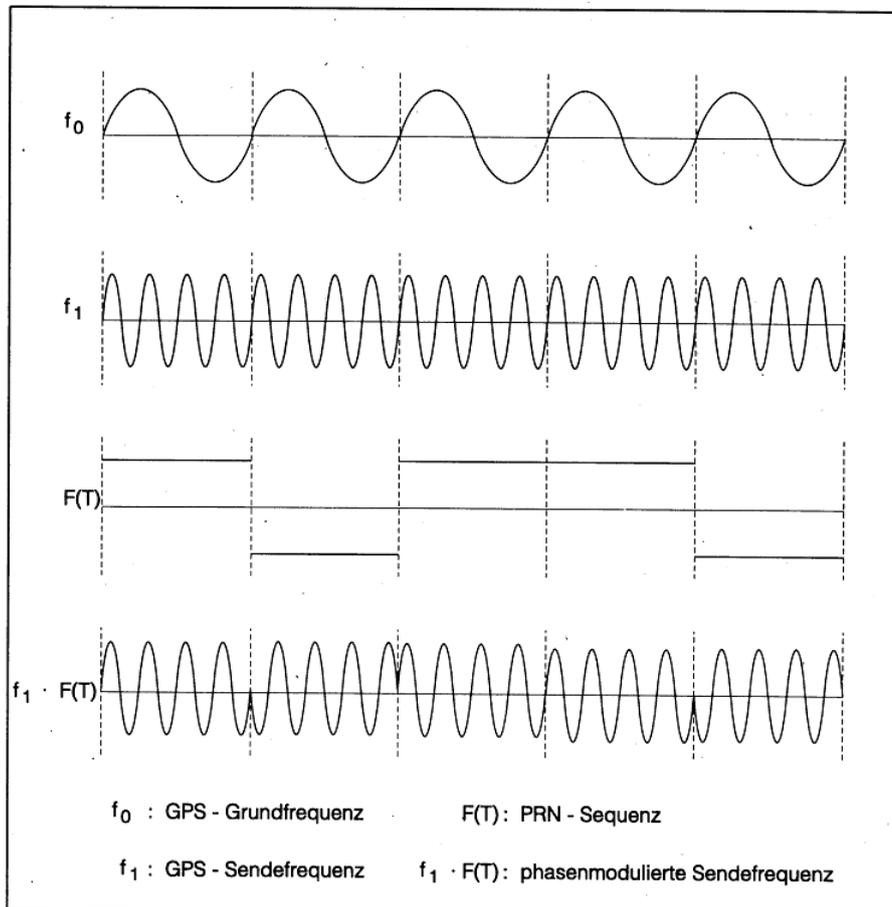


Abbildung 2.10: Phasenmodulation der GPS-Signale

Die Auswahl der für jeden Satelliten spezifischen PRN-Sequenz erfolgt so, dass die Sequenzen unterschiedlicher Satelliten nicht miteinander korrelieren. Dadurch interferieren die Signale der Satelliten im Wesentlichen nicht untereinander und die Signale können den Satelliten eindeutig zugeordnet werden [1, S. 83]. Um die Nutzung beider Frequenzen für zivile Nutzer einzuschränken, werden die beiden Signale  $L_1$  und  $L_2$  unterschiedlich kodiert.

### 2.4.2.2 Kodierung der Signale

Als erstes wird die Kodierung des öffentlich zugänglichen Signals  $L_1$  betrachtet. Um die Trägerfrequenz  $f_1$  zu erhalten, muss diese aus der Grundfrequenz abgeleitet werden; es gilt  $f_1 = 154 \cdot f_0$ . Durch Phasenverschiebung um  $90^\circ$  wird dann ein weiterer Träger erzeugt, so dass eine Sinus- und eine Kosinuswelle der Frequenz  $f_1$  vorliegen. Anschließend werden die beiden Wellen unterschiedlich moduliert und die Addition der modulierten Wellen wird ausgesendet [2, S.163]. In der folgenden Tabelle wird die Modulation der Wellen mit den unterschiedlichen Codes gegenüber gestellt [2, S. 164f]:

	<b>Sinuswelle</b>	<b>Kosinuswelle</b>
Art des Codes	C/A-Code	P-Code
Modulationstakt	$\frac{f_0}{10} = 1,023$ MHz	$f_0 = 10,23$ MHz
Periode	1 ms	266 Tage
Anzahl der Elemente $\pm 1$	1023	$235109952 \cdot 10^{-6}$
Verhältnis Trägerfrequenz:Modulationstakt	1540	154
Wellenlänge des Codes	293 m	29,3 m

Tabelle 2.2: Modulation der Wellen mit C/A- und P-Code

Der Modulationstakt gibt dabei an, in welchem Takt die Treppenfunktion der PRN-Sequenz ihren Wert ändert bzw. behält. Die Periode ist die Länge der sich wiederholenden Sequenz, so dass sich als Produkt aus Modulationstakt und Periode die Anzahl der Elemente  $+1$  und  $-1$  innerhalb einer Sequenz ergibt. Durch das Verhältnis Trägerfrequenz zum Modulationstakt wird bestimmt, wie viele Wellen eines Wellenzugs moduliert werden. Im Fall des C/A-Codes ist das zum Beispiel jede 1540-te Welle. Die Multiplikation mit der Wellenlänge des  $L_1$ -Signals  $\lambda_1 = 0,19$  m liefert die ‘Wellenlänge des Codes’.

Auf die Modulation mit den PRN-Sequenzen folgt die Daten-Code-Modulation, die bei beiden Wellen gleich ist. Zur Durchführung einer Ortung in Echtzeit müssen die Bahndaten der Satelliten und einige Zusatzinformationen ständig zur Verfügung stehen. Das Signal muss daher diese Daten als Navigationsnachricht mit enthalten, welche durch eine weitere Phasenmodulation auf das Signal übertragen wird. Die Nachricht selbst ist eine 30s dauernde Sequenz von  $\pm 1$  im Takt von 50 Hz. Damit wird jede 31.508.400-te Welle zusätzlich mit Daten moduliert [2, S.165].

Für das  $L_2$ -Signal verläuft die Kodierung analog. Zunächst wird mittels  $f_1 = 120 \cdot f_0$  die Trägerfrequenz erzeugt, im Gegensatz zum  $L_1$ -Signal wird aber nur die Kosinuswelle moduliert und ausgestrahlt. Die P-Code- und Daten-Modulation erfolgt nach dem gleichen Verfahren wie die Modulation der Kosinuswelle des  $L_1$ -Signals [2, S.166].

Nach der Modulation werden die beiden Signale von den Satelliten ausgesendet und können dann zur Bestimmung der Pseudoentfernung vom Benutzer verwendet werden. Zivile Benutzer können dafür meist nur den C/A-kodierten Teil des  $L_1$ -Signals nutzen. Der allgemeine Zugang zum PPS wird durch zwei verschiedene Techniken, *Selected Availability (SA)* und *Anti-Spoofing (A-S)*, eingeschränkt.

#### **2.4.2.3 Selected Availability und Anti-Spoofing**

Über die *Selected Availability* wählt der Systembetreiber, wie hoch die Genauigkeit ist, die dem GPS-Nutzer allgemein zur Verfügung steht. Die Genauigkeit der Positionsbestimmung wird dabei durch leicht verfälschte Satellitenbahndaten und ein künstliches Verrauschen der Trägersignale verschlechtert. Nach langer Diskussion wurde die SA im Jahr 2000 abgeschaltet. Sie kann jedoch jederzeit wieder in Betrieb genommen und auf beide Codes und beide Frequenzen angewendet werden [2, S. 168].

Das Anti-Spoofing ist eine Maßnahme, die verhindern soll, dass Empfängergeräte durch von militärischen Gegnern ausgesendete Signale mit falschen Informationen getäuscht werden. Dazu wird der P-Code zum Y-Code verschlüsselt, damit nicht autorisierte Nutzer für die Positionsbestimmung nur den C/A-Code verwenden können. Autorisierte GPS-Nutzer haben in den Empfangsgeräten Module eingebaut, die SA und A-S rückgängig machen und so die volle Genauigkeit liefern [2, S. 169].

Die Anwendung der beiden Techniken steht in der alleinigen Verantwortung der USA, so dass diese die Genauigkeit der absoluten Positionierung mit GPS jederzeit steuern können.

### **2.4.3 Auswertung der Signale**

Um die Position des Nutzers bestimmen zu können, müssen die von den Satelliten ausgesendeten kodierten Signale im GPS-Empfangsgerät ausgewertet werden. Dabei muss zum Beispiel die aufmodulierte Navigationsnachricht von der Trägerwelle getrennt werden. Zur Bestimmung der Pseudo-Entfernung zwischen Satellit und Nutzer wird im GPS-Empfangsgerät eine Codephasen-Messung durchgeführt.

#### **2.4.3.1 Codephasen-Messung**

Es wird nun erläutert, wie aus den kodierten Signalen die Pseudo-Entfernung gewonnen wird. Das Prinzip des Messverfahrens ist die Bestimmung der Laufzeit des Signals über Kreuzkorrelationen. Dazu wird im GPS-Empfangsgerät nach Maßgabe der PRN-Sequenz eine Rekonstruktion des Satellitensignals gebildet. Die Kreuzkorrelation des Satellitensignals mit der Rekonstruktion liefert dann bei maximaler Korrelation die

Phasenverschiebung des Signals, aus der die Laufzeit berechnet werden kann [2, S. 178].

Die einzelnen Schritte des Verfahrens werden im Folgenden genauer betrachtet:

- Der Satellit XY sendet das kodierte Signal der Trägerfrequenz  $f$  aus.
- Dieses wird im Empfänger doppler-frequenzverschoben als  $f_E$  empfangen.
- Im Empfänger erzeugt ein in Frequenz und Phase nachsteuerbarer Oszillator eine interne Frequenz  $f_i$ .
- Diese Frequenz wird so eingestellt, dass sie gleich der Trägerfrequenz  $f_E$  ist. Da der Satellit in Bewegung ist, ändert sich die Dopplerfrequenz  $f_E$  ständig. So lange der Satellit sichtbar ist, wird  $f_i$  daher fortlaufend nachgeführt.
- Auch  $f_i$  wird durch Phasenmodulation kodiert. Im Empfänger sind die PRN-Sequenzen aller Satelliten gespeichert, so dass die Frequenz nach Maßgabe aller möglichen PRN-Codes moduliert werden kann. Durch Vergleich der modulierten Frequenz mit dem Satellitensignal wird die richtige Sequenz herausgefiltert. Wichtig ist hierfür, dass die PRN-Codes untereinander auch bei Dopplerverschiebung minimal korrelieren.
- Im Empfänger liegt nun - bis auf die Datenmodulation - ein Duplikat des Satellitensignals vor, welches mit diesem korreliert werden kann. Falls die beiden Signale im Satellit und Empfänger zur gleichen Zeit erzeugt wurden, sind das ankommende Satellitensignal und sein Duplikat genau um die Laufzeit des Satellitensignals versetzt.
- Bei der anschließenden Kreuzkorrelation wird durch Multiplikation beider Signale die Korrelationsfunktion gebildet. Zunächst verschiebt sich die Phase des Referenzsignals so lange, bis eine Überhöhung der Korrelationsfunktion aufzeigt, dass beide Signale in Phase sind. Die exakte Zeitversetzung wird durch ein schrittweises Verzögern des Codegenerators bis zur Übereinstimmung der Codes beider Signale bestimmt. Diese ist dann erreicht, wenn die Kreuzkorrelationsfunktion nur +1 Werte enthält. Die PRN-Sequenzen sind dabei so gewählt, dass dieser Fall mit großer Schärfe nur dann eintritt, wenn Frequenz, Phase und Phasenmodulation der korrelierten Signale exakt übereinstimmen. Die damit bestimmte Phasenverschiebung des Signals - die Codephase - ist ein Maß für die Laufzeit  $\Delta T$  des Satellitensignals

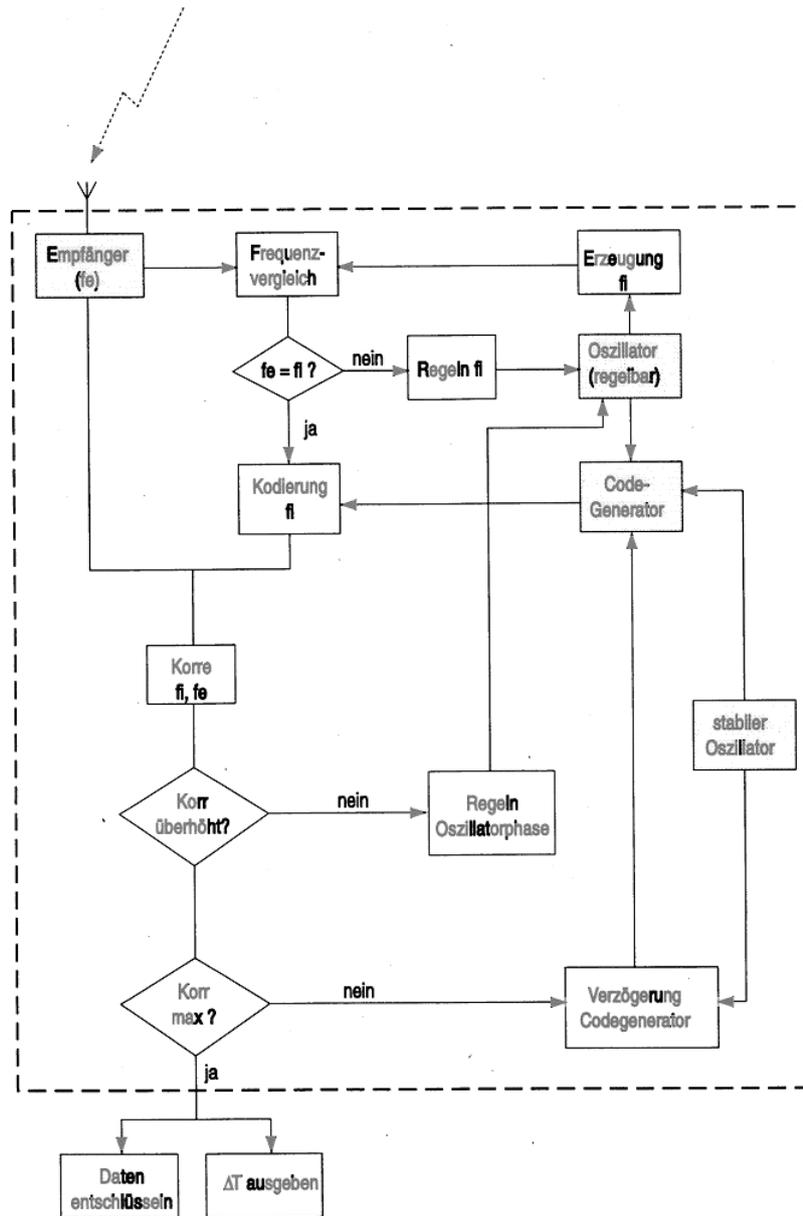


Abbildung 2.11: Prinzip der Kreuzkorrelation in GPS-Empfängern

- Wird das einkommende Signal mit dem empfangnerintern erzeugten verzögerten Code erneut moduliert, so wird die Kodierung bis auf die Datenmodulation aufgehoben.
- Durch ein ständiges Nachsteuern des Codegenerators wird erreicht, dass die Verzögerung  $\Delta T$  immer zur Verfügung steht.
- Es lässt sich nun die Pseudoentfernung  $\Delta T \cdot c$  bestimmen. Da die Geschwindigkeit des Signals nicht genau der Lichtgeschwindigkeit entspricht und die Zeitmessung im Empfänger um den Empfängeruhrfehler korrigiert werden muss,

handelt es sich bei der Pseudoentfernung nicht um die tatsächliche Entfernung von Satellit und Empfänger.

- Unter Berücksichtigung des Empfängeruhrenfehlers  $\Delta t$  (und Vernachlässigung der atmosphärischen Verzögerungen) gilt für die Entfernung Satellit - Empfänger

$$R = \Delta T \cdot c + \Delta t \cdot c. \quad (2.38)$$

Die Suchfrequenz, mit der die Anpassung der Codes erfolgt, beträgt 50 Bit/s. Da der C/A-Code aus 1023 Bits besteht, kann es bis zu 20,46 s dauern bis der Suchvorgang abgeschlossen ist. Weil die Periode des Codes aber nur 1 ms beträgt, ist die Pseudoentfernung nur modulo  $1 \text{ ms} \cdot c = 300 \text{ km}$  berechenbar.

Bei der Nutzung des P-Codes tritt dieses Problem der Mehrdeutigkeit nicht auf. Der Code hat eine Periode, die länger als die Signallaufzeit ist, wodurch die Kreuzkorrelation eine eindeutige Pseudostrecke liefert [2, S. 182].

### 2.4.3.2 Bestimmung der Empfängerposition

Nach der Auswertung der Codephase und der Bestimmung der Pseudoentfernung soll nun die Position des Empfängers bestimmt werden. Durch Auswertung der Codephasen der Signale vier verschiedener Satelliten erhält man die Pseudoentfernungen

$$\Delta T_i \cdot c, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.39)$$

Falls die Satellitenuhren untereinander perfekt synchronisiert sind und unter Vernachlässigung atmosphärischer Effekte ergeben sich folgende Gleichungen [2, S. 190]

$$(\Delta T_i \cdot c + \Delta t \cdot c)^2 = (x_S - x_E)^2 + (y_S - y_E)^2 + (z_S - z_E)^2, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (2.40)$$

wobei

- $\Delta T_i$ : gemessene Laufzeiten der Satellitensignale,
- $x_S, y_S, z_S$ : bekannte Satellitenkoordinaten,
- $\Delta t$ : unbekannter Empfängeruhrfehler,
- $x_E, y_E, z_E$ : unbekannte Koordinaten des Empfängers.

Aus den vier Gleichungen mit vier Unbekannten können die Koordinaten des Empfängers sowie der Empfängeruhrfehler bestimmt werden, wobei folgende Punkte berücksichtigt werden müssen [2, S. 191]:

1. Der Zeitpunkt der Signalausendung der Satelliten und damit auch die Koordinaten der Satelliten sind zunächst unbekannt.
2. Die Drehung der Erde während des Prozesses muss berücksichtigt werden.
3. Die Pseudostrecken sind beim C/A-Code nicht eindeutig.
4. Atmosphärische Laufzeitverzögerungen müssen berücksichtigt werden.
5. Im Normalfall sind die Satellitenuhren nicht streng synchron.
6. Das funktionale Modell (Gleichungen) ist nicht linear.

In der Realität wird deshalb im Empfänger ein Algorithmus verwendet, der ... [2, S. 191ff]

1. ... Näherungswerte für die Empfängerposition und den Empfängeruhrfehler verwendet, auf deren Basis die Pseudostrecken und die Satellitenkoordinaten berechnet werden.
2. ... die Satellitenkoordinaten in ein auf WGS-84 basierendes Koordinatensystem transformiert, wodurch die Rotation der Erde miteinbezogen wird.
3. ... die Zahl der ganzzahligen Millisekunden mal 300 km zu der Pseudostrecke addiert, um die wahre Entfernung zu erhalten.
4. ... Korrekturmodelle für Laufzeitfehler durch atmosphärische Verzögerungen berücksichtigt.
5. ... Korrekturparameter für die Satellitenuhrfehler aus der Navigationsnachricht mit einrechnet.
6. ... das Gleichungssystem linearisiert und dann löst.

Die genaue Funktionsweise des Algorithmus kann in [2, S. 190ff] nachgelesen werden.

#### **2.4.4 Zusammenfassung**

Bei den Satellitensignalen, über die die Übertragung aller zur Positionsbestimmung notwendiger Daten zum Benutzer erfolgt, handelt es sich um elektromagnetische Wellen. Diese werden aus der Grundfrequenz des Satellitenoszillators erzeugt und anschließend moduliert und kodiert. Dadurch werden sie Träger einer Navigationsnachricht und können einem Satelliten zugeordnet werden. Die Aussendung der Signale

erfolgt auf zwei Frequenzen, von denen nur eine öffentlich nutzbar ist. Auf ihrem Weg zum Empfangsgerät durchlaufen die Wellenpakete die Erdatmosphäre. Da es keinen für alle Bereiche der Atmosphäre gültigen Brechungsindex gibt, ändert sich dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Nach dem FERMATschen Satz schlägt eine elektromagnetische Welle auf ihrem Weg von einem Raumpunkt zum anderen den schnellsten Weg ein, was zur Folge hat, dass das Signal auf einer Raumkurve verläuft. Um die für die Laufzeitmessung notwendige Geschwindigkeit und den Weg des Signals dennoch bestimmen zu können, müssen verschiedene Kenngrößen der Atmosphärenbereiche berechnet oder abgeschätzt werden. Nach dem Empfang des Signals wird dieses vom GPS-Empfängergerät ausgewertet. Durch Erzeugen eines identischen Signals und vergleichen beider Signale kann die Laufzeit des Satellitensignals bestimmt werden. Aus dieser lässt sich die Pseudo-Entfernung zu dem Satelliten bestimmen. Da im Empfangsgerät mehrere Satellitensignale gleichzeitig ausgewertet werden können, ergeben sich ausreichend Gleichungen, um die Position des Benutzers 3-dimensional zu bestimmen.

## 2.5 Fehlerquellen bei GPS

Die Genauigkeit der Positionsbestimmung mit GPS hängt von vielen zusammenhängenden Faktoren ab, die in den einzelnen Kapiteln beschrieben wurden. An dieser Stelle soll ein Überblick über die Fehlerquellen und ihren Einfluss auf die Genauigkeit der Positionsangaben gegeben werden. Am stärksten wird die Genauigkeit durch die beabsichtigten Störungen SA und A-S beeinflusst. So kann bei eingeschalteter SA mit zivilen Empfängergeräten nur bis auf ca. 100 m genau navigiert werden. Da die SA bis auf unbestimmte Zeit deaktiviert ist, werden die Fehlerquellen aufgeführt, die nach ihr den größten Einfluss auf die Navigationsgenauigkeit haben. Es wird dabei eine Unterscheidung zwischen folgenden Fehlergruppen getroffen [2, S. 249]:

1. Satellitenfehler
2. Signalausbreitungsfehler
3. Empfängerfehler.

### 2.5.1 Satellitenfehler

Betrachtet man die Satelliten, so gibt es zwei zentrale Fehlerquellen - die Ephemeriden und die Satellitenuhren.

- **Ephemeridenfehler:**

Die optimale Abschätzung der Ephemeride wird für jeden Satelliten in der MCS berechnet und übertragen. Da es sich jedoch immer nur um Abschätzungen handelt, weil zum Beispiel die nicht-gravitativen Störungseinflüsse der Satellitenbahnen nicht exakt berechnet werden können, ist ein ständiger Fehler vorhanden, der bis zu 5 m in der Positionsgenauigkeit ausmacht [1, S. 241].

- **Uhrenfehler:**

Bei den Satellitenuhren handelt es sich um sehr genaue Atomuhren, die alle Tätigkeiten kontrollieren und die Generierung der Übertragungssignale steuern. Obwohl vom Kontrollsystem aus Parameter zur Korrektur der Uhren gesendet werden, kann es zeitweise zu einer Abweichung der Satellitenzeit von der GPS-Systemzeit von bis zu 1 ms kommen, durch die sich ein Messfehler von 1 m ergibt.

## 2.5.2 Signalausbreitungsfehler

Bezüglich der Signale sind drei verschiedene Effekte zu berücksichtigen:

- **Ionosphärische Refraktion** [2, S. 251]:

Wird statt der wirklichen Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Ionosphäre mit der Lichtgeschwindigkeit gerechnet, so ergibt sich bei der Positionsangabe ein Fehler von bis zu 50 m. Da die Verzögerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Ionosphäre frequenzabhängig ist, kann bei Zwei-Frequenzempfängern durch Vergleich der Laufzeit der Signale  $L_1$  und  $L_2$  dieser Fehler bis in den cm/dm-Bereich korrigiert werden.

Bei Ein-Frequenzempfängern erfasst das in der Navigationsnachricht enthaltene KLOBUCHAR-Modell, welches die Verzögerung abschätzt, etwa 50% der ionosphärischen Laufzeitfehler. Es verbleibt eine Messungenauigkeit von 2 m bis hin zu 100 m in Extremfällen.

- **Troposphärische Refraktion** [2, S. 251]:

Bei der troposphärischen Refraktion ist eine ungenügende Kenntnis der Refraktionskoeffizienten ursächlich für Messungenauigkeiten von bis zu 25 m. Vor allem die ortsabhängige Bestimmung des Wasserdampfdrucks, von dem der Koeffizient abhängt, ist problematisch. Durch Modellrechnungen, die mit der Navigationsnachricht übertragen werden, kann der Fehler jedoch bis auf dm verringert werden.

- **Mehrwegausbreitung:**

Die Mehrwegeausbreitung ist einer der Hauptfehler bei der Positionsbestimmung. Sie beeinflusst neben der Phase und der Amplitude der Trägerfrequenz auch den Code und die Daten. Der Peak der Korrelationskurve wird verschoben, was falsche Abstandsberechnungen zur Folge hat, und im Extremfall kann das Signal ganz verloren gehen, weil eine Nachführung der Referenzfrequenz nicht mehr möglich ist [1, S. 256].

Wenn der Umweg des reflektierten Signals länger ist als die Wellenlänge des Codes des direkten Signals, wird das reflektierte Signal im Empfänger allerdings nicht berücksichtigt. Ist dies nicht der Fall, so ergibt sich abhängig vom Code (und seiner Wellenlänge) ein unterschiedlich großer Messfehler. Für den kürzeren C/A-Code beträgt er 1 m, für den P-Code 5 m. Die Verhinderung der Mehrwegeausbreitung ist Gegenstand intensiver Nachforschung. Eine mögliche Maßnahme ist die Anpassung der Antennen [2, S.251].

### 2.5.3 Empfängerfehler

Auch im Hinblick auf die GPS-Empfängergeräte gibt es verschiedene Fehlerquellen:

- **Messrauschen** [1, S. 255f]:

Im Empfänger wird das Signal vor allem durch das Messrauschen beeinflusst. Mögliche Quellen für dieses sind temperaturbedingte Störungen, die Code-Hardware oder die Stabilität des Oszillators. Der sich aus dem Messrauschen ergebende Messfehler hat Zufallscharakter und ist proportional zur Wellenlänge des Codes. Deshalb ist er für den P-Code mit bis zu 10 m größer als für den C/A-Code mit 0,1-1 m.

- **Hardware-Verzögerungen** [2, S. 250]:

Eine weitere Fehlerquelle im Empfänger sind Hardware-Verzögerungen. Diese weisen im Gegensatz zum Messrauschen einen systematischen Charakter auf, der Fehler liegt für beide Codes im dm/m-Bereich.

### 2.5.4 Gesamtüberblick

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Gesamtüberblick über die bei den Pseudoentfernungsmessungen maßgeblichen Fehler.

Fehlerhaushalt GPS		P-Code		C/A-Code	
Satelliten		SA on	SA off	SA on	SA off
	Bahnfehler	10 - 40 m	5 m	10 - 40 m	5 m
	Uhrenfehler	10 - 50 m	1 m	10 - 50 m	1 m
Signal- ausbreitung	Ionosphäre (2-Frequenz)	cm - dm		cm - dm	
	(1-Frequenz)	-		2 - 100	
	Troposphäre	dm		dm	
	Multipath	1m		5m	
Empfänger	Rauschen	0,1 - 1 m		1 - 10 m	
	Systematischer Fehler	dm - m		m	
	Phasenzentrum	mm - cm		mm - cm	

Abbildung 2.12: Fehlerbudget der Pseudoentfernungsmessung

Bei geringer ionosphärischer Verzögerung und Mehrwegausbreitung ergibt sich, unabhängig vom Code, eine Standardabweichung der Fehler, die unter 10 m liegt. Eine Abschätzung des zum jeweiligen Zeitpunkt zu erwartenden Gesamtfehlers wird dem Benutzer als UERE<sup>27</sup> in der Navigationsnachricht mitgeteilt [2, S. 252].

Um die tatsächliche Genauigkeit der berechneten Position anzugeben, muss aber noch die Genauigkeit bei der Auswertung der Pseudostreckenmessung berücksichtigt werden. Dies erfolgt mittels der sogenannten DOP<sup>28</sup>-Faktoren, welche ein Maß für die ‘Güte’ der Satelliten-Empfänger-Geometrie sind. Die Berechnung der Werte erfolgt über Bestimmung der günstigsten Konstellation von dem Benutzer und den vier Satelliten und der Abweichung der realen Situation von der idealen. Die DOP-Faktoren geben damit keine unabhängigen Fehler an, sondern vervielfachen die Werte der anderen Fehler. Es gilt somit für den Gesamtfehler

$$\sigma_{ges} = DOP \cdot \sigma_{UERE}, \quad (2.41)$$

wobei  $\sigma_{UERE}$  die Standardabweichung der PSR-Fehler ist und  $DOP$  ein Faktor, der die unterschiedlichen DOP-Werte zusammenfasst.

<sup>27</sup>User Equivalent Range Error

<sup>28</sup>dilution of precision

## 2.5.5 Erhöhte Genauigkeit durch DGPS

Bei voller Ausschöpfung des technischen Potentials ist mit einem autonomen Empfängergerät (nur C/A-Code) eine Positionsbestimmung auf  $\pm 10$  m möglich [2, S. 232]. Viele zivile Anwendungen benötigen jedoch eine höhere Genauigkeit. Ein Beispiel ist die U.S. Coast Guard, die die GPS - Dienste zum Navigieren nutzt und in manchen Häfen oder Engstellen auf eine sehr hohe Genauigkeit angewiesen ist [1, S. 321]. Zur Steigerung der Genauigkeit für zivile Nutzer wird deshalb folgendes Prinzip angewendet, welches mit dem Begriff *Differentielles GPS* (DGPS) bezeichnet wird: Eingebaute Empfänger bestimmen die Position von festen Referenzstationen mit bekannten Koordinaten. Aus der Differenz der bekannten und der bestimmten Abgaben werden dann Korrekturwerte zur Verbesserung der bestimmten Positionsangabe errechnet.

Eine dazu notwendige Annahme ist, dass Empfängergeräte in der Nähe einer Referenzstation durch Fehler gleichermaßen beeinflusst werden wie die Station. Unter dieser Annahme können die Korrekturparameter allen Benutzern in einem gewissen Bereich um die Referenzstation zur Korrektur ihrer Daten mitgeteilt werden [2, S. 232].

Die erforderlichen Systemkomponenten des DGPS sind daher [2, S. 232]:

- **Referenzstationen:**

Die Referenzstationen werten Satellitensignale zusammen mit den tatsächlichen Koordinaten aus und errechnen daraus die DGPS - Korrekturdaten. Ein DGPS - Sender strahlt diese als Korrektursignal aus.

- **Nutzerstation:**

Der Benutzer empfängt das Signal zusätzlich zu den Satellitensignalen und demoduliert es. Damit stehen ihm die Korrekturdaten zur Verfügung. Anschließend werden die Daten formatiert und mit den Satellitenbahndaten und Messgrößen verarbeitet.

Das Ergebnis der DGPS-Anwendung sind DGPS - korrigierte Positions-, Zeit- und Geschwindigkeitsangaben. Vor allem Fehler im Prozess der Pseudoentfernungsmessung wie zum Beispiel ionosphärische/ troposphärische Verzögerungen, das Empfängerrauschen und die Ungenauigkeit der Empfängeruhr können so korrigiert werden. Da manche der Fehler abhängig von der Entfernung sind, ist die Fehlerkorrektur in großen Entfernungen von der Referenzstation ungenauer [1, S. 322].

Um unterschiedliche Messfehler möglichst genau korrigieren zu können, gibt es verschiedene Anwendungen des DGPS, die aber hier nicht betrachtet werden sollen.

Durch die erfolgten Betrachtungen soll lediglich das Grundprinzip der Erhöhung der Messgenauigkeit durch DGPS verdeutlicht werden.

# Kapitel 3

## Die Nutzung des GPS im Physikunterricht des Gymnasiums

Im dritten Kapitel dieser Arbeit sollen Möglichkeiten der Verwendung des GPS-Systems im Physikunterricht des Gymnasiums aufgezeigt werden. Dabei erfolgt zunächst eine kurze Diskussion darüber, warum und an welchen Stellen der Einsatz von GPS-Geräten im Unterricht sinnvoll ist. Anschließend werden einige Projekte unterschiedlicher Komplexität vorgestellt, wodurch die Einsatzmöglichkeiten in verschiedenen Klassenstufen deutlich gemacht werden. Um die Versuche für den Leser nachvollziehbar zu beschreiben und eine eigene Durchführung zu ermöglichen, wird auf eine ausführliche Beschreibung geachtet. Dabei wird auf das verwendete GPS-Empfangsgerät und die wichtigsten Einstellungen an diesem genau so eingegangen wie auf die Möglichkeiten der Datenauswertung und -darstellung.

### 3.1 Gründe für den Einsatz des GPS in der Schule

In dem Kernlehrplan Physik für die Sekundarstufe I des Gymnasiums wird die naturwissenschaftliche Grundbildung als Ziel des naturwissenschaftlichen Unterrichts wie folgt definiert [16, S. 8]:

*Unter naturwissenschaftlicher Grundbildung (Scientific Literacy) wird die Fähigkeit verstanden, naturwissenschaftliches Wissen anzuwenden, naturwissenschaftliche Fragen zu erkennen und aus Belegen Schlussfolgerungen zu ziehen, um Entscheidungen zu verstehen und zu treffen, welche die natürliche Welt und die durch menschliches Handeln an ihr vorgenommenen Veränderungen betreffen.*

Der Beitrag des Fachs Physik zur naturwissenschaftlichen Grundbildung liegt vor allem darin [16, S. 9], '[...] eine wesentliche Grundlage für das Verstehen natürlicher Phänomene und für die Erklärung und Beurteilung technischer Systeme und Entwicklungen [...]' zu schaffen. Durch lernprozessorientiertes Lehren und handlungsorientiertes Lernen sollen die Schülerinnen und Schüler ausgehend von Alltagserfahrungen und Vorstellungen ihre naturwissenschaftlichen Konzepte und Sichtweisen weiter entwickeln [16, S. 11]. Für die Gestaltung des Unterrichts ist ein zentraler Baustein, dass [16, S. 12] '[...] die bei Schülerinnen und Schülern anzutreffende Freude am Entdecken und Lernen genutzt und weiter gefördert [wird].'

Naturwissenschaftliche Zusammenhänge und neue Konzepte können von den Schülerinnen und Schülern dabei leichter erstellt werden, wenn sie die Möglichkeit bekommen, eigenes Erleben und Handeln, auf Modelle und Theorien gestützt, beschreiben und erklären zu können. In diesem Zusammenhang wird der Nutzung neuer Medien eine wichtige Rolle zugeschrieben. Werden diese bei der Planung, Durchführung und Auswertung von Experimenten eingesetzt, so kann das Interesse der Schüler geweckt und gleichzeitig die Entwicklung neuer Techniken thematisiert werden [16, S. 12].

Ähnliche Ansätze finden sich auch im Lehrplan Physik für die Sekundarstufe II des Gymnasiums wieder. Bezüglich der Fähigkeiten und Fertigkeiten, die Schülerinnen und Schüler in der gymnasialen Oberstufe erlernen sollen, werden unter anderem folgende Aspekte genannt [18, S. 14]:

- Erscheinungen in Natur, Umwelt, Technik und Experiment aus physikalischer Sicht beobachten und Phänomene unter physikalischen Fragestellungen theorie- und modellgeleitet beschreiben und analysieren
- aus Beobachtungen physikalische Fragestellungen entwickeln und formulieren bzw. mit physikalischen Methoden den mithilfe der Physik beschreibbaren Bereich des jeweiligen Wirklichkeitsausschnitts erschließen sowie Arbeitshypothesen aufstellen, überprüfen und modifizieren
- umfangreichere und anspruchsvollere Experimente planen, sorgfältig durchführen und auswerten
- physikalische Erkenntnisse zur Klärung von Problemen der Lebenswelt heranziehen

Auch hier wird dem Einsatz von neuen Medien im Rahmen der Messwerterfassung und -auswertung eine besondere Bedeutung zugewiesen [18, S. 25].

In allen diesen Aspekten finden sich Gründe, die für den Einsatz von GPS-Empfangsgeräten als Messgeräte im Physikunterricht sprechen. Als neues Medium

stellt das GPS-Gerät ein technisches Hilfsmittel dar, welches sicherlich alle Schülerinnen und Schüler aus ihrem Alltag kennen. In vielen neuen Automodellen sind GPS-Navigationsgeräte Standardausstattung, bei Wanderungen und Orientierungsläufen hält die Nutzung von GPS-Geräten immer mehr Einzug und das Geocaching, die moderne Schatzsuche mit GPS-Geräten, ist mittlerweile weit verbreitet. Da die GPS-Empfangsgeräte je nach Typ Angaben zu Positionen, Entfernungen, Zeiten, Geschwindigkeiten, Höhen und bei eingebautem Barometer sogar zum Luftdruck machen können, bieten sich viele Ansätze für mögliche Experimente. Die Tatsache, dass sicherlich einige Schülerinnen und Schüler selbst oder deren Bekannte/Verwandte ein GPS-Empfangsgerät besitzen, macht das GPS-Empfangsgerät zudem als Messgerät für Schülerversuche interessant.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen Versuche für den Mechanikunterricht beschrieben werden, die die unterschiedlichen Bewegungsformen (gleichmäßige Bewegung, gleichmäßig beschleunigte Bewegung etc.) zum Thema haben. In diesem Zusammenhang soll noch auf einen weiteren Punkt eingegangen werden, der die positiven Aspekte der Verwendung des GPS-Systems für den Unterricht verdeutlicht.

Schon seit längerer Zeit ist bekannt und wird immer wieder festgestellt, dass Schüler im Rahmen des Dynamikunterrichts bis zur elften Klasse hin häufig Fehlvorstellungen bezüglich der Zusammenhänge zwischen Kräften und Bewegungen entwickeln. In verschiedenen Tests, wie zum Beispiel dem Force Concept Inventory<sup>1</sup>, wurde seit den achtziger Jahren die physikalische Vorstellungswelt von Schülerinnen und Schülern, insbesondere im Bereich der Mechanik, analysiert. In [19] findet sich die Beschreibung eines Tests wieder, mit dem anhand verschiedener Testfragen untersucht wurde, wieweit Schülerinnen und Schüler nach dem Dynamikunterricht der elften Klasse Vorstellungen erworben hatten, die den Newtonschen Gesetzen entsprechen. Die Ergebnisse dieses Tests sollen hier in kurzer Form dargestellt werden.

Besonders auffällig war, dass ein großer Teil der Schüler - je nach Frage 30 bis 75% - Kräfte in Bewegungsrichtung proportional zur Geschwindigkeit annahm [19, S. 280]. Dabei traten bei Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit die wenigsten, bei langsamer werdenden Bewegungen die größten Schwierigkeiten auf [19, S. 281]. Bei qualitativen Fragestellungen fiel zudem auf, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst lebensweltliche Vorstellungen anbrachten und erst nach genauerem Nachdenken in anschließenden Diskussionen die Sachverhalte gemäß physikalischer Vorstellungen strukturierten. Die Herausgeber des Tests ziehen aus diesen Ergebnissen folgende Schlussfolgerung [19, S. 284f]:

*Das fordert natürlich sofort zu der Frage heraus, ob und wie heute ein Unterricht zur Dynamik so gestaltet werden kann, daß bessere Lernerfolge*

---

<sup>1</sup>Dateils nachzulesen in [20]

*erreichbar werden. In einer neu zu konzipierenden Lernsequenz kommt es darauf an, die Ursachen für die bekannten gravierenden Lernschwierigkeiten zu berücksichtigen, d.h. sie z. T. zu thematisieren bzw. ihnen durch veränderte methodische Vorgaben und den Einsatz von geeigneten Medien zu begegnen.*

Durch die im Folgenden beschriebenen Experimente können den Schülerinnen und Schülern verschiedene Bewegungen interessant und alltagsnah vermittelt werden. Dabei soll die Verwendung des GPS-Systems jedoch nicht als ‘Allheilmittel’ für alle der Mechanik inne liegenden Problematiken dargestellt werden. Wo die Probleme bei GPS-Messungen liegen, auf die im Unterricht ebenfalls eingegangen werden sollte, wird im Zuge der einzelnen Versuche dargestellt. Als Ergänzung zum herkömmlichen Dynamikunterricht und in Kombination mit dem Einsatz weiterer Medien können Messungen mit GPS-Empfängergeräten allerdings eine Bereicherung des bestehenden Unterrichts darstellen, die dazu beitragen kann, den Fehlvorstellungen, die im Mechanikunterricht entwickelt werden können, entgegen zu treten.

## **3.2 Allgemeine Grundlagen**

Bevor die einzelnen Experimente erläutert werden, sollen einige technische Grundlagen aufgeführt werden. Dabei werden das verwendete GPS-Empfängergerät sowie die Übertragung und Auswertung der Daten betrachtet.

### **3.2.1 Das GPS-Empfängergerät**

Alle in den Experimenten bestimmten Messdaten wurden mit dem eTrex Vista Cx der Firma Garmin gewonnen. Bei diesem Gerät handelt es sich um einen Handempfänger, der einen Mehrkanalempfänger besitzt und dadurch bis zu 12 Satelliten gleichzeitig zur Positionsbestimmung nutzen kann. Das eTrex Vista Cx verfügt über einen eingebauten barometrischen Höhenmesser, der auf 3 m genaue Höhenangaben liefert. Die Genauigkeit für die Positionsangaben liegt zwischen 5 und 10 m, bei eingeschaltetem DGPS erhöht sich die Genauigkeit auf unter 3 m. Bei konstanter Geschwindigkeit ist diese bis auf 0,05 m/s genau bestimmbar [10].

Wichtig für ein GPS-Empfängergerät, das in der Schule als Messgerät verwendet werden soll, ist die Möglichkeit der Trackaufzeichnung. In diesem Modus zeichnet das Gerät automatisch verschiedene Informationen zu Punkten längs des Weges auf [21, S. 26]. Durch Verbinden dieser Punkte kann dann eine Bahnkurve, der Track, erstellt werden. Bei dem eTrex Vista Cx lassen sich für die Trackaufzeichnung unterschiedliche Einstellungen wählen [21, S. 65]:

- Als **Aufzeichnungsart** (Record Method) können die Optionen **Entfernung** (Distance), **Zeit** (Time) und **Autom.** (Auto) eingestellt werden.
- Im Modus ‘**Entfernung**’ werden die Trackpunkte in bestimmten Abständen voneinander erzeugt, wobei der kleinste mögliche Intervallabstand 10 m beträgt.
- Im Modus ‘**Zeit**’ werden dementsprechend die Trackpunkte nach einer bestimmten verstrichenen Zeit aufgezeichnet. Hier ist der kleinste mögliche Intervallabstand 1 s.
- Im Modus ‘**Autom.**’ gibt es fünf voreingestellte Vorgabeintervalle.

Für die Gewinnung der Daten der in dieser Arbeit vorgestellten Experimente ist die Aufzeichnungsart ‘**Zeit**’ mit dem kleinstmöglich eingestellten Intervall am besten geeignet. Der Modus ‘**Autom.**’ liefert keine brauchbaren Daten, im Modus ‘**Entfernung**’ sind die Daten durch den großen Abstand von 10 m zwischen zwei Aufzeichnungspunkten zu ungenau.

Wie die genannten Einstellungen am eTrex Vista Cx vorgenommen werden, kann im Handbuch [21, S. 64f] nachgelesen werden und soll daher an dieser Stelle nicht thematisiert werden. Das Gerät bietet die Möglichkeit die aufgenommenen Tracks zu speichern. Diese Möglichkeit ist allerdings mit Vorsicht zu genießen, da bei der Speicherung der Daten wichtige Größen wie die Geschwindigkeit verloren gehen. Aus diesem Grund wurden mehrmalige Wiederholungen der Versuche in einen Track aufgenommen und die entsprechenden Teilabschnitte nach der Übertragung auf den Computer aufgeteilt.

### 3.2.2 Übertragung und Auswertung der Daten

Um die gespeicherten Tracks weiter auswerten zu können, muss zunächst eine Übertragung der Daten vom GPS-Gerät auf den PC erfolgen. Dies geschieht am einfachsten über die dem Gerät beiliegende Software ‘MapSource’. Nachdem diese auf dem PC installiert und das Gerät über ein USB-Kabel angeschlossen worden ist, erfolgt das Auslesen der Daten über den Menüpunkt **Übertragen**  $\mapsto$  **Von Gerät empfangen....** Durch Anklicken verschiedener Buttons lässt sich auswählen, welche Daten übertragen werden sollen. Es reicht dabei aus, die *Tracks* auszuwählen, da *Wegpunkte*, *Karten* und *Routen* für die Weiterbearbeitung der Daten irrelevant sind. MapSource bietet die Möglichkeit, die Daten grafisch in einer Karte darzustellen. Diese Anwendung ermöglicht einen Überblick über die gewonnenen Daten und wurde in einem der Experimente genutzt, um unterschiedliche Geschwindigkeiten darzustellen.

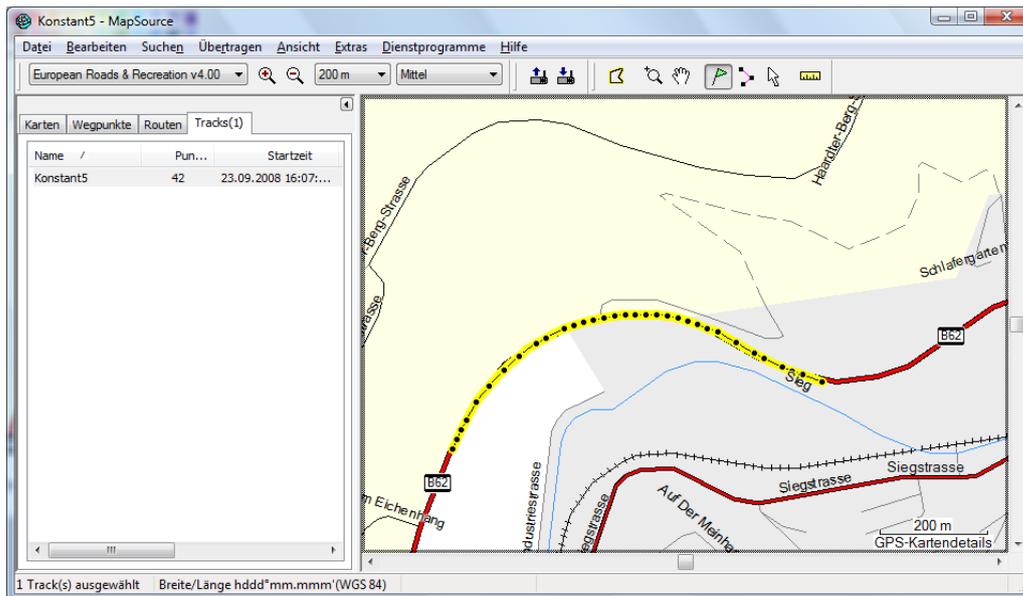


Abbildung 3.1: Hauptfenster in MapSource

Es findet sich zudem im Hauptfenster eine Liste der Tracks wieder. Durch Rechtsklick auf einen ausgewählten Track kann unter **Eigenschaften des Tracks** eine Liste der Trackpunkte aufgerufen werden.

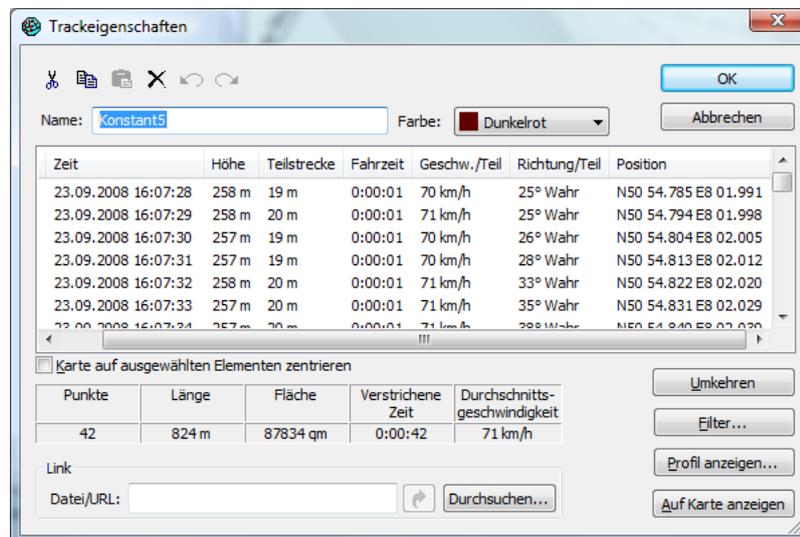


Abbildung 3.2: Eigenschaften des Tracks

Zu jedem Trackpunkt werden dabei folgende Daten angegeben:

- das genaue Datum und die Uhrzeit (Zeit)
- die Höhe in m (Höhe)

- die seit dem vorherigen Trackpunkt zurückgelegte Strecke in m (Teilstrecke)
- die seit dem vorherigen Trackpunkt vergangene Zeit in s (Fahrzeit)
- die Momentangeschwindigkeit in km/h (Geschw./Teil)
- die seit dem vorherigen Trackpunkt eingeschlagene Richtung in  $^{\circ}$  (Richtung/Teil)
- die Position in UTM-Koordinaten (Position)

Speichert man die Trackdaten in MapSource, so geschieht dies zunächst im *.gdb* - Dateiformat, was eine Weiterverarbeitung der Daten schwierig macht. Speichert man die Tracks als *.txt* - Datei ab, so werden die Spalten durch Tabulatoren getrennt gesichert. Dies macht eine Weiterverarbeitung der Daten, zum Beispiel in *Excel*, möglich. Mit Hilfe des Textkonvertierungsassistenten können sie dann leicht in eine Tabelle eingelesen werden.

Für die verschiedenen Versuche wurden die Daten zunächst mit Excel bearbeitet. Dabei wurden aus der Teilstrecke und der Fahrzeit durch Aufsummieren die von dem Startpunkt an zurückgelegte Strecke und die verstrichene Zeit für jeden Trackpunkt bestimmt. Die Geschwindigkeit wurde in die Einheit m/s umgerechnet. Anschließend wurden die Zeit  $t$  in s, die Strecke  $s$  in m und die Geschwindigkeit  $v$  in m/s in das Programm Origin Pro 8 kopiert, um dort die entsprechenden Grafiken zu erzeugen.

### 3.3 Die Projekte

Das GPS-System bietet Anregungen für viele verschiedene Versuche und Projekte, die in den Physikunterricht eingebunden werden können. Aus den im vorherigen Abschnitt dargestellten Gründen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit eine Beschränkung auf Versuche aus dem Bereich Bewegung und Dynamik. Im Zuge dessen werden drei Projekte vorgestellt, die Ideen zur Verwendung des GPS-Systems in verschiedenen Jahrgangsstufen aufzeigen. Die Projekte unterscheiden sich in der Verwendung der GPS-Daten, im zugeordneten Unterrichtsthema und dementsprechend in ihrem Umfang und ihrer Komplexität.

Bei der Darstellung der Projekte wird zunächst der zugrunde liegende physikalischen Sachverhalt erläutert. Anschließend werden die Vorbereitung der Versuche, ihre Durchführung und die Auswertung der Daten beschrieben. Dabei wird auf mögliche Schwierigkeiten und Fehlerquellen in allen Bereichen ebenso eingegangen wie auf Ideen zur Erweiterung oder Veränderung der Projekte. Abschließend erfolgt eine Einordnung der Projekte in die Lehrpläne für Physik am Gymnasium.

### 3.3.1 Projekt I: Gleichmäßige Bewegung

Das erste Projekt befasst sich mit gleichmäßigen Bewegungen und hat das Ziel, den Geschwindigkeitsbegriff einzuführen und zu veranschaulichen. Dazu wurden auf einer ebenen gleichmäßigen Strecke Tracks von verschiedenen Fahrzeugen mit (annähernd) konstanter Geschwindigkeit aufgenommen. Die Daten wurden dann mit MapSource und Origin Pro 8 ausgewertet und dargestellt.

#### 3.3.1.1 Physikalische Grundlagen

Die Geschwindigkeit ist definiert als Änderungsrate des Ortes. Damit handelt es sich um eine vektorielle Größe, die einen Betrag und eine Richtung hat. Da für die Versuche die Richtung der Geschwindigkeit keine Rolle spielt, werden im Folgenden jedoch nur Geschwindigkeitsbeträge betrachtet. Die Standardeinheit der Geschwindigkeit ist m/s, vor allem durch die Tachoanzeigen in Fahrzeugen ist die Einheit km/h im Alltag jedoch weiter verbreitet.

Die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  ist definiert als Quotient aus zurückgelegter Wegstrecke und dafür benötigter Zeit, das heißt

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist zu unterscheiden von der Momentangeschwindigkeit. Für  $\Delta t \rightarrow 0$  nimmt der Quotient  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  einen Grenzwert an, der als Momentangeschwindigkeit definiert ist:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Bei einer gleichmäßigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant und Momentangeschwindigkeit und mittlere Geschwindigkeit stimmen überein. Im Alltag ist dies jedoch selten der Fall.

#### 3.3.1.2 Durchführung und Auswertung der Versuche

Im Rahmen des ersten Projekts wurden Tracks von Fahrzeugen mit unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten aufgenommen. Dazu wurden ein Motorroller und ein Auto auf derselben ebenen gleichmäßigen Strecke bei eingeschalteter Trackaufzeichnung (Modus Zeit; Abstand 1s) am GPS-Gerät auf eine bestimmte Geschwindigkeit gebracht, die dann über einen gewissen Zeitraum konstant gehalten wurde.

## Versuche mit dem Auto

Die erste Messung mit dem Auto erfolgte bei einer Geschwindigkeit von etwa 91 km/h. Als Ergebnis der Aufzeichnung mit dem GPS-Gerät ergab sich folgender Track:

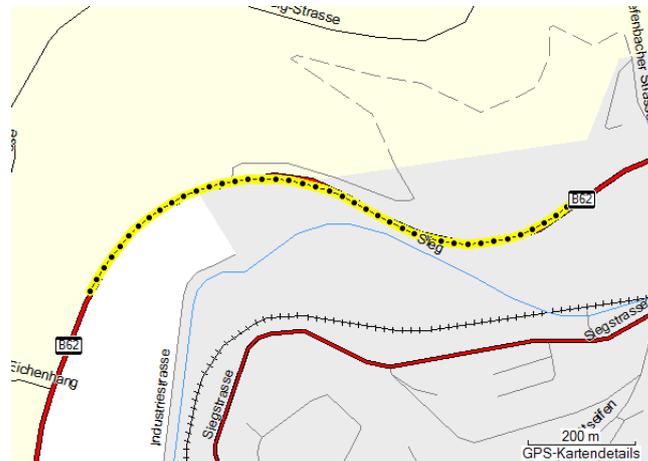


Abbildung 3.3: Fahrt mit dem Auto bei 91 km/h

Da die aufgezeichneten Trackpunkte jede Sekunde aufgenommen wurde, zeigt sich die konstante Geschwindigkeit in der Abbildung anhand der gleichmäßigen Abstände zwischen den Trackpunkten. Eine konstante Geschwindigkeit kann so begriffen werden, dass in 1 s immer die gleiche Strecke zurückgelegt wird. Anhand der genauen Eigenschaften der Trackpunkte kann dies überprüft werden.

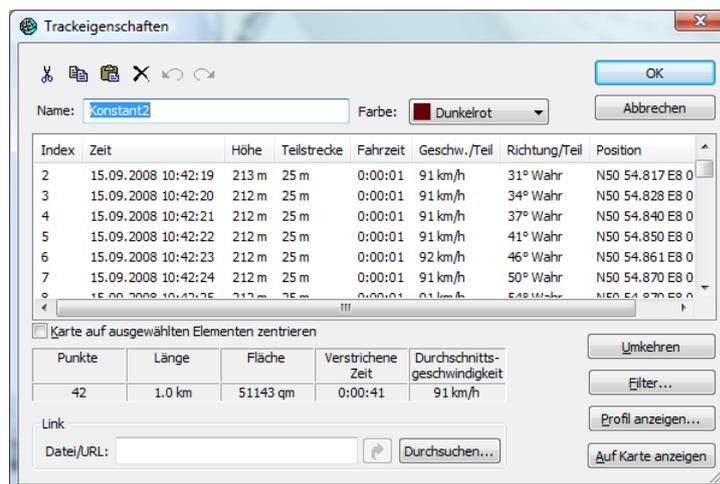


Abbildung 3.4: Trackeigenschaften

Die aufgezeichneten Werte zeigen eine konstante Geschwindigkeit von 91 km/h sowie pro Sekunde eine zurückgelegte Strecke von 25 m an. Werden alle Trackpunkte betrachtet, so lassen sich leichte Abweichungen von der konstanten Geschwindigkeit um

bis zu 2 km/h erkennen. Nach der Übertragung der Daten in Origin Pro 8 können ein s-t-Diagramm und ein v-t-Diagramm erzeugt werden.

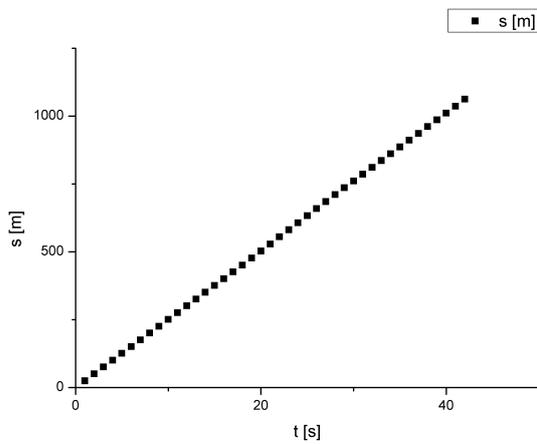


Abbildung 3.5: s-t-Diagramm

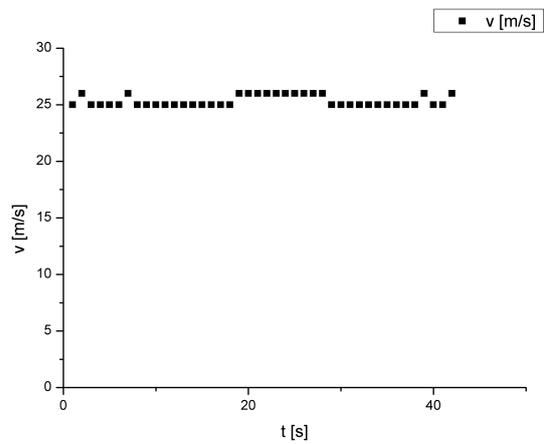


Abbildung 3.6: v-t-Diagramm

An dem ersten Diagramm zeigt sich deutlich, dass Zeit und Strecke proportional zueinander sind. Die Steigung der Ursprungsgeraden ist überall gleich und gibt die Geschwindigkeit an. Im zweiten Diagramm zeigt sich eine in etwa konstante Geschwindigkeit. Die leichten Abweichungen von etwa 1 m/s erklären sich aus den Fehlern der Positions- und Geschwindigkeitsbestimmung mit GPS.

Eine zweite Messung mit dem Auto bei einer Geschwindigkeit von 73 km/h lieferte folgende Ergebnisse für den Track:

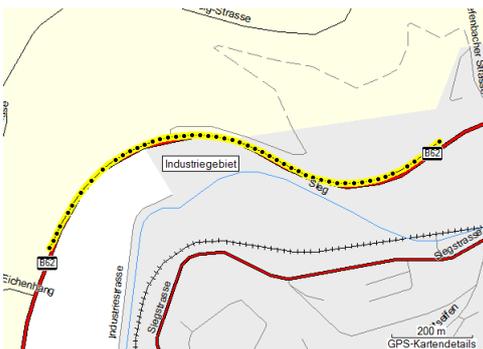


Abbildung 3.7: Fahrt mit dem Auto bei 73 km/h

Zeit	Höhe	Teilstrecke	Fahrtzeit	Geschw./Teil	Richtung/Teil	Position
15.09.2008 10:40:27	203 m	20 m	0:00:01	73 km/h	294° Wahr	N50 54.869 E8 02.515
15.09.2008 10:40:28	203 m	20 m	0:00:01	73 km/h	297° Wahr	N50 54.873 E8 02.499
15.09.2008 10:40:29	204 m	20 m	0:00:01	73 km/h	299° Wahr	N50 54.876 E8 02.484
15.09.2008 10:40:30	204 m	20 m	0:00:01	73 km/h	300° Wahr	N50 54.884 E8 02.469
15.09.2008 10:40:31	205 m	20 m	0:00:01	73 km/h	300° Wahr	N50 54.889 E8 02.454
15.09.2008 10:40:32	205 m	20 m	0:00:01	73 km/h	298° Wahr	N50 54.894 E8 02.439

Zusätzliche Informationen im Dialogfenster:  
 Name: Konstant3, Farbe: Dunkelrot  
 Punkte: 58, Länge: 1.1 km, Fläche: 74694 qm, Verstrichene Zeit: 0:00:57, Durchschnittsgeschwindigkeit: 73 km/h  
 Link: [Leeren], [Erfüll anzeigen...], [Auf Karte anzeigen]

Abbildung 3.8: Trackeigenschaften

Die aus den Trackdaten erstellten Diagramme sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

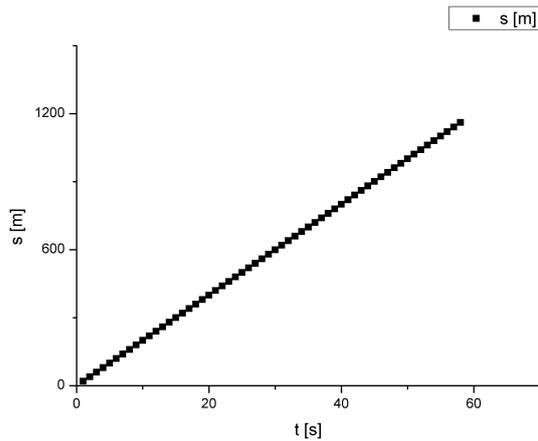


Abbildung 3.9: s-t-Diagramm

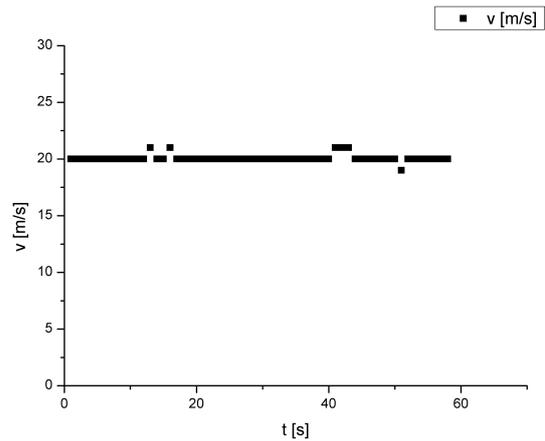


Abbildung 3.10: v-t-Diagramm

Bei der Darstellung der Geschwindigkeit fallen wieder leichte Sprünge um 1 m/s auf. Ebenfalls sind die Abstände der Trackpunkte in der Aufzeichnung nicht so gleichmäßig wie bei der ersten Messung.

### Versuche mit dem Motorroller

Um auf der viel befahrenen Straße auch langsamere Geschwindigkeiten aufzunehmen, wurde ein Track mit dem Motorroller bei etwa 38 km/h aufgenommen. Der beim Rollerfahren aufgenommene Track kann aus der folgenden Abbildung entnommen werden.

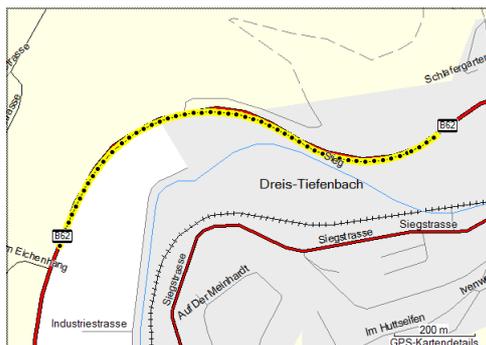


Abbildung 3.11: Fahrt mit dem Motorroller bei 38 km/h

Index	Zeit	Höhe	Teilstrecke	Fahrtzeit	Geschw./Teil	Richtung/Teil	Position
70	24.09.2008 16:31:12	270 m	11 m	0:00:01	38 km/h	120° Wahr	N50 54.885 E8 0
71	24.09.2008 16:31:13	270 m	11 m	0:00:01	39 km/h	120° Wahr	N50 54.882 E8 0
72	24.09.2008 16:31:14	270 m	11 m	0:00:01	38 km/h	120° Wahr	N50 54.879 E8 0
73	24.09.2008 16:31:15	270 m	11 m	0:00:01	38 km/h	119° Wahr	N50 54.876 E8 0
74	24.09.2008 16:31:16	269 m	11 m	0:00:01	38 km/h	119° Wahr	N50 54.873 E8 0
75	24.09.2008 16:31:17	269 m	11 m	0:00:01	38 km/h	118° Wahr	N50 54.870 E8 0

Zusätzliche Informationen im Dialogfenster:  
 Name: Konstant\_Roller, Farbe: Unbekannt  
 Karte auf ausgewählten Elementen zentrieren  
 Punkte: 107, Länge: 1.1 km, Fläche: 0.1 qkm, Verstrichene Zeit: 0:01:46, Durchschnittsgeschwindigkeit: 39 km/h

Abbildung 3.12: Trackeigenschaften

Wieder wurden aus den Trackeigenschaften die zugehörigen Diagramme ermittelt.

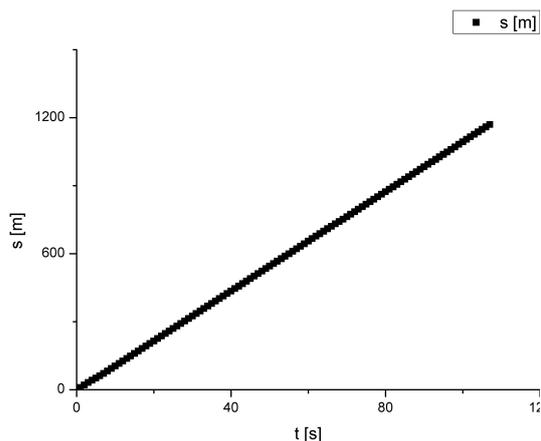


Abbildung 3.13: s-t-Diagramm

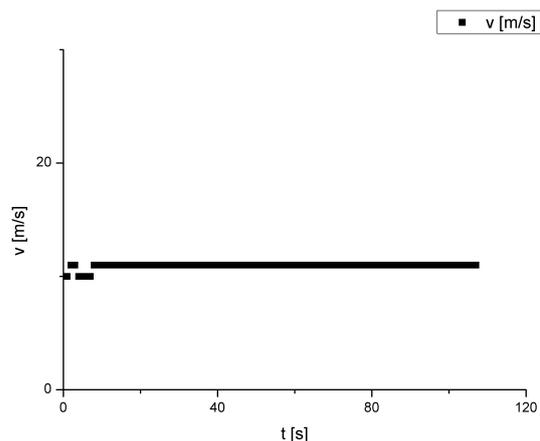


Abbildung 3.14: v-t-Diagramm

Bei allen drei Beispielen lässt sich anhand der Trackpunkte die konstante Geschwindigkeit veranschaulichen. Die Weiterverarbeitung der Daten liefert dann entsprechende Diagramme. Trotz kleiner Messungenauigkeiten lassen sich aus den Diagrammen die Zusammenhänge zwischen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit gut erkennen.

### 3.3.1.3 Einordnung in Themen des Physikunterrichts

Der Begriff ‘Geschwindigkeit’ findet sich in den Kernlehrplänen für das Gymnasium - Sekundarstufe I im Rahmen des Inhaltsfelds **Kraft, Druck, mechanische und innere Energie** als obligatorischer Stoff für die Jahrgangsstufen 7/9 wieder [16, S. 35]. Für die Annäherung an das Thema mittels des vorgestellten Projekts oder ähnlicher Versuche sprechen unter anderem folgende Punkte aus den Kompetenzerwartungen bis zum Ende der Jahrgangsstufe 9:

- **Kompetenzbereich Erkenntnisgewinnung** [16, S. 17]:  
Schülerinnen und Schüler führen qualitative und einfache quantitative Experimente und Untersuchungen durch, protokollieren diese, verallgemeinern und abstrahieren Ergebnisse ihrer Tätigkeit und idealisieren gefundene Messdaten.
- **Kompetenzbereich Kommunikation** [16, S. 18]:  
Schülerinnen und Schüler dokumentieren und präsentieren den Verlauf und die Ergebnisse ihrer Arbeit sachgerecht, situationsgerecht und adressatenbezogen auch unter Nutzung elektronischer Medien.  
Schülerinnen und Schüler veranschaulichen Daten angemessen mit sprachlichen, mathematischen oder (und) bildlichen Gestaltungsmitteln wie Graphiken und Tabellen auch mit Hilfe elektronischer Werkzeuge.

Ein in die Schule mitgebrachtes GPS-Gerät, mit dem gemeinsam mit den Schülern kleine Versuche durchgeführt werden, erfüllt viele der aufgeführten Punkte genauso wie Versuche, die Schülerinnen und Schüler mit eigenen Geräten in ihrer Freizeit durchführen. Der Kreativität und dem Spaßfaktor sind dabei keine Grenzen gesetzt. Die konstante Geschwindigkeit kann mit dem Auto oder Motorroller gefahren werden; es ist aber genau so möglich dies mit dem Fahrrad, den Inlineskates, dem Skateboard oder zu Fuß auszuprobieren. Den Schülerinnen und Schülern wird dadurch die Möglichkeit gegeben, ihre eigenen Messwerte zu gewinnen, was das anschließende Auswerten interessanter macht, als wenn Werte aus dem Buch abgeschrieben werden. Bei der Auswertung ist eine Darstellung der Daten mit dem Computer ebenso möglich wie eine Erstellung handgefertigter Diagramme.

Die Tatsache, dass die mit dem GPS-Empfänger gewonnenen Daten Ungenauigkeiten aufweisen und dass im Alltag selten über einen längeren Zeitraum eine konstante Geschwindigkeit gehalten werden kann, bietet die Möglichkeit, die Idealisierung von Messdaten zu thematisieren. Die Schülerinnen und Schüler lernen dabei, dass eine konstante Geschwindigkeit mehr ein physikalisches Modell als ein realer Sachverhalt ist und es kann an dieser Stelle schon ein Hinweis auf beschleunigte Bewegungen erfolgen, die in der Oberstufe besprochen werden.

### 3.3.2 Projekt II: Bewegungsdiagramme

Im zweiten Projekt steht die Erstellung und Beurteilung verschiedener Bewegungsdiagramme im Vordergrund. Über einen kurzen Zeitraum wurde ein Bewegungsverlauf mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aufgenommen. Anschließend wurden das zugehörige s-t-Diagramm, v-t-Diagramm und a-t-Diagramm erstellt und anhand der Diagramme die Bewegung analysiert.

#### 3.3.2.1 Physikalische Grundlagen

Bei den meisten Bewegungen im Alltag handelt es sich um beschleunigte Bewegungen. Die Beschleunigung ist dabei definiert als Änderungsrate der Geschwindigkeit, es gilt demnach:

$$a(t) = \dot{v}(t). \quad (3.3)$$

Die Einheit der Beschleunigung ist  $\frac{m}{s^2}$ ; ebenso wie bei der Geschwindigkeit handelt es sich um eine vektorielle Größe, von der hier nur der Betrag betrachtet wird. Analog zur Definition der mittleren Geschwindigkeit lässt sich auch die mittlere Beschleunigung

aus der Geschwindigkeitsänderung über einen gewissen Zeitraum berechnen:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Es gilt zudem

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t) \quad (3.5)$$

Die Zusammenhänge zwischen den Größen Zeit  $t$ , Strecke  $s$ , Geschwindigkeit  $v$  und Beschleunigung  $a$  bestimmen die Art der Bewegung:

- Bei der *gleichmäßigen Bewegung* sind  $t$  und  $s$  proportional zueinander. Der Quotient  $\frac{s}{t}$  ist konstant und gibt die Geschwindigkeit  $v$  an. Da die Geschwindigkeit gleich bleibt, ist ihre Änderungsrate, die Beschleunigung, Null.
- Bei der *gleichmäßig beschleunigten Bewegung* sind  $t$  und  $v$  proportional zueinander. Der Quotient  $\frac{v}{t}$  gibt in diesem Fall die Beschleunigung  $a$  an. Der Zusammenhang zwischen Strecke und Zeit ist quadratisch, es gilt  $s = \frac{1}{2}at^2$ .
- Bewegungen mit sich ändernder Beschleunigung werden durch die allgemeinen Gleichungen  $\dot{s}(t) = v(t)$  und  $\dot{v}(t) = a(t)$  beschrieben. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Beschleunigung proportional und gleichgerichtet zur wirkenden Kraft. Es gilt  $F = m \cdot a$ , wobei  $m$  die Masse des beschleunigten Körpers ist.

### 3.3.2.2 Durchführung und Auswertung der Versuche

Zur Aufnahme einer beliebigen Bewegung wurde zunächst der Track einer Fahrt mit einem Motorrad aufgenommen. Als Aufzeichnungsmodus wurde wieder die Zeit mit einem Abstand von 1 s zwischen zwei Messpunkten gewählt. Aus dem so erzeugten Track wurde dann nach der Übertragung auf den Computer mittels MapSource ein kurzer Trackabschnitt mit etwa 120 Messpunkten ausgewählt, der sich durch Änderungen in der Geschwindigkeit (Stopps, Beschleunigungen, konstante Geschwindigkeit) auszeichnet. Es wurde dabei darauf geachtet, dass nicht zu viele Änderungen in dem Abschnitt vorkommen, weil sonst die Diagramme unübersichtlich werden. Die ausgewählten Trackpunkte sowie das Höhenprofil der Strecke sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



Abbildung 3.15: Kurze Fahrt mit dem Motorrad

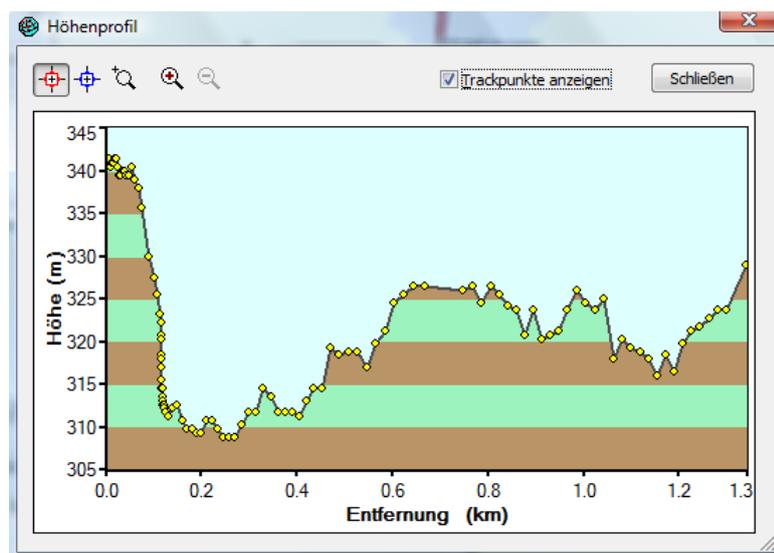


Abbildung 3.16: Höhenprofil der Motorradfahrt

Nach Übertragung und Bearbeitung der Trackeigenschaften dieser Messpunkte in Excel und Origin Pro 8 wurden das zugehörige s-t- und v-t-Diagramm erstellt. Durch Differenzieren der Geschwindigkeit mit Origin Pro 8 wurde des Weiteren der Beschleunigungsverlauf gezeichnet. Um die entstandenen Kurven besser analysieren zu können, wurden sie anschließend geglättet.

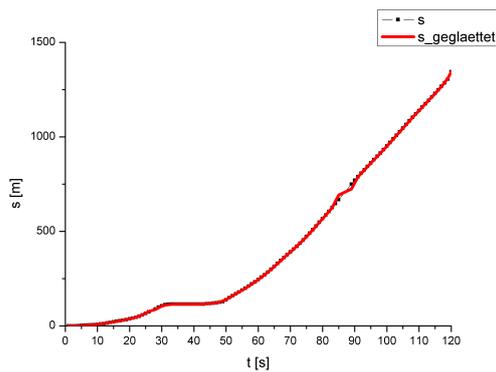


Abbildung 3.17: s-t-Diagramm

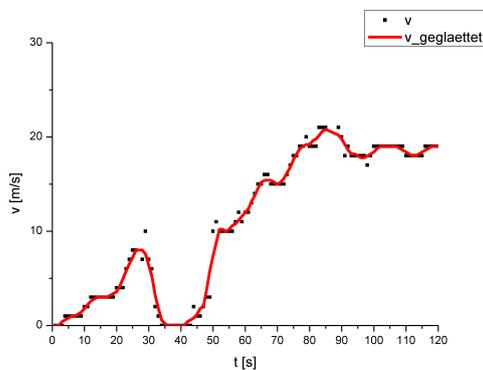


Abbildung 3.18: Geschwindigkeitsverlauf

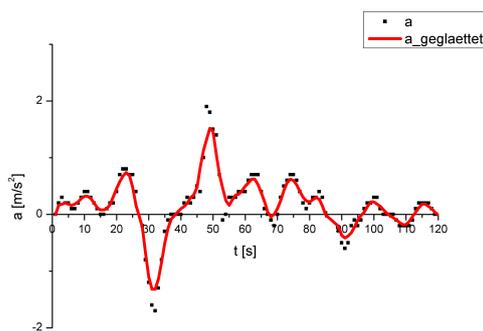


Abbildung 3.19: Beschleunigungsverlauf

Aus der Betrachtung des s-t-Diagramms wird ersichtlich, dass die zurückgelegte Strecke zunächst immer stärker ansteigt. Anschließend ist sie für etwa 20 s konstant, das Motorrad wurde also abgebremst und stand in dieser Zeit. Vom Zeitpunkt  $t=50$  s an nimmt die zurückgelegte Strecke wieder zu. Im Intervall  $[50;85]$  wird die Steigung immer größer, danach ist sie annähernd konstant.

Die Analyse des v-t-Diagramms bestätigt die aus dem s-t-Diagramm gewonnenen Erkenntnisse. In den ersten 30 s wird das Motorrad zunächst immer schneller. Im Bereich des Abbremsens nimmt die Geschwindigkeit schnell ab. Dann folgt der Bereich, in dem das Motorrad stand und in dem die Geschwindigkeit folglich Null ist. Das immer stärkere Ansteigen des s-t-Graphen im Intervall  $[50;85]$  zeigt sich in einer Zunahme der Geschwindigkeit in diesem Bereich. Danach bleibt die Geschwindigkeit bis auf leichte Schwankungen von etwa 2 m/s konstant.

Aufgrund der ständigen leichten Schwankungen der Geschwindigkeit weist der Beschleunigungsverlauf ebenfalls viele Zu- und Abnahmen auf. Wesentlich ist hier vor allem eine Unterscheidung in drei Bereiche. Wenn die Geschwindigkeit zunimmt, ist die Beschleunigung positiv. Wenn die Geschwindigkeit abnimmt, gibt es dementsprechend eine negative Beschleunigung. In den Bereichen, in denen die Geschwindigkeit konstant ist, ist die Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, annähernd Null.

Die Aufnahme eines kurzen Tracks bei einer beliebigen Bewegung liefert also viele Möglichkeiten zur Diskussion und Analyse verschiedener Bewegungsgraphen. Wird

das Höhenprofil hinzugenommen und ist die Masse des bewegten Objekts bekannt, können zudem zu bestimmten Zeitpunkten die kinetischen und potentiellen Energien bestimmt werden. Aus den Trackeigenschaften können die genauen Werte zu bestimmten Zeitpunkten gewonnen werden. Als Beispiel ergibt sich für die Energien

- zu Beginn der Messung bei  $t=0$  (erster Trackpunkt):  $v=0$  m/s,  $m=482$  kg,  $h=341$  m

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$E_{pot} = mgh = 1,6MJ$$

- am Ende der Messung bei  $t=120$  (vorletzter Trackpunkt):  $v=20$  m/s,  $m=482$  kg,  $h=324$  m

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = 91,1kJ$$

$$E_{pot} = mgh = 1,5MJ$$

Schon beim Vergleich dieser beiden Werte fällt auf, dass die Summe beider Energien an den verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich ist. Die Berechnung der Energiewerte zu weiteren Zeitpunkten bestätigt dies. Aus den Berechnungen kann also der Schluss gezogen werden, dass weitere Energieformen in diesem Zusammenhang eine Rolle spielen. Genannt werden können hier zum Beispiel der Kraftstoff, die Reibungsenergie und andere.

Um die Möglichkeiten der Aufnahme von Bewegungen mit dem GPS-Gerät noch mehr auszutesten, erfolgte im Rahmen des zweiten Projekts die Aufnahme eines Tracks bei einem Ausritt mit dem Pferd. Dabei wurde darauf geachtet, nicht zu viele plötzliche Bewegungsänderungen durchzuführen. Die Ergebnisse dieses Tests sind im Folgenden als Trackpunkte und in Diagrammen ausgewertet dargestellt.



Abbildung 3.20: Track eines kurzen Ausritts

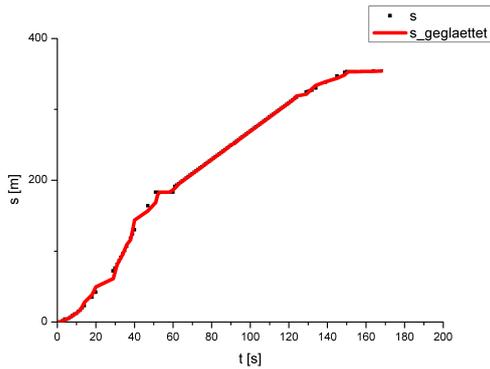


Abbildung 3.21: s-t-Diagramm

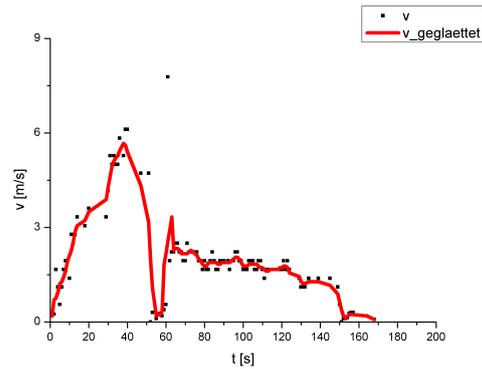


Abbildung 3.22: Geschwindigkeitsverlauf

Auch die mit dem Pferd aufgenommenen Daten ermöglichen eine Analyse der Bewegungskurven. Im s-t-Diagramm sind deutlich mehrere Bereiche zu erkennen, in denen der Graph konstant ist. In diesen Zeitintervallen stand das Pferd. Im Intervall [60;120] steigt der Graph linear an, was auf eine konstante Geschwindigkeit in diesem Bereich schließen lässt. Die Betrachtung des v-t-Diagramms bestätigt diese Beobachtungen. Vom Start bis zum ersten Halt nimmt die Geschwindigkeit zunächst relativ stark zu und dann schnell wieder ab. Das Pferd hat also beschleunigt und dann abrupt abgebremst. Nach dem Halt wurde stark beschleunigt und die Geschwindigkeit dann über einen gewissen Zeitraum konstant gehalten und bis zum Stopp verringert.

### 3.3.2.3 Einordnung in Themen des Physikunterrichts

Laut den Richtlinien und Lehrplänen für den Physikunterricht in der Sekundarstufe II von Gymnasium und Gesamtschule sind die Gesetze der gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten Bewegung ebenso Unterrichtsinhalte wie Energiebilanzen und die Berechnung von Lage- und Bewegungsenergien. Immer wieder wird dabei in der Methodik sowohl die Messwerterfassung und -auswertung mit modernen Medien als auch die Durchführung von fachinternen Projektphasen positiv bewertet.

Die Aufnahme von Bewegungsabläufen mit GPS-Geräten ist ein Ansatz zur Heranführung an Bewegungsanalysen, der sich durch eine große Nähe zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler auszeichnet. Im Gegensatz zu Graphen in Schulbüchern, die meist sehr idealisiert dargestellt sind, lernen die Schülerinnen und Schüler Daten aus der Realität zu analysieren und dabei die wichtigsten Merkmale der Graphen herauszufinden. Im Rahmen kleiner Projektstudien können die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert werden, ganz nach ihren eigenen Interessen Bewegungen aufzuzeichnen und in den Unterricht einzubringen. Dabei sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt. Ebenso wie die Bewegungen des Pferdes gut analysiert werden konnten, können auch Bewegungen mit dem Segelboot, zu Fuß oder mit jeglichen Gefährten

betrachtet werden. Dabei können die Interessen aller Schülerinnen und Schüler und auch der Mädchen, die sich häufig vor der Durchführung von Experimenten scheuen, berücksichtigt und eingebunden werden. Die Auswertung der Daten bietet die Möglichkeit, den Umgang mit Programmen wie Excel zu üben.

Eine Idee für eine Unterrichtseinheit könnte es sein, die Schülerinnen und Schüler Bewegungen aufnehmen zu lassen, die dann im Unterricht in Partnerarbeit analysiert werden. Dabei erläutert ein Partner die vom anderen aufgenommenen Kurven zum Beispiel nach folgenden Punkten:

- Wann hat eine Bewegung stattgefunden und wann nicht?
- In welchen Bereichen ist die Bewegung beschleunigt?
- Gibt es Bereiche mit konstanter Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung?
- Mit welchem Fahrzeug wurde die Bewegung aufgezeichnet?
- usw.

Die simplen Energiebetrachtungen, die im Rahmen des Projekts durchgeführt wurden, bieten zudem einen Ansatz, um darüber nachzudenken, wie weitergehende Berechnungen, zum Beispiel zur Reibungsenergie, mit dem GPS-Gerät durchgeführt werden könnten.

### **3.3.3 Projekt III: Energieumsatz beim Fahrradfahren**

Das dritte und umfangreichste Projekt beschäftigt sich mit der Physik des Fahrradfahrens. Das Ziel der durchgeführten Versuche ist die Berechnung des Energieumsatzes während einer kurzen Fahrradtour. Da dafür die auftretenden Kräfte bekannt sein müssen, erfolgt im ersten Teil des Versuchs die Analyse von Ausrollkurven zur Bestimmung der Widerstandswerte. Im zweiten Teil wird dann auf den Ergebnissen aus dem ersten Teil aufbauend eine kurze Tour mit dem Fahrrad hinsichtlich der auftretenden Kräfte, der aufgewandten Leistung und des Energieumsatzes untersucht. Die Anregung zu dem Projekt stammt aus einer Veröffentlichung von C. Ehlers und U. Backhaus [23].

#### **3.3.3.1 Physikalische Grundlagen**

Der Energieumsatz beim Fahrradfahren hat seine Ursache darin, dass je nach Situation unterschiedliche Kräfte überwunden werden müssen. Diese sind abhängig von ...

- ... der Umgebung (Geht es bergauf oder bergab? Wie ist die Beschaffenheit des Untergrundes? Wie ist das Wetter, die Temperatur, der Wind?)
- ... der Geschwindigkeit (Bleibt die Geschwindigkeit konstant oder wird beschleunigt?)
- ... dem Fahrrad (Wie breit sind die Reifen und wie hoch ist der Luftdruck in ihnen? Wie viel wiegt das Fahrrad?)
- ... dem Fahrer (Wie schwer ist er? Welche Haltung nimmt er ein? Welche Kleidung trägt er? Wie groß ist die Frontfläche von Fahrrad und Fahrer?)
- ... vielen weiteren kleinen Faktoren.

Es sollen nun für unterschiedliche Fälle die wichtigsten auftretenden Kräfte untersucht werden.

### Beim Fahrradfahren auftretende Kräfte

Beim Fahren mit konstanter Geschwindigkeit auf einer ebenen Strecke spielen vor allem folgende Kräfte eine Rolle [25]:

- Die *Radwiderstandskraft* setzt sich aus einem Reibungswiderstand und einem Rollwiderstand zusammen. Die *Reibungswiderstandskraft* wird durch Reibung in den Lagern und der Kette verursacht. Sie ist kleiner als 1 N und im Vergleich zur Rollwiderstandskraft vernachlässigbar. Beim Abrollen auf dem Untergrund muss der Reifen ständig ein wenig verformt werden. Durch diese Verformung kommt die *Rollwiderstandskraft*  $F_{Roll}$  zu Stande. Vereinfacht kann diese mit der Formel

$$F_{Roll} = \mu_{Roll} \cdot F_N \quad (3.6)$$

beschrieben werden, wobei  $\mu_{Roll}$  der von der Geschwindigkeit unabhängige Rollwiderstandskoeffizient ist und  $F_N$  die Anpress- oder Normalkraft. Die Rollwiderstandskraft ist damit weitgehend unabhängig von der Geschwindigkeit. Der Rollwiderstandskoeffizient ist vor allem abhängig von der Beschaffenheit des Reifens (Profil), seinem Durchmesser und der Größe des Luftdrucks im Reifen. Je größer der Durchmesser des Reifens ist, desto größer ist  $\mu_{Roll}$ ; je höher der Luftdruck im Reifen ist, desto kleiner ist  $\mu_{Roll}$ . Die folgende Tabelle zeigt eine Auswahl verschiedener Werte:

REIFENTYP	GRÖSSE in mm Breite – Durchmesser	ROLLWIDERSTANDSKOEFFIZIENT		
		bei 3 bar	bei 4 bar	bei 5 bar
Slik-Reifen, breit	32 – 622	0,00513	0,00361	---
Slik-Reifen, mittel	28 – 622	0,00596	0,00402	0,00349
Slik-Reifen, schmal	20 – 622	---	0,00477	0,00376
Profilreifen	37 – 622	0,00545	0,00406	---
Tour de Sol-Reifen	47 – 305	0,00669	0,00436	0,00378

Abbildung 3.23: Auswahl an Rollwiderstandskoeffizienten

Diese Werte gelten auf einer ebenen, glatten Fahrbahn und erhöhen sich entsprechend, wenn der Untergrund verschmutzt oder uneben ist.

- Die *Luftwiderstandskraft*  $F_{Luft}$  ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und lässt sich durch folgende Formel beschreiben:

$$F_{Luft} = \frac{1}{2} c_w \rho_{Luft} A \cdot v^2. \quad (3.7)$$

Wesentlich für die Größe der Luftreibung ist die Größe der Frontfläche von Fahrrad und Fahrer  $A$ , die Luftdichte  $\rho_{Luft}$  und der Luftwiderstandsbeiwert  $c_w$ . Letzterer ist spezifisch für die Bauart des Fahrrads.

$c_w$ -Wert	Stirnfläche $A$ m <sup>2</sup>	Luftwiderstand = $c_w \cdot A$	Luftwiderstand
1,10	0,51	0,55	Alltagsradler 
0,88	0,36	0,30	Rennrad 
0,70	0,38	0,27	Rennrad mit Verkleidung 
0,77	0,35	0,27	Liegerad 
1,00	0,48	0,24 <small>pro Person</small>	Tandem 
0,07	0,42	0,03	Vector 

Abbildung 3.24: Auswahl an Luftwiderstandsbeiwerten

Beim Fahren auf einer ebenen Strecke ist die Anpresskraft gleich der Gewichtskraft  $F_G = mg$  und es gilt für die Radwiderstandskraft

$$F_R = F_{Luft} + F_{Roll} = \frac{1}{2} c_w \rho_{Luft} A \cdot v^2 + \mu_{Roll} mg. \quad (3.8)$$

Ist die Strecke nicht eben und wird das Fahrrad beschleunigt, so treten weitere Kräfte auf.

- Bei der Fahrt bergauf und bergab tritt die *Hangabtriebskraft* in Erscheinung. Bei einer Fahrt den Berg hoch mit konstanter Geschwindigkeit sieht die Situation dann wie folgt aus:

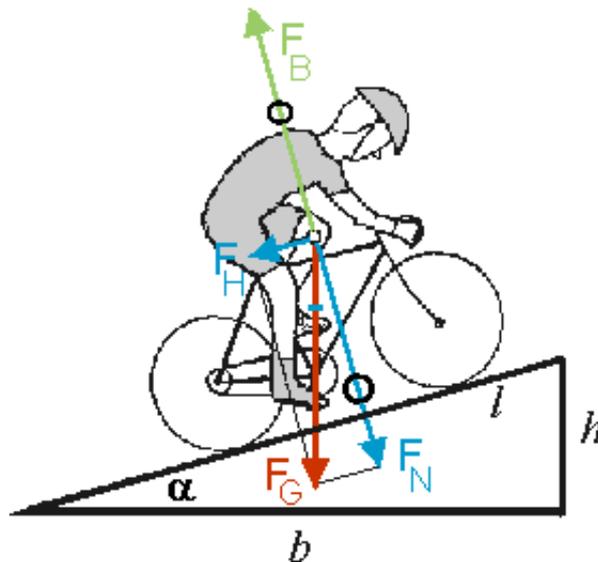


Abbildung 3.25: Berechnung der Hangabtriebskraft

Es gilt demnach für die Hangabtriebskraft

$$\frac{F_H}{F_G} = \sin \alpha = \frac{h}{l} \Leftrightarrow F_H = F_G \frac{h}{l} \quad (3.9)$$

Bei der Fahrt bergauf wirkt die Hangabtriebskraft in Richtung der Rollreibungs- und der Luftreibungskraft, bei der Fahrt bergab wirkt sie diesen entgegen.

- Wird das Fahrrad auf ebener Strecke beschleunigt, so muss eine weitere Kraft die Geschwindigkeitsänderung verursachen. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt für diese Kraft

$$F_a = m \cdot a = m \cdot \dot{v}. \quad (3.10)$$

$F_a$  wirkt in Richtung der Kräfte  $F_{Roll}$  und  $F_{Luft}$ .

Um die Gesamtwidestandskraft beim Fahrradfahren zu berechnen, müssen der Situation nach alle auftretenden Kräfte addiert werden. Bei der Addition der Beträge der Kräfte muss immer auf die Richtung der Hangabtriebskraft geachtet werden.

## Energie und Leistung beim Fahrradfahren

Allgemein gilt zur Berechnung der Leistung folgende Formel:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (3.11)$$

Sind Kraft und Geschwindigkeit über einem Zeitintervall  $\Delta t$  konstant, so gilt für die in diesem Intervall aufgebrauchte Leistung:

$$P = F \cdot v. \quad (3.12)$$

Aus der Leistung lässt sich dann auch die umgesetzte Energie für das Zeitintervall bestimmen:

$$E = P \cdot \Delta t. \quad (3.13)$$

### Ausrollkurven

Den Ausgangspunkt der Messungen zur Bestimmung der Radwiderstandskraft bilden Ausrollkurven. Um diese Kurven aufzunehmen, wird das Fahrzeug auf einer ebenen, geraden, gleichmäßigen Strecke auf eine möglichst hohe konstante Geschwindigkeit gebracht und dann durch Ausrollen zum Stillstand gebracht. Die Geschwindigkeitsabnahme wird (bei günstigen Wetterbedingungen ohne Wind etc.) hauptsächlich durch den Roll- und Luftwiderstand verursacht.

Um diese zu bestimmen, wird zunächst aus dem Geschwindigkeitsverlauf die abnehmende kinetische Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 \quad (3.14)$$

berechnet. Aus dem so bestimmten Energieverlauf kann dann die Verlustleistung abgeleitet werden. Es gilt

$$P(t_i) = \frac{E(t_i) - E(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \quad (3.15)$$

Durch die Ausrollkurve ist  $v(t)$  bekannt, so dass die Leistung als  $P(v)$  in Abhängigkeit von  $v$  dargestellt werden kann.

Theoretisch betrachtet gilt für die Verlustleistung

$$P(v) = F_R v, \quad (3.16)$$

wobei  $F_R$  die Radwiderstandskraft darstellt. Mit Formel (3.8) gilt demnach

$$P(v) = (F_R) v = \frac{1}{2}A\rho_{Luft}c_w v^3 + F_{Roll}v. \quad (3.17)$$

Wird die aus der Ausrollkurve ermittelte P-v-Kurve an diese Modellvorstellung, das heißt an eine Kurve der Form  $P(v) = av^3 + bv$ , angepasst, so können die Rollreibungskraft und der  $c_w$ -Wert folgendermaßen bestimmt werden:

- $F_{Roll} = b$ ,
- $c_w = \frac{2a}{A\rho_{Luft}}$ .

### 3.3.3.2 Durchführung und Auswertung der Versuche

Im Rahmen des Projekts wurden zunächst Ausrollversuche mit einem Mountainbike durchgeführt. Aus diesen Kurven wurden dann die für den Reibungswiderstand signifikanten Werte  $c_w$  und  $F_{Roll}$  bestimmt. Anschließend wurde eine kurze Fahrt mit dem Fahrrad hinsichtlich der verschiedenen Energien und des Energieumsatz untersucht. Dazu wurden die vorher ermittelten Reibungswerte genutzt.

#### Ausrollversuche

Im Zuge der Ausrollversuche wurde das Mountainbike auf einer ebenen geraden Strecke auf eine Geschwindigkeit von etwa 30 km/h gebracht und dann die Ausrollkurve aufgezeichnet. Wieder wurde der Track mit dem eTrex Vista Cx im Modus 'Zeit' mit einem Abstand von 1 s zwischen zwei Messpunkten aufgenommen. In beiden Richtungen wurden so mehrere Messkurven ermittelt und anschließend bearbeitet. Die folgende Abbildung zeigt eine der ermittelten v-t-Kurven.

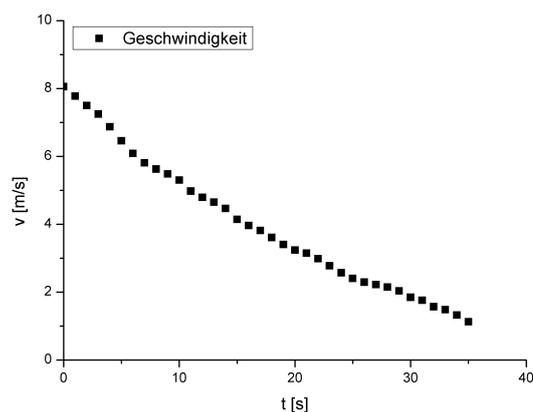


Abbildung 3.26: Ausrollkurve Nr.1

Aus der in Origin Pro 8 geglätteten Kurve konnte dann nach Bestimmen der Masse von Fahrrad und Fahrradfahrer auf  $m=98$  kg in Excel die kinetische Energie in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt werden.

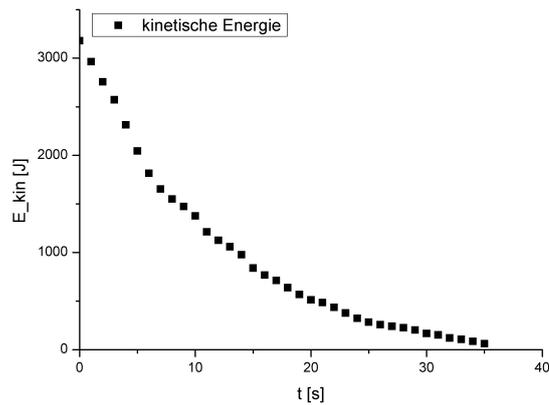


Abbildung 3.27: Abnahme der kinetischen Energie beim Ausrollen

Aus der Abnahme der kinetischen Energie wurde dann mittels Formel (3.15) die Verlustleistung berechnet und diese in Abhängigkeit von  $v$  dargestellt.

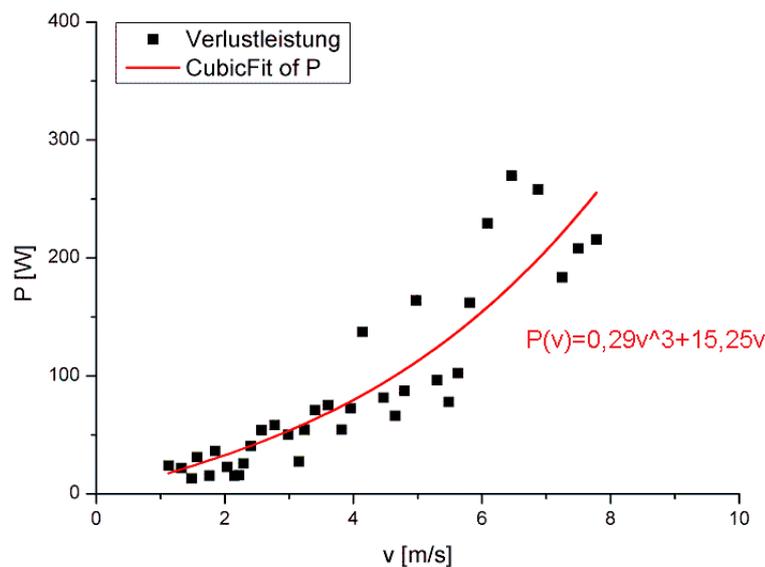


Abbildung 3.28: Verlustleistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Aus den Parametern der angefitteten Funktion lassen sich nun gemäß Formel (3.17) die Rollreibungskraft und der  $c_w$ -Wert bestimmen. Die Frontfläche von Fahrrad und Fahrer wurde mit einem Foto auf  $A = 0,57\text{m}^2$  bestimmt (das genauere Vorgehen kann in [23] nachgelesen werden), bei einer Temperatur von  $15^\circ\text{C}$  und einem Luftdruck von  $102000\text{ Pa}$  (mit dem GPS-Gerät bestimmt) betrug die Luftdichte etwa  $\rho_{\text{Luft}} = 1,2\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Es gilt dann

- $F_{Roll} = b = 15,25N$ ,
- $c_w = \frac{2a}{A\rho_{Luft}} = \frac{2 \cdot 0,29 \frac{kg}{m}}{0,57m^2 \cdot 1,2 \frac{kg}{m^3}} = 0,85$ .

Die Werte erscheinen an dieser Stelle realistisch und liegen in der richtigen Größenordnung. Um die Ergebnisse zu überprüfen und zu bestätigen wurden mehrere Ausrollkurven vermessen und danach Mittelungen über alle Kurven durchgeführt. Insgesamt wurden zwölf Ausrollkurven aufgezeichnet, ausgewertet und an das Modell angepasst. Als Ergebnis ergaben sich folgende Funktionen:

Versuchsnr.	FitFunktion
1	$P(v) = 0,29v^3 + 15,15v$
2	$P(v) = 0,49v^3 + 11,27v$
3	$P(v) = 0,50v^3 + 10,75v$
4	$P(v) = 0,48v^3 + 10,63v$
5	$P(v) = 0,32v^3 + 13,63v$
6	$P(v) = 0,26v^3 + 15,96v$
7	$P(v) = 0,27v^3 + 15,05v$
8	$P(v) = 0,26v^3 + 16,80v$
9	$P(v) = 0,34v^3 + 12,62v$
10	$P(v) = 0,50v^3 + 10,06v$
11	$P(v) = 0,10v^3 + 21,87v$
12	$P(v) = 0,38v^3 + 10,80v$

Ein Vergleich der Funktionen zeigt, dass alle Koeffizienten in der gleichen Größenordnung liegen, aber Differenzen aufweisen. Die Unterschiede lassen auf leichte Unebenheiten der Straße oder Veränderungen der Witterungsbedingungen (Windböen etc.) schließen. Des Weiteren ist es beim Fahrradfahren sehr schwierig, dieselbe Haltung und Richtung über einen längeren Zeitraum beizubehalten. Um solche Faktoren eventuell auszugleichen, wurde eine Mittelung über alle Messungen durchgeführt. Die gemittelten Geschwindigkeits- und Energiewerte finden sich in den folgenden Abbildungen wieder:

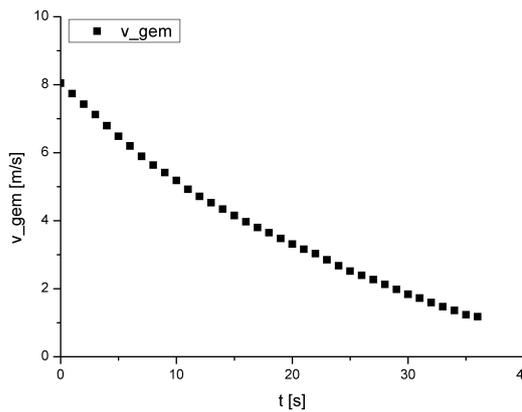


Abbildung 3.29: v-t-Diagramm

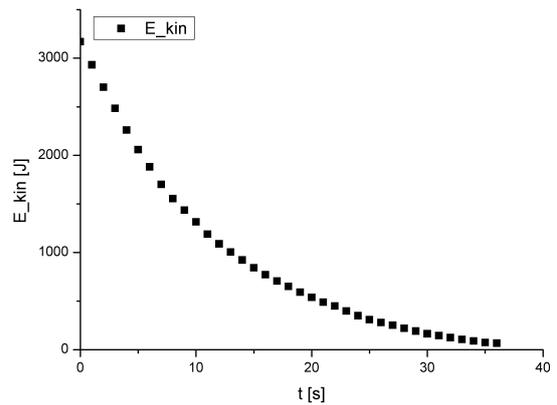


Abbildung 3.30: E-t-Diagramm

Als Ergebnis der über alle Messungen gemittelten Leistungskurve ergab sich:

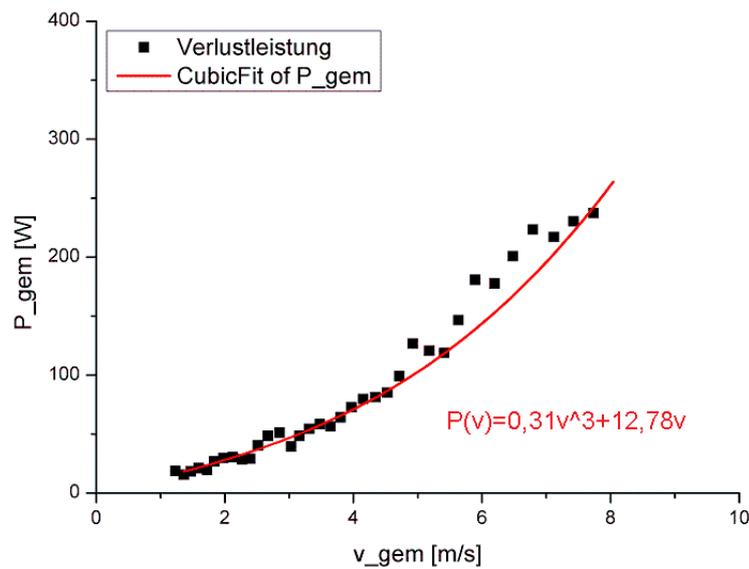


Abbildung 3.31: Über mehrere Messungen gemittelte Leistungskurve

Aus der Anpassung an die Modellkurve lassen sich folgende Werte berechnen:

- $F_{Roll} = b = 12,78N$ ,
- $c_w = \frac{2a}{A\rho_{Luft}} = \frac{2 \cdot 0,31 \frac{kg}{m}}{0,57m^2 \cdot 1,2 \frac{kg}{m^3}} = 0,91$ .

Bei dem Fahrrad, mit dem die Versuche durchgeführt wurden, handelt es sich um ein Mountainbike mit Profilreifen. Der Luftdruck im Reifen betrug während der Versuche

etwa 3 bar. Gemäß der Tabelle aus Abbildung 3.23 muss der Rollwiderstandsbeiwert daher bei etwa 0,00545 liegen. Leider waren bei dem Reifenhersteller Continental keine genaueren Werte für den Reifen zu finden. Es ergibt sich eine Rollwiderstandskraft von

$$F_{Roll} = 0,00545 \cdot 980N = 5,3N. \quad (3.18)$$

Der in den Ausrollversuchen ermittelte Wert ist damit etwa um den Faktor 2 größer als der zu erwartende Wert. Eine Ursache für die höhere Rollreibungskraft könnte die Beschaffenheit des Untergrundes sein. Die Ausrollversuche wurden auf einer neu gebauten Straße durchgeführt, deren endgültiger Belag noch nicht aufgebracht war. Daher war die Fahrbahndecke rauer als normal. Zudem legen die unterschiedlichen Werte für die Rollreibungskraft, die aus den verschiedenen Ausrollkurven hervorgehen, die Vermutung nahe, dass die Straße nicht ganz eben war. Der Höhenmesser des GPS-Empfängergeräts zeigte kaum Höhenunterschiede an, jedoch weisen die Angaben Toleranzen von  $\pm 1$  m auf.

Bei den Ausrollversuchen wurde eine sportliche Haltung eingenommen, die der Haltung auf dem Rennrad in Abbildung 3.24 ähnelt. Der ermittelte Luftwiderstandsbeiwert von 0,91 scheint daher sehr realistisch.

### Energieumsatz bei einer Fahrt bergauf

Im zweiten Teil des Projekts wurde der Track einer Fahrradfahrt bergauf aufgenommen. Dabei wurde darauf geachtet, die in den Ausrollversuchen eingenommene Haltung etwa konstant beizubehalten. Der Straßenbelag war ebener Asphalt, das Höhenprofil des Anstiegs ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.

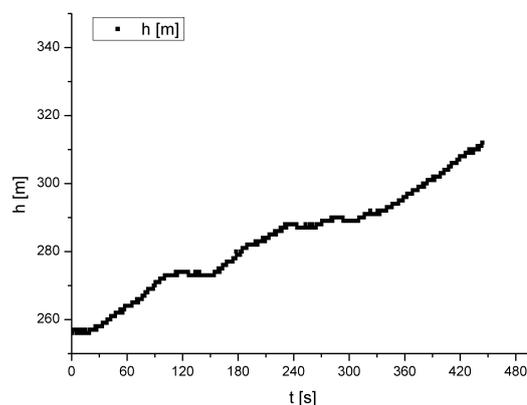


Abbildung 3.32: Höhenprofil der Strecke

Aus den aufgezeichneten Daten sollen nun die auftretenden Kräfte bestimmt und aus

diesen die Leistungs- und Energiewerte bestimmt werden. Als  $c_w$ -Wert wurde der im ersten Teil ermittelte Wert 0,91 genommen. Da der berechnete Wert für die Rollreibungskraft zu hoch war, wurde diese mit einem Rollreibungskoeffizienten von 0,005 berechnet. Zur Vereinfachung der Berechnungen wurde die Fahrt in sechs Abschnitte eingeteilt, drei Anstiege mit ungefähr konstanter Steigung und drei ebene Abschnitte. Auf den ebenen Strecken wurde das Fahrrad beschleunigt. Es treten damit folgende Kräfte auf:

1.  $F_{Roll} = \mu_{Roll} F_G$
2.  $F_{Luft} = \frac{1}{2} A \rho_{Luft} c_w \cdot v^2$
3.  $F_a = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Zur Berechnung der Luftreibungskraft wurde die Momentangeschwindigkeit verwendet, bei der Bestimmung der Beschleunigungskraft wurde die Geschwindigkeitsänderung von einem Messpunkt zum nächsten, also innerhalb einer Sekunde, eingerechnet. In den ebenen Abschnitten ergibt sich damit eine von der Zeit abhängige Gesamtkraft

$$F_{ges}(t) = F_a(t) + F_{Luft}(t) + F_{Roll}. \quad (3.19)$$

Aus dieser Gesamtkraft kann mittels

$$P(t) = F_{ges}(t) \cdot v(t) \quad (3.20)$$

die Leistung in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt werden. Um den Energieumsatz für den Streckenabschnitt zu erhalten, wurde die Energie über die verschiedenen Leistungswerte aufsummiert:

$$E(t_i) = E(t_{i-1}) + P(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}). \quad (3.21)$$

In den Anstiegen wurde die Geschwindigkeit etwa konstant gehalten. Zur Berechnung der Kraft und der Leistung wurde die Durchschnittsgeschwindigkeit verwendet. Neben der Durchschnittsgeschwindigkeit können aus den vom GPS-Gerät ermittelten Daten der Höhenunterschied  $h$  und die zurück gelegte Strecke  $l$  bestimmt werden. Die bei der Fahrt bergauf auftretenden Kräfte sind dann:

1.  $F_{Roll} = \mu_{Roll} F_N$
2.  $F_{Luft} = \frac{1}{2} A \rho_{Luft} c_w \cdot \bar{v}^2$
3.  $F_H = \frac{h}{l} F_G$

Die zur Berechnung der Rollreibungskraft benötigte Anpresskraft  $F_N$  kann aus dem Steigungswinkel  $\alpha$  mittels

$$F_N = \cos \alpha F_G \quad (3.22)$$

berechnet werden. Da die Steigungen im Versuch sehr gering waren (unter 5%), ist die Anpresskraft genauso groß wie die Gewichtskraft. Die beim Befahren des Anstiegs konstante Gesamtkraft berechnet sich aus

$$F_{ges} = F_{Roll} + F_{Luft} + F_H. \quad (3.23)$$

Die erbrachte Leistung beträgt demnach

$$P = F_{ges} \bar{v}; \quad (3.24)$$

der Energieumsatz

$$E = P \cdot \Delta t, \quad (3.25)$$

wobei  $\Delta t$  die für den Anstieg benötigte Zeit ist.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind im Folgenden dargestellt.

- t=[0,25]: beschleunigte Bewegung auf ebener Strecke  
Kräfte:  $F_{Roll}=4,9$  N,  $F_{Luft} = 0,31v^2(t)$ ,  $F_a = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$   
**Energieumsatz: 2,0 kJ**
- t=[26,108]: Fahrt bergauf (Steigung:  $h=16$  m,  $l=357$  m) bei konstanter Geschwindigkeit  $\bar{v}=4,4$  m/s  
Kräfte:  $F_{Roll}=4,9$  N,  $F_{Luft}=6,0$  N,  $F_H=43,9$  N  $\Rightarrow F_{ges}=54,8$  N  
**Energieumsatz: 19,8 kJ**
- t=[109,160]: beschleunigte Bewegung auf ebener Strecke  
Kräfte:  $F_{Roll}=4,9$  N,  $F_{Luft} = 0,31v^2(t)$ ,  $F_a = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$   
**Energieumsatz: 18,7 kJ**
- t=[161,233]: Fahrt bergauf (Steigung:  $h=14$  m,  $l=237$  m) bei konstanter Geschwindigkeit  $\bar{v}=3,3$  m/s  
Kräfte:  $F_{Roll}=4,9$  N,  $F_{Luft}=3,4$  N,  $F_H=53,8$  N  $\Rightarrow F_{ges}=62,1$  N  
**Energieumsatz: 14,8 kJ**
- t=[234,316]: beschleunigte Bewegung auf ebener Strecke  
Kräfte:  $F_{Roll}=4,9$  N,  $F_{Luft} = 0,31v^2(t)$ ,  $F_a = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$   
**Energieumsatz: 2,2 kJ**

- $t=[317,444]$ : Fahrt bergauf (Steigung:  $h=22$  m,  $l=391$  m) bei konstanter Geschwindigkeit  $\bar{v}=3,1$  m/s

Kräfte:  $F_{Roll}=4,9$  N,  $F_{Luft}=3,0$  N,  $F_H=55,1$  N  $\Rightarrow F_{ges}=63$  N

**Energieumsatz: 24,8 kJ**

444 Sekunden Mountainbikefahren auf einer Strecke von 1,8 km bei einer Überwindung von 55 Höhenmetern haben damit einen Gesamtenergieumsatz von **82,3 kJ** ergeben. Pro km ist das ein Energieumsatz von 45,7 kJ. In [26, S. 18] ist als Richtwert ein Energieumsatz von 40 kJ pro km bei freizeitmäßigem Radfahren angegeben. Da es die meiste Zeit berghoch ging, die Berge aber in einem ruhigen Tempo gefahren wurden, ist der Wert realistisch.

### 3.3.3.3 Einordnung in Themen des Physikunterrichts

Das Projekt 'Physik des Fahrradfahrens' bietet vielfältige Ansätze zum Einsatz im Physikunterricht des Gymnasiums. Aufgrund der notwendigen theoretischen Betrachtungen ist es am besten für die Durchführung in der gymnasialen Oberstufe geeignet. Dort verfügen die Schülerinnen und Schüler über das notwendige Wissen, um die verschiedenen Zusammenhänge zu erkennen und die mit dem GPS-Gerät erfassten Daten zielgerichtet auszuwerten.

Die in den Versuchen gewonnenen Ergebnisse zeigen, dass die Genauigkeit des GPS-Systems ausreichend ist, um die beschriebenen Messungen auszuführen. Dabei muss allerdings auf die Bedingungen geachtet werden. Bei einigen Versuchsdurchgängen konnten die Ergebnisse nicht genutzt werden, weil durch eine schlechte Himmelsicht und/oder ungünstige Satellitenkonstellation die Satellitensignale immer wieder verloren gingen.

Ausgehend von einer theoretischen Betrachtung der Physik des Fahrradfahrens, bei der die auftretenden Kräfte sowie die Bedeutung von Leistung und Energie analysiert werden, könnten im Rahmen eines Unterrichtsprojekts verschiedene Versuche von den Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden. Für die Ausrollversuche eignen sich gut Fußballplätze. Die Schülerinnen und Schülern könnten nach eigenem Interesse den Einfluss verschiedener Faktoren auf die wirkenden Kräfte untersuchen:

- Wie wirkt sich eine unterschiedliche Haltung auf dem Fahrrad aus?
- Welchen Einfluss hat der Luftdruck im Reifen?
- Wie sehen die Ausrollkurven unterschiedlicher Fahrradtypen aus?
- Wie unterschieden sich Leistung und Energieumsatz bei unterschiedlichen Bewegungen (konstante Geschwindigkeit auf ebener Strecke, beschleunigte Bewegung auf ebener Strecke, konstante Geschwindigkeit den Berg hoch etc.)?

Diese Auflistung soll nur einen Ansatzpunkt für mögliche Betrachtungsschwerpunkte setzen und ist beliebig erweiterbar. Möglich ist auch der Vergleich unterschiedlicher Fahrzeuge. Grundsätzlich können alle ‘Fahrzeuge’ mit Rädern verwendet werden, die, falls sie einen Motorantrieb haben, die Möglichkeit zum Auskuppeln bieten. Die Untersuchung des  $c_w$ -Wertes von Autos und Motorrädern ist ebenfalls möglich, benötigt jedoch eine sehr lange, ebene Strecke, auf der hohe Geschwindigkeiten erlaubt sind. Andererseits sollte auch die Analyse von Bewegungen mit Inline-Skates oder einem Skateboard möglich sein. Anregungen für ähnliche Projekte finden sich in [11], [22], [23] und [24] wieder.

### 3.4 Abschlussbetrachtungen

Bei der Erstellung dieser Arbeit ging es auch darum, zu prüfen, ob das GPS-System interessante Fragestellungen für den Physikunterricht bietet. Für den Dynamikunterricht ist dabei ein Konzept entstanden, das Ideen für Versuche unterschiedlicher Komplexität liefert. Vor allem an dem letzten Projekt zeigt sich, dass die Genauigkeit der mit GPS gewonnenen Daten auch für ausführlichere Betrachtungen ausreicht. Versuche mit dem GPS-Gerät können den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, ihren Alltag ein Stück weit in den Physikunterricht einzubringen und dabei realitätsnahe Messdaten zu gewinnen. Diese verlangen von ihnen die Fähigkeit, Daten an physikalische Modelle anzupassen, und die Auseinandersetzung mit technischen Hilfsmitteln wie dem Empfangsgerät oder dem Computer. Damit werden viele der Aspekte erfüllt, die sich in den Lehrplänen als Ziele eines guten Physikunterrichts wieder finden.

Bei den im Rahmen der Arbeit durchgeführten Projekten wurde das GPS-Empfangsgerät zunächst als Blackbox-Messgerät eingesetzt, wobei die Funktionsweise des Geräts außer Acht gelassen wurde. Wie die theoretischen Betrachtungen im zweiten Kapitel der Arbeit zeigen, würde eine ausführliche Beschreibung der Funktionsweise des GPS-Systems sicherlich den Rahmen des Physikunterrichts sprengen. Dennoch lassen sich auch in der Theorie viele für den Physikunterricht interessante Aspekte finden. So wäre es zum Beispiel möglich, Projekte oder Referate zu folgenden Themen zu vergeben:

- Geschichte der Navigation
- Die verschiedenen Erdmodelle
- Unterschiedliche Zeitsysteme
- Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in der Erdatmosphäre

- Die Funktionsweise von Atomuhren
- Relativistische Effekte
- Beschreibung der Satellitenbahn mit den Keplerschen Gesetzen
- usw.

Die Einbindung des GPS-Systems in den Physikunterricht kann also im Rahmen ganz unterschiedlicher Unterrichtsthemen erfolgen. Dabei sollte jedoch immer darauf geachtet werden, dass die Auswahl der Themen sinnvoll und zielgerichtet erfolgt. Dies ist auch für die Durchführung von Versuchen mit GPS-Empfangsgeräten wichtig. Die Auswertung der Daten kann sehr aufwendig sein, vor allem wenn die Schülerinnen und Schüler wenig Erfahrung im Umgang mit den Programmen zur Auswertung und Übertragung der Daten haben.

Trotzdem lohnt sich meiner Meinung nach für jeden Lehrer die Beschäftigung mit dem GPS-System. Wenn man selbst ein GPS-Empfangsgerät besitzt und Schülerinnen und Schüler eines zu Hause haben, bieten sich sehr viele Möglichkeiten für Schülerversuche. Da in vielen Schulen die Auswahl an Messgeräten, mit denen Schülerinnen und Schüler arbeiten können, eher gering ist, sollte die Chance, die GPS-Empfangsgeräte bieten, auf jeden Fall genutzt werden. Die GPS-Handempfänger sind klein und leicht zu bedienen und können daher überall hin mitgenommen werden. Während der Zeit, in der ich mich mit dieser Arbeit beschäftigt habe, war das eTrex Vista mein ständiger Begleiter. Dabei sind mir aus Alltagssituationen heraus immer wieder Ideen für kleine Versuche mit dem GPS-Gerät gekommen. Vor allem die Aufnahme des Tracks mit dem Pferd hat mir dabei viel Spaß bereitet. Da der Physikunterricht von vielen Schülerinnen und Schülern als langweilig und theorielastig wahrgenommen wird, kann hier ein Ansatz dafür liegen, die Schülerinnen und Schüler in ihrem Alltag abzuholen, sie durch interessante Versuche, die sie sich sogar selbst ausdenken können, für die Physik begeistern und ihnen dabei physikalisch wichtige Vorgänge, wie das Modellieren, zu vermitteln.

# Literaturverzeichnis

- [1] Kaplan, Elliott D. (Hrsg.): **Understanding GPS - principles and applications**; 1996, ARTECH HOUSE, Boston/ London
- [2] Bauer, Manfred: **Vermessung und Ortung mit Satelliten - NAVSTAR-GPS und andere satellitengestützte Navigationssysteme**; 4. Auflage 1997, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg
- [3] [www.heinkele.net/astro/historie.html](http://www.heinkele.net/astro/historie.html); 17.10.2008 10:17
- [4] Torge, Wolfgang: **Geodäsie**; 2. Auflage 2003, Verlag de Gruyter, Berlin
- [5] Hänel, Andreas: **Vom Sextanten zum GPS - Navigation auf der Erde**; erschienen in: *Astronomie+Raumfahrt im Unterricht* 43 (2006) 5; Verlag Friedrich, Seelze
- [6] dtv-Lexikon in 20 Bänden; 1990; Dt. Taschenbuch-Verlag, München
- [7] [www.gs-enduro.de](http://www.gs-enduro.de); 17.10.2008 10:31
- [8] Zogg, Jean-Marie: **Grundlagen der Satellitennavigation - User´s Guide**; 2006, u-blox AG, Thalwil  
[http://www.u-blox.de/customersupport/docs/GPS\\_Basics\(GPS-X-01006\).pdf](http://www.u-blox.de/customersupport/docs/GPS_Basics(GPS-X-01006).pdf);  
17.10.2008 10:40
- [9] Tipler, Paul A. und Mosca, Gene: **Physik - Für Wissenschaftler und Ingenieure**; 2. deutsche Auflage 2007, Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg
- [10] [http://www.navifuture.de/product\\_info.php?info=p201\\_Garmin-eTrex-Vista-Cx.html](http://www.navifuture.de/product_info.php?info=p201_Garmin-eTrex-Vista-Cx.html); 21.10.2008 10:03
- [11] Braun, Matthias (Examensarbeit): **Das GPS-System - Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten im Physikunterricht**; Juli 2007  
<http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/wilhelm/arbeiten/ZulaGPS.pdf>;  
17.10.2008 10:59

- [12] <http://www.kowoma.de/gps/index.htm>; 17.10.2008 11:00
- [13] **Bergmann/ Schäfer Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Relativität, Wärme**; 11. Auflage 1998, Verlag de Gruyter, Berlin
- [14] Purcell, Edward M.: **Elektrizität und Magnetismus**; erschienen in: Berkeley Physik Kurs; 4. Auflage 1989; Vieweg; Braunschweig
- [15] [http://lexikon.meyers.de/wissen/Welle+\(Sachartikel\)+Physik](http://lexikon.meyers.de/wissen/Welle+(Sachartikel)+Physik); 17.10.2008 11:12
- [16] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.): **Kernlehrplan Physik für das Gymnasium - Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen**; 1. Auflage 2008, Ritterbach Verlag, Frechen
- [17] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.): **Sekundarstufe I. Gymnasium. Physik. Richtlinien und Lehrpläne**; erschienen in: Schule in NRW (Nr. 3411); 2008, Ritterbach Verlag, Frechen
- [18] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.): **Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II - Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Physik**; erschienen in: Schule in NRW (Nr. 4721); 1. Auflage 1999, Ritterbach Verlag, Frechen
- [19] Heuer, Dieter und Wilhelm, Thomas: **Aristoteles siegt noch immer über Newton - Unzulängliches Dynamikverstehen in Klasse 11**; erschienen in: MNU 50/5 (15.7.1997) Seiten 280-285; Ferd. Dümmler Verlag, Bonn
- [20] Gerdes, Jörn und Schecker, Horst: **Der Force Concept Inventory - Ein diagnostischer Test zu Schülervorstellungen in der Mechanik**; erschienen in: MNU 52/5 (15.7.1999) Seiten 283-288; Ferd. Dümmler Verlag, Bonn
- [21] Garmin: **eTrex Vista Cx - Wegbegleiter/ Benutzerhandbuch**; 2006, GPS GmbH, Gräfeling (Niederlassung Deutschland)
- [22] Backhaus, Udo: **Alltagsmechanik mit GPS**; erschienen in: Nordmeier, V. und Oberländer, A. (Hrsg): Didaktik der Physik Frühjahrstagung Berlin 2005; 2005, Lehmanns Media - LOB.de, Berlin
- [23] Backhaus, Udo und Ehlers, Christoph: **Analyse von Alltagsbewegungen mit GPS**; erschienen in: Nordmeier, V. und Oberländer, A. (Hrsg): Didaktik der Physik Frühjahrstagung Kassel 2006; 2006, Lehmanns Media - LOB.de, Berlin
- [24] Budisa, Marco und Planinsic, Gorazd: **Teaching motion with the Global Positioning System**; erschienen in: Physics Education 38/6 512 (2003)  
<http://www.iop.org/EJ/journal/PhysEd>

[25] <http://leifi.physik.uni-muenchen.de>; 19.10.2008 13:13

[26] [http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/Internetseminar/Materialien/fahrrad\\_wdr.pdf](http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/Internetseminar/Materialien/fahrrad_wdr.pdf);  
20.10.2008 21:04

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Das Astrolabium . . . . .	5
1.2	Der Jakobsstab . . . . .	5
1.3	Der Sextant . . . . .	5
1.4	Entfernungsbestimmung bei einer Signalquelle . . . . .	8
1.5	Entfernungsbestimmung bei zwei Signalquellen . . . . .	8
1.6	Entfernungsbestimmung bei drei Signalquellen . . . . .	9
1.7	Einfluss von Zeitverschiebungen auf die Positionsbestimmung . . . . .	10
1.8	3-D-Positionsbestimmung bei einer Signalquelle . . . . .	11
1.9	3-D-Positionsbestimmung bei drei Signalquellen . . . . .	11
1.10	Erdkugel . . . . .	12
1.11	Rotationsellipsoidmodell der Erde . . . . .	13
1.12	Geoidmodell der Erde . . . . .	13
1.13	Annäherung der Erdoberfläche durch den Geoiden . . . . .	14
1.14	Lokal bestanschließende Ellipsoide . . . . .	15
1.15	Das geographische Gitter . . . . .	16
1.16	Überdeckung mit UTM-Zonen . . . . .	17
1.17	Gauss-Krüger-Projektion . . . . .	17
1.18	ECEF-Koordinatensystem . . . . .	18
1.19	Ellipsoidische Höhe $h$ . . . . .	19
1.20	Orthometrische und ellipsoidische Höhen . . . . .	20
2.1	Satellitenkonstellation im GPS-System . . . . .	30
2.2	Bahnellipse des Satelliten . . . . .	32
2.3	Satellit des Typ Block-II . . . . .	33

2.4	Satellit des Typ Block IIF . . . . .	33
2.5	Schwingungsdauer und Wellenlänge . . . . .	38
2.6	Das Spektrum elektromagnetischer Wellen . . . . .	39
2.7	scale=0.8 . . . . .	39
2.8	Doppler-Frequenzverschiebung . . . . .	40
2.9	Aufbau der Erdatmosphäre . . . . .	44
2.10	Phasenmodulation der GPS-Signale . . . . .	48
2.11	Prinzip der Kreuzkorrelation in GPS-Empfängern . . . . .	52
2.12	Fehlerbudget der Pseudoentfernungsmessung . . . . .	58
3.1	Hauptfenster in MapSource . . . . .	66
3.2	Eigenschaften des Tracks . . . . .	66
3.3	Fahrt mit dem Auto bei 91 km/h . . . . .	69
3.4	Trackeigenschaften . . . . .	69
3.5	s-t-Diagramm . . . . .	70
3.6	v-t-Diagramm . . . . .	70
3.7	Fahrt mit dem Auto bei 73 km/h . . . . .	70
3.8	Trackeigenschaften . . . . .	70
3.9	s-t-Diagramm . . . . .	71
3.10	v-t-Diagramm . . . . .	71
3.11	Fahrt mit dem Motorroller bei 38 km/h . . . . .	71
3.12	Trackeigenschaften . . . . .	71
3.13	s-t-Diagramm . . . . .	72
3.14	v-t-Diagramm . . . . .	72
3.15	Kurze Fahrt mit dem Motorrad . . . . .	75
3.16	Höhenprofil der Motorradfahrt . . . . .	75
3.17	s-t-Diagramm . . . . .	76
3.18	Geschwindigkeitsverlauf . . . . .	76
3.19	Beschleunigungsverlauf . . . . .	76
3.20	Track eines kurzen Ausritts . . . . .	77
3.21	s-t-Diagramm . . . . .	78

3.22	Geschwindigkeitsverlauf . . . . .	78
3.23	Auswahl an Rollwiderstandskoeffizienten . . . . .	81
3.24	Auswahl an Luftwiderstandsbeiwerten . . . . .	81
3.25	Berechnung der Hangabtriebskraft . . . . .	82
3.26	Ausrollkurve Nr.1 . . . . .	84
3.27	Abnahme der kinetischen Energie beim Ausrollen . . . . .	85
3.28	Verlustleistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit . . . . .	85
3.29	v-t-Diagramm . . . . .	87
3.30	E-t-Diagramm . . . . .	87
3.31	Über mehrere Messungen gemittelte Leistungskurve . . . . .	87
3.32	Höhenprofil der Strecke . . . . .	88

# Bildnachweis

- S. 5, Abb. 1.1: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Astrolabium.jpg>
- S. 5, Abb. 1.2: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Jacobstaff.JPG>
- S. 5, Abb. 1.3:  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Tycho\\_instrument\\_sextant\\_mounting\\_19.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Tycho_instrument_sextant_mounting_19.jpg)
- S. 8, Abb. 1.4: [1, S.16]
- S. 8, Abb. 1.5: [1, S.17]
- S. 9, Abb. 1.6: [1, S.18]
- S. 10, Abb. 1.7: [1, S.19]
- S. 11, Abb. 1.8: [1, S.21]
- S. 11, Abb. 1.9: [1, S.22]
- S. 12, Abb. 1.10:  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Earth\\_Western\\_Hemisphere.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Earth_Western_Hemisphere.jpg)
- S. 13, Abb. 1.11: [http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Geoid\\_EGM96.gif](http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Geoid_EGM96.gif)
- S. 13, Abb. 1.12: [http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Geoids\\_sm.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Geoids_sm.jpg)
- S. 14, Abb. 1.13: [8, S. 59]
- S. 15, Abb. 1.14: [2, S. 27]
- S. 16, Abb. 1.15:  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Image:WorldMapLongLat-eq-circles-tropics-non.png>
- S. 17, Abb. 1.16: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Utm-zones.jpg>
- S. 17, Abb. 1.17:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Usgs\\_map\\_traverse\\_mercator.PNG](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Usgs_map_traverse_mercator.PNG)
- S. 18, Abb. 1.18: [2, S. 64]

- S. 19, Abb. 1.19: [2, S. 29]
- S. 20, Abb. 1.20: [2, S. 30]
- S. 30, Abb. 2.1:  
*[http://en.wikipedia.org/wiki/Image:GPS\\_satellite\\_constellation.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:GPS_satellite_constellation.jpg)*
- S. 32, Abb. 2.2: [2, S. 72]
- S. 33, Abb. 2.3: *<http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Navstar-2.jpg>*
- S. 33, Abb. 2.4: *<http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Navstar-2F.jpg>*
- S. 38, Abb. 2.5: [2, S. 104]
- S. 39, Abb. 2.6: [2, S.106]
- S. 39, Abb. 2.7: [2, S. 107]
- S. 40, Abb. 2.8: *<http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Dopplershiftdp.png>*
- S. 44, Abb. 2.9: [2, S. 122]
- S. 48, Abb. 2.10: [2, S. 162]
- S. 52, Abb. 2.11: [2, S. 180]
- S. 58, Abb. 2.12: [2, S. 251]
- S. 81, Abb. 3.23: [26, S. 24]
- S. 81, Abb. 3.24: [26, S. 25]
- S. 82, Abb. 3.25: [25]
- Die Abbildungen im dritten Kapitel der Arbeit stammen bis auf die hier aufgeführten Ausnahmen aus dem Archiv des Verfassers oder wurden von ihm selbst erstellt.

# Erklärung

Die Unterzeichnete versichert, dass sie die vorliegende schriftliche Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die von ihr angegebenen Hilfsmittel benutzt hat. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, wurden in jedem Fall unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht. Dies gilt auch für beigegebene Zeichnungen, bildliche Darstellungen, Skizzen und dergleichen.

Der Unterzeichneten ist bewusst, dass jedes Zuwiderhandeln (Einreichen einer Arbeit, die wörtlich oder nahezu wörtlich, ganz oder zu Teilen aus einer Arbeit oder mehreren Arbeiten [publiziert im Internet, in Zeitschriften, Monographien etc.] anderer übernommen ist) als Täuschungsversuch (siehe § 18 BPO) gelten kann, der die Bewertung der Arbeit mit 'nicht ausreichend' zur Folge hat.

Siegen, den 27.10.2008