

Präzisionsbausteine der Teilchenphysik

York Schröder

(Univ. Bielefeld)

Bielefeld, 4 Jun 2009

Motivation

Warum tun wir (Physiker) das, was wir tun?

- um quälende Fragen zu beantworten: warum sind wir hier?
- oder: warum passieren all diese seltsamen Dinge um uns herum?
 - ▷ Sterne, Astrophysik, Kosmologie, Universum
 - ▷ Chemie, Biologie, Elektromagnetismus
 - ▷ Atom, Atomkern, Protonen, Quarks

wir erkennen faszinierende Vielfalt - aber auch Eleganz

haben ein System des Naturverständnisses aufgebaut

- QM + spezielle Rel \Rightarrow QFT
- Objekte: raumfüllende Felder; Anregungen: Teilchen
- „Standard-Modell“ $\hat{=}$ 3 grundlegende strukturelle Bausteine
 - ▷ Eich-System: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$; ~ 3 Parameter g_i
 - ▷ Gravitations-System: EH Wirkung + min Materiekopplung; 2 Par G_N, Λ
 - ▷ Higgs-System: kein tiefes Prinzip; **viele** Parameter; vorläufiges Konzept?

Standardmodell (SM)

Elementarteilchen \equiv ultimative Bausteine

Three Generations
of Matter (Fermions)

	I	II	III	
mass \rightarrow	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
charge \rightarrow	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin \rightarrow	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
name \rightarrow	u up	c charm	t top	γ photon
	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	d down	s strange	b bottom	g gluon
	<2.2 eV	<0.17 MeV	<15.5 MeV	91.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z⁰ weak force
	0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	± 1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	e electron	μ muon	τ tau	W[±] weak force

- bekannt:

- vorhergesagt / erhofft:

- ▷ Higgs-Boson(en)
- ▷ SUSY-Teilchen
- ▷ ...

Quantenfeldtheorie (QFT)

Quantenfeldtheorie \equiv Art der Wechselwirkungen

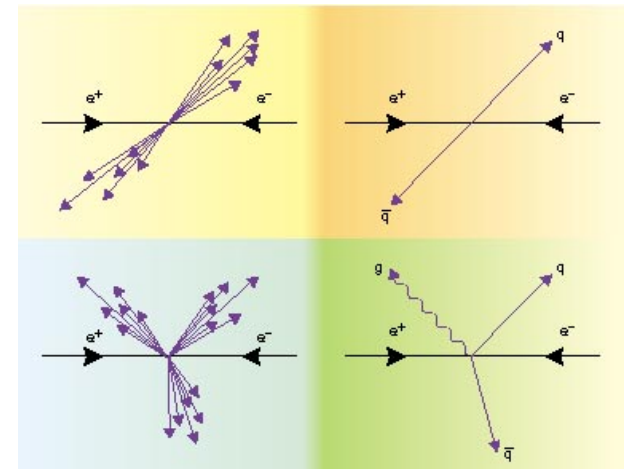
- bekannt: $\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{EW}$
- vorhergesagt / erhofft:
 - ▷ gesunde lokale Eichtheorie
 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ (g-WZ- γ)
 - ▷ Extra Dimensionen
 - ▷ Strings
 - ▷ ...

- einige wichtige Experimente

Name	Ort	Art	E_{cm} [GeV]	Zeitraumen	Glanzstück
LEP	CERN, Genf	e+e	209	1989-2000	Z-, W-Boson
HERA	DESY, Hamburg	e+p	318	1992-2007	Gluon
Tevatron	Fermilab, Chicago	p+p	2000	1983-2010(?)	Top-Quark
LHC	CERN, Genf	p+p	14000	2009 -	Higgs-Boson?, ...
ILC	?	e+e	500-1000	201? -	...

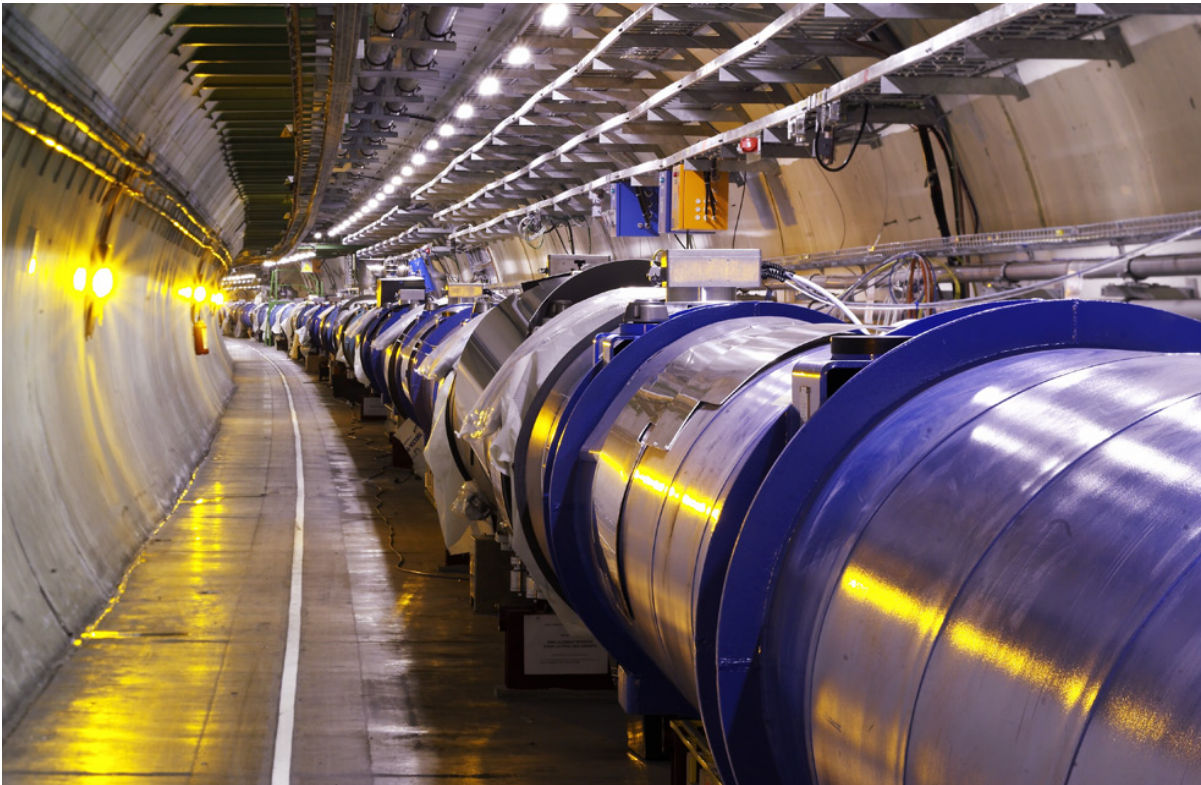
SM-Test (mit Teilchenbeschleunigern)

- z.B. LEP, $e^+e^- \rightarrow X$ (irgendetwas): finden zwei Klassen von Ereignissen (QM!)
- (1) $X = e^+e^-$ or $\tau^+\tau^-$ or ... l^+l^-
 - ▷ Leptonen: keine Farbladung \rightarrow hauptsächlich QED-Wechselwirkungen
 - ▷ einfacher Endzustand: kleine Kopplung ($\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$) meistens (99%) passiert nichts
 - ▷ $e^+e^- \gamma \sim 1\%$ \rightarrow prüfe Details der QED
 - ▷ $e^+e^- \gamma\gamma \sim 0.01\%$ \rightarrow ...
- (2) $X > 10$ Teilchen: π , ρ , p , \bar{p} , ...
 - ▷ „griechisch-lateinische Suppe“ zusammengesetzt aus Quarks + Gluonen
 - ▷ Muster: E+Impuls-Fluss in „Jets“
 - ▷ 2 Jets $\sim 90\%$; 3 Jets $\sim 9\%$; 4 Jets $\sim 0.9\%$
 - ▷ direkte Bestätigung der asympt. Freiheit!
 - ▷ harte Strahlung selten \rightarrow # der Jets
 - ▷ weiche Strahlung häufig \rightarrow verbreitert Jet
- inzwischen: „SM testen“ \rightarrow „Hintergründe ausrechnen“ auf der Suche nach neuen Phänomenen
Abweichungen \rightarrow „neue“ Physik



Teilchenbeschleuniger: LHC Datenblatt

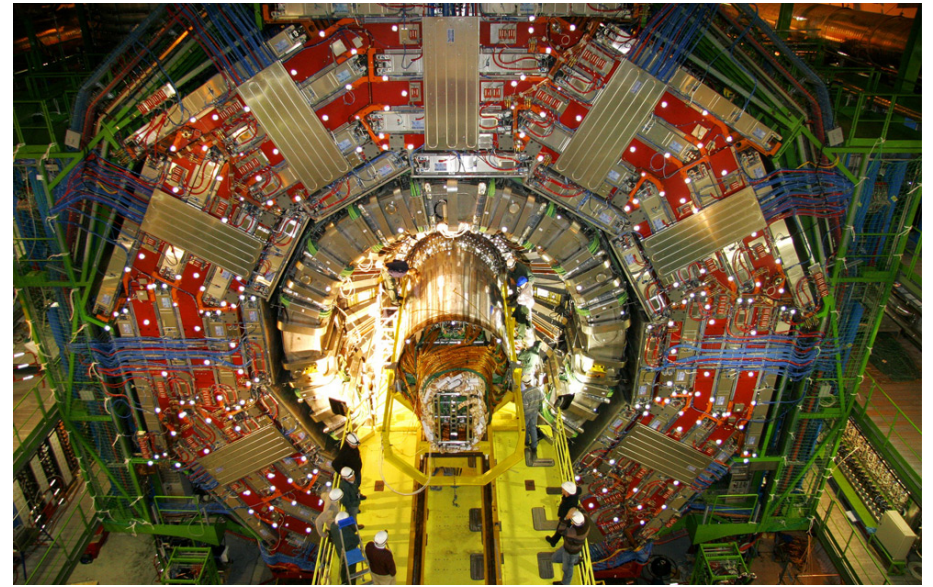
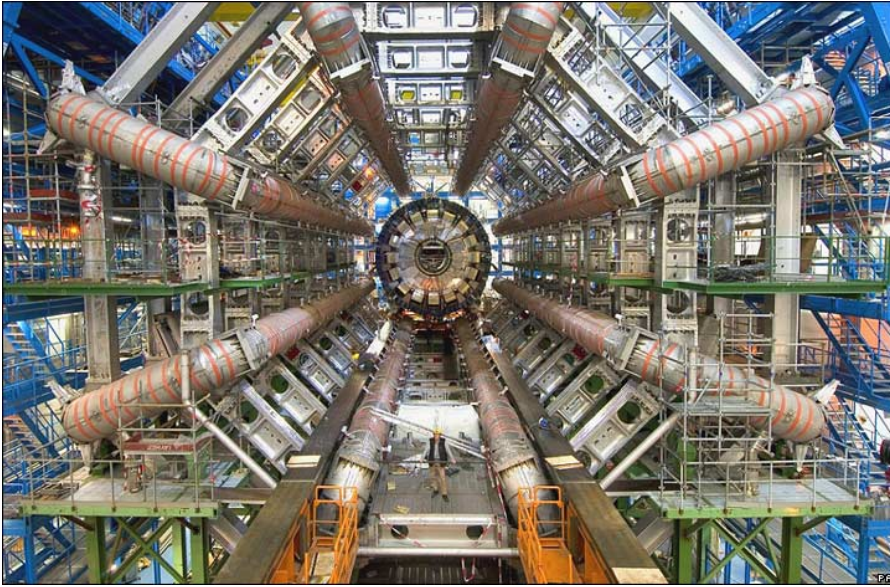
- 2×2800 Pakete à 15 Milliarden Protonen; Kollisionen alle 30 ns
- Energie im Schwerpunkts-(=Labor)-system von p+p: $\sqrt{s} = 14$ TeV



- ca 3 Milliarden Euro
- 27 km Tunnel
- 1200 Dipol-Magnete
- B-Feld bis 8.6 Tesla
- 1.9 Kelvin
- 90 Tonnen He (fl)
- diese Parameter
→ $E_{max} = 7$ TeV

- zentrale Größe: **Luminosität**; geplant sind $L = (10^{33} \dots 10^{34}) \frac{1}{cm^2 s}$
- für einen spezifischen Prozess: Ereignisrate = **Luminosität** · Wirkungsquerschnitt

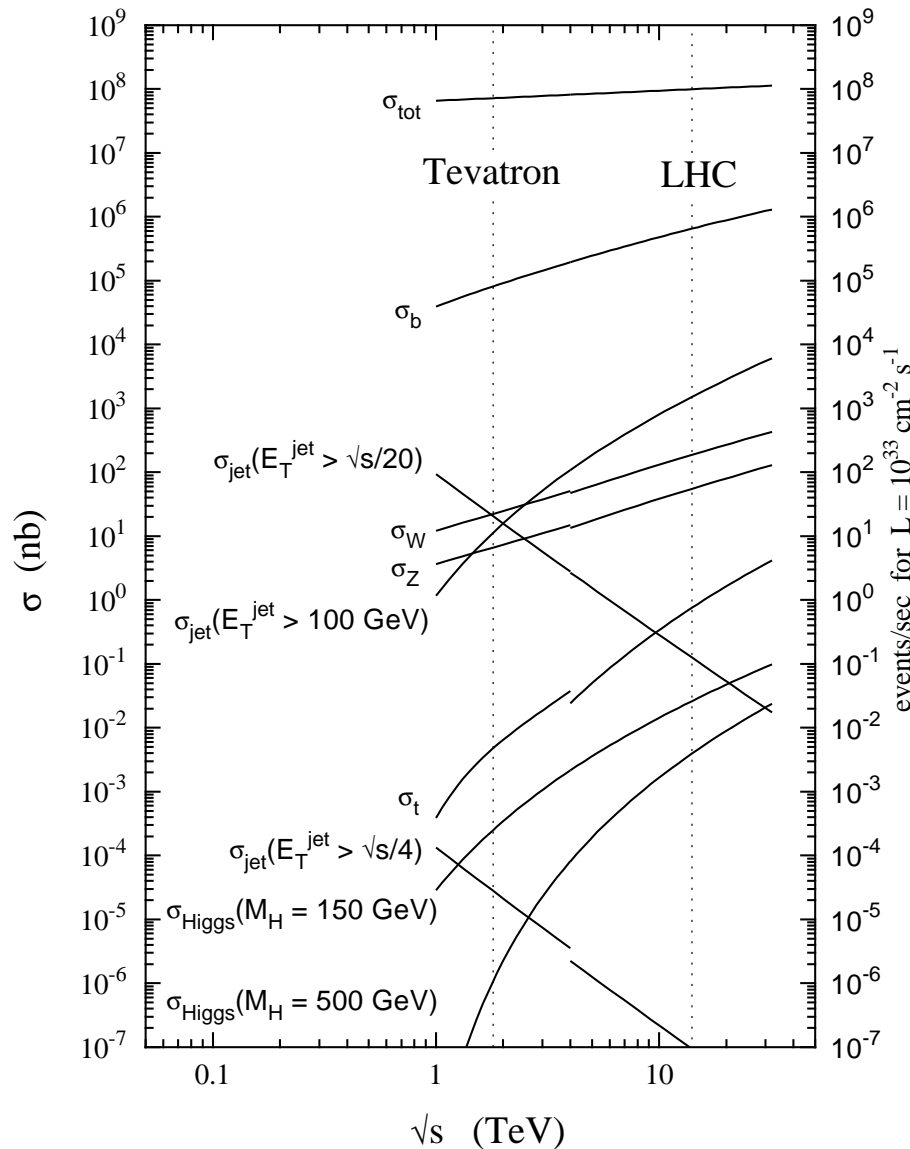
LHC - Detektoren



- ATLAS - A Toroidal LHC Apparatus
- 45×22×22 m, 7000 Tonnen
- 1870 Physiker ∈ 150 Institute
- Datenrate 100000 CD's/sec → 27 CD's/min speichern
- pro „Ereignis“ im Mittel 22 simultane pp-Kollisionen
- oft Signal/Hintergrund < 10^{-10} !!
- CMS - Compact Muon Solenoid
- 21×16×16 m, 12500 Tonnen
- 2300 Physiker ∈ 159 Institute

LHC - typische Ereignisraten

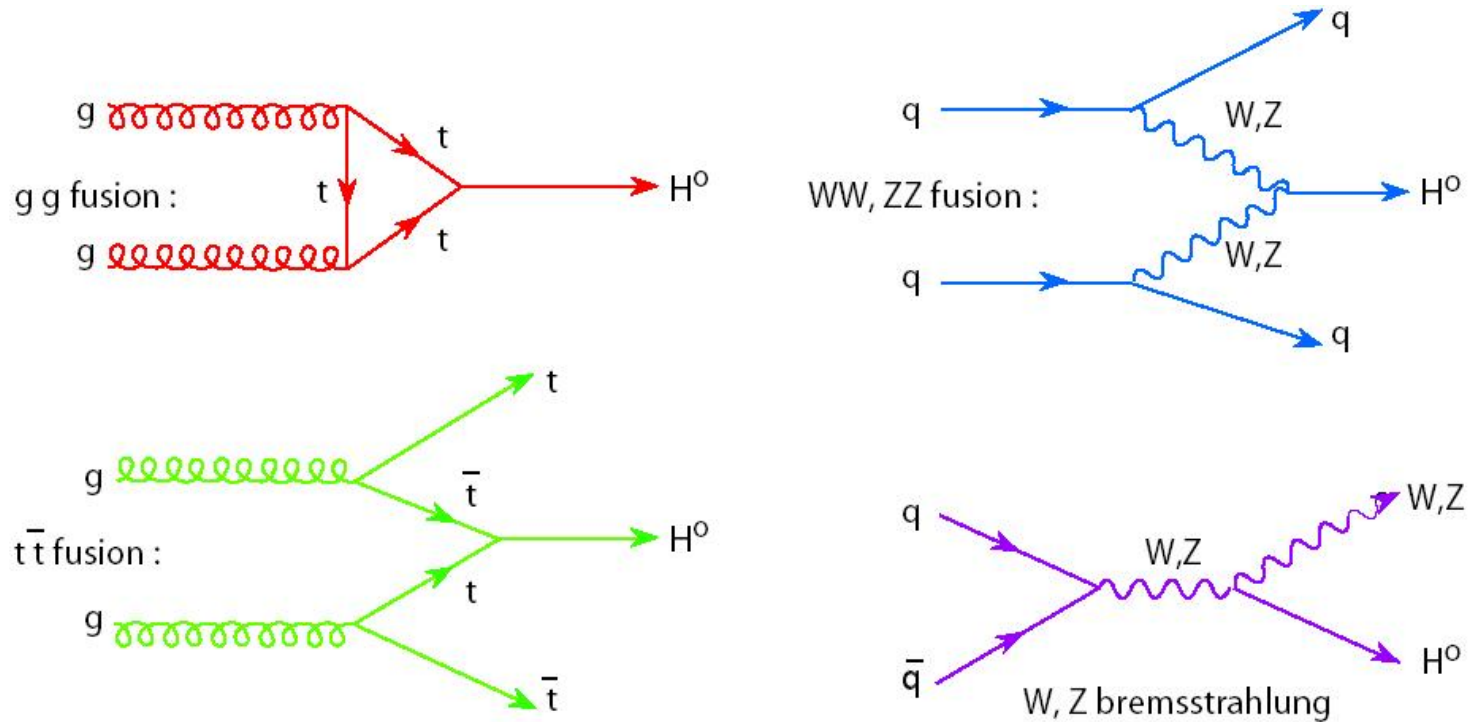
proton - (anti)proton cross sections



- niedrige LHC Luminosität
- 10^8 pp-Stöße pro Sekunde
- Signal vs Hintergrund!
- pro Sekunde wird produziert:
 - ▷ 200 W-Bosonen
 - ▷ 50 Z-Bosonen
 - ▷ 1 $t\bar{t}$ -Paar
- pro Minute wird produziert:
 - ▷ 1 leichtes Higgs

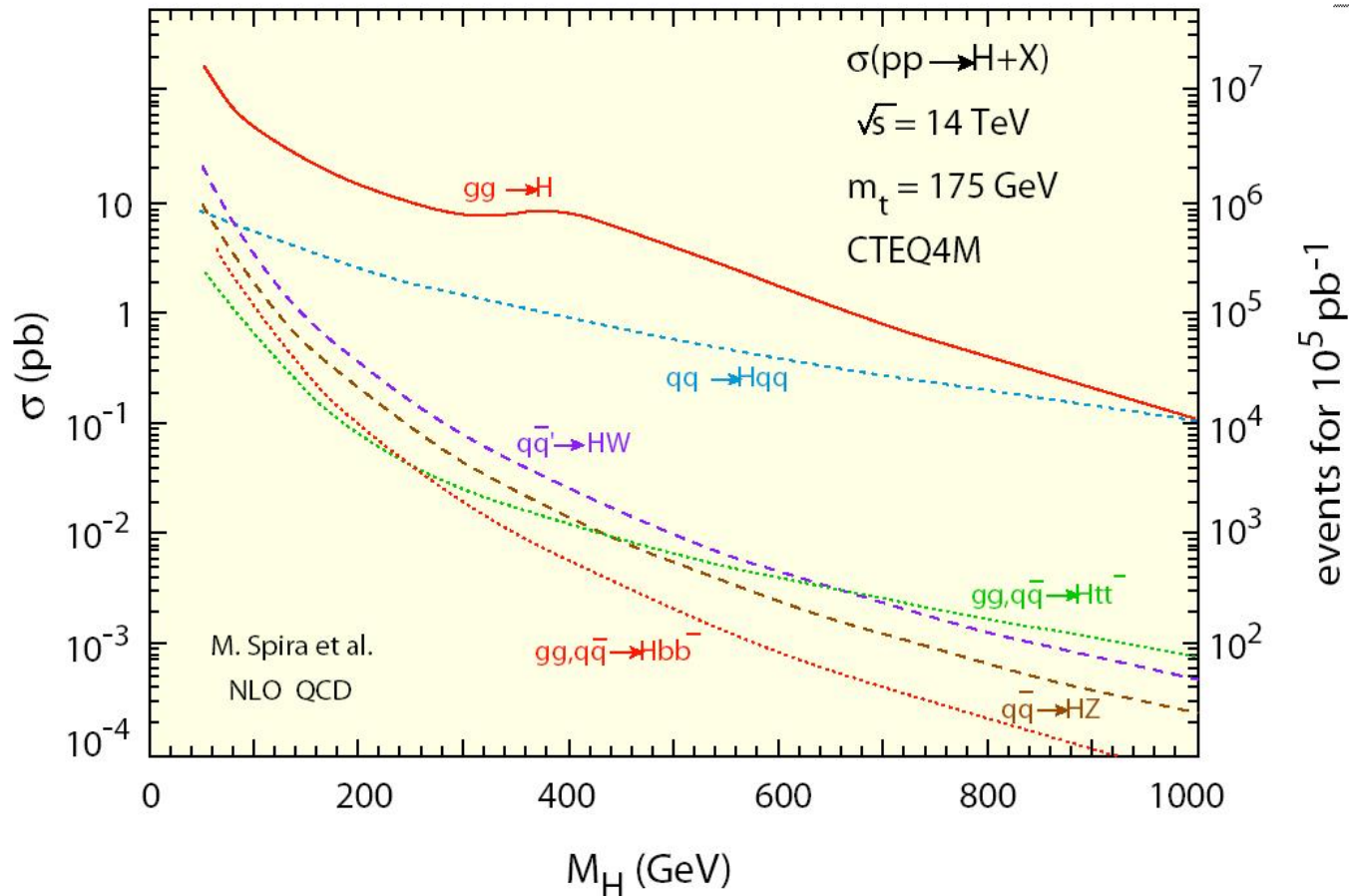
Wie werden Higgs-Bosonen produziert?

- Protonen bestehen aus Quarks+Gluonen (LHC als Gluon-Collider)



- graphische Darstellung: Feynman-Diagramme
- manchmal sind „Schleifen“ (loops) dominant! (vgl. nächste Seite)

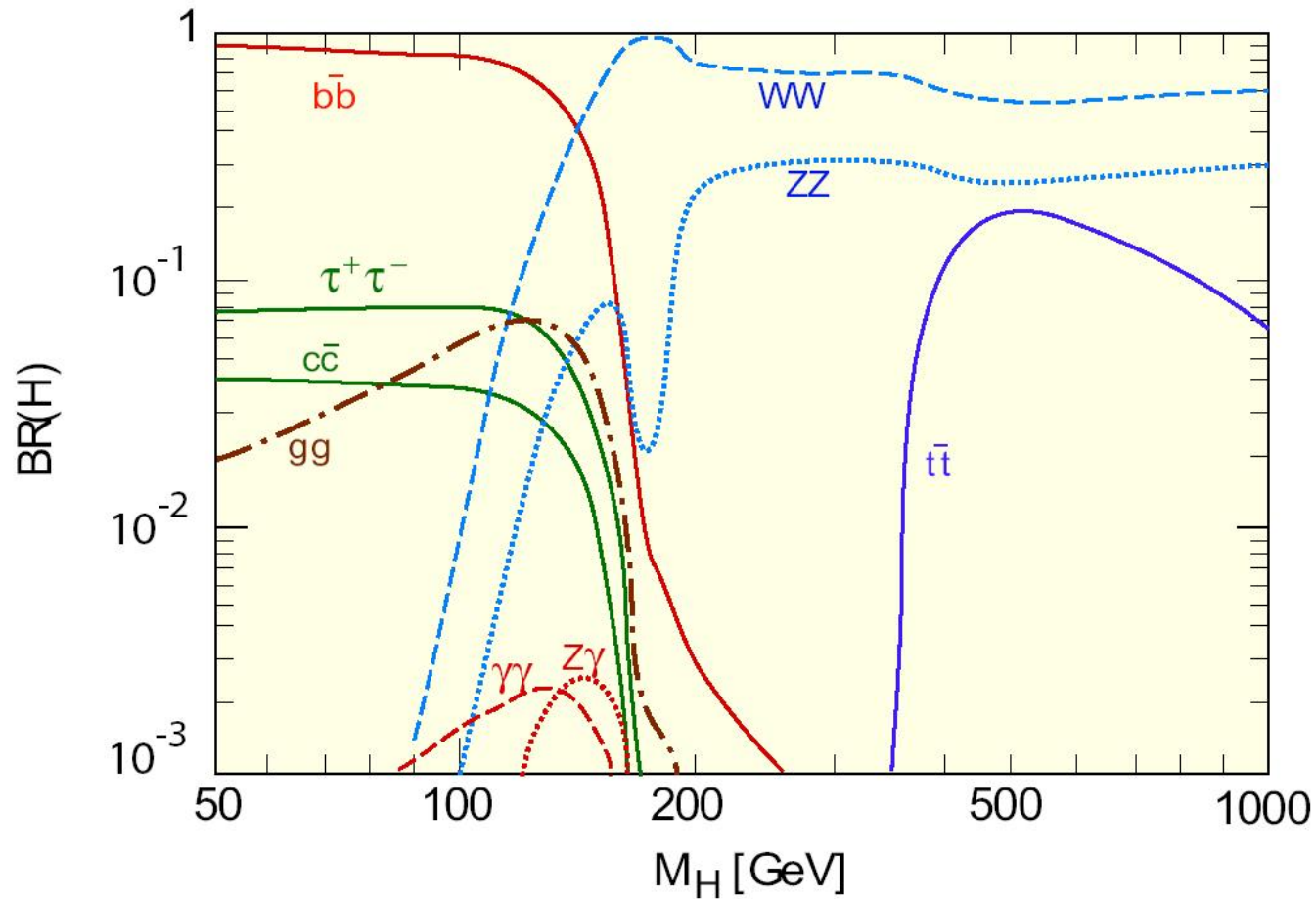
Wieviele Higgs-Bosonen werden produziert?



- CTEQ4M sind „Strukturfunktionen“: Verteilung Quarks+Gluonen im Proton
- Ereignisse pro Jahr (eff. 10^7 sec) am LHC bei hoher Luminosität ($1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{ cm}^2$)
- **wichtigster Erzeugungs-Prozess: Gluon-Fusion**

Higgs-Zerfallsraten

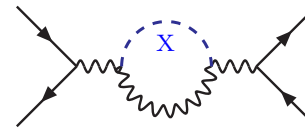
- Verzweigungsverhältnisse hängen stark von der Higgs-Masse ab



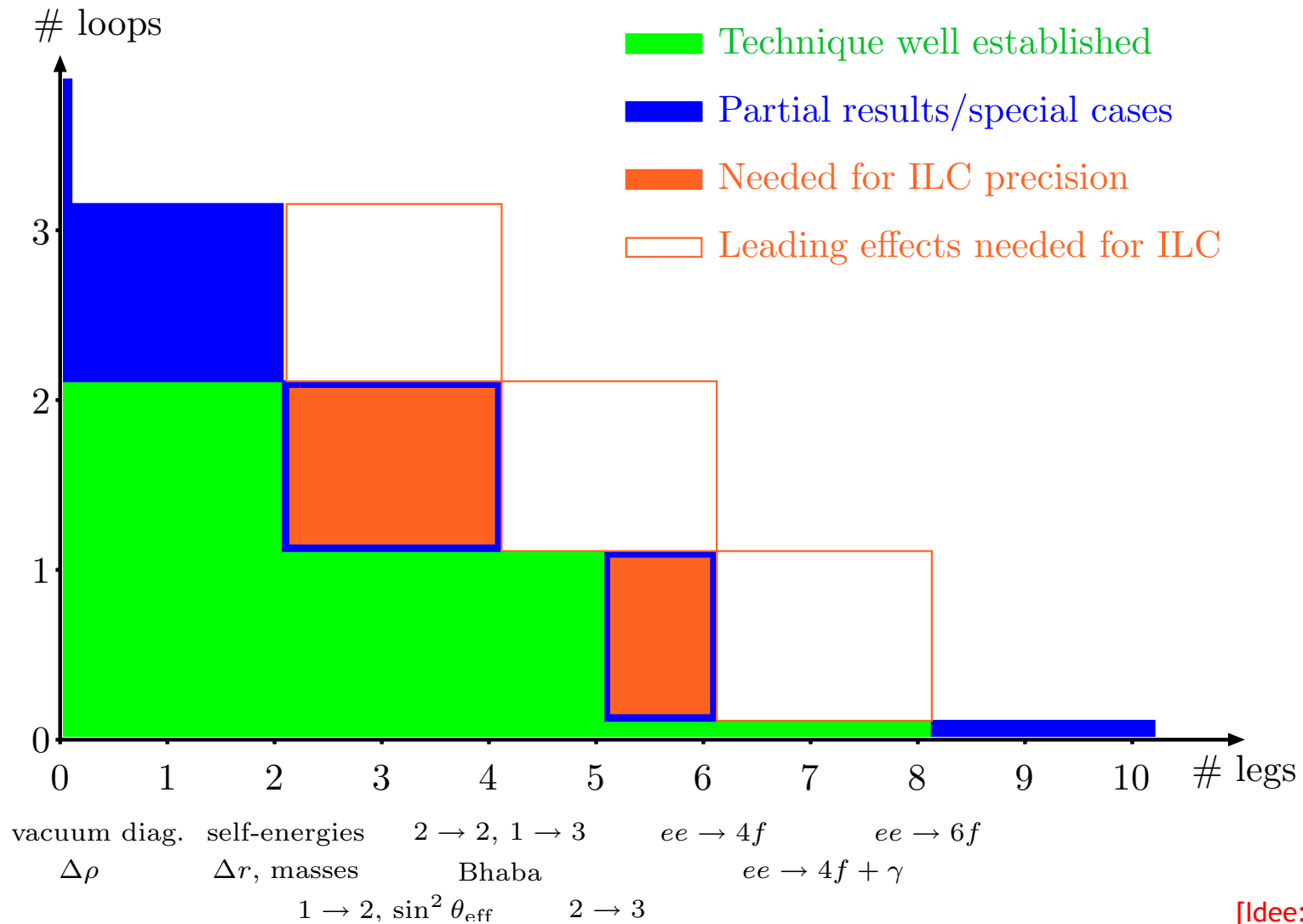
- **wichtigster Zerfalls-Kanal: $b\bar{b}$ / WW**
- Anzahl beobachteter Ereignisse ist nun $N_{x,obs} = L \cdot \sigma_x \cdot BR \cdot \Delta t \cdot \varepsilon$

Kern-Ideen der Teilchen-Phänomenologie

- Exploration eines neuen Energiebereichs
 - ▷ Suche nach „erwarteten“ Signalen neuer Physik (z.B.: Higgs)
 - ▷ offen sein für unerwartete neue Physik
- Durchführung präziser SM-Tests
 - ▷ hohe Sensitivität auf BSM-Physik bei Präzisionsmessungen: Quantenkorrekturen!
 - ▷ benutze SM-Messungen zum „Eichen“ der Detektoren
 - ▷ verstehe SM bei $\sqrt{s} = 14$ GeV; check Monte-Carlo Generatoren etc.
- experimentelle Limits \leftrightarrow theoretische Präzision
 - ▷ z.B. SUSY-Suche
 \tilde{q}, \tilde{g} erzeugt durch starke WW; Kaskaden-Zerfall \rightarrow LSP
 - ▷ fehlende Energie? z.B. Jets + E_T^{miss}
 - ▷ SUSY-Massenskala etablieren
 - ▷ Modellparameter festlegen (schwer! ILC..)



Loops+Legs - Sport

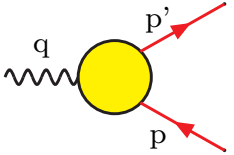


→ im Folgenden: vier Beispiele; meist von „oben links“

(1) Magnetische Momente von Leptonen

- Vorhersage der Dirac-Theorie: $\mu_l = 2 \frac{e\hbar}{2m_l} s \quad (l \in \{e, \mu, \tau\})$

- Quantenkorrekturen: $2 \rightarrow 2(1 + a_l)$

- Berechnung:  $= \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_l} F_2(q^2) \right] u(p)$

- Zusammenhang: $a_l = F_2(0)$

▷ Experiment: $a_\mu = 116592080(63) \cdot 10^{-11}$

▷ Theorie: $a_\mu^{QED} = \frac{1}{2\pi} \alpha + \dots + \# \alpha^4 + ?? \alpha^5$

wobei $\alpha \approx 1/137$

α^1 : [Schwinger 1948]

$\alpha^4 \approx 380 \cdot 10^{-11}$ [Kinoshita et al. 2002; Laporta, Remiddi 2006]

α^5 : [Kinoshita et al, in progress]

▷ Theorie: a_μ^{EW} bis 2-loop OK

- Vergleich: „interessante Diskrepanz“ von 3σ
(1.8σ mit τ -Daten für hadronische Effekte)

(2) Hochpräzisionsbestimmungen der Massen von Eichbosonen

- Experiment: ILC @ Z-Resonanz ($M_W = 80404 \text{ MeV}$)

- ▷ → Messung mit $\delta M_W^{exp} = 6 \text{ MeV}$ möglich
- ▷ vgl. mit $\delta M_W^{exp} = 30 \text{ MeV}$ aktuell

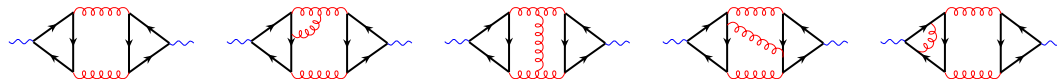
- Theorie: SM enthält Vorhersage für $M_W(M_Z, G_F, \alpha, \delta\rho)$

wobei $\delta\rho =$ elektroschwacher Rho-Parameter [Veltman 1977]
 $=$ Verhältnis zwischen neutralem und geladenem Strom
 $= \frac{\Pi_T^{ZZ}(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_T^{WW}(0)}{M_W^2}$

- Berechnung: $\delta\rho = 1 + \#\alpha_s + \#\alpha_s^2 + \#\alpha_s^3 + \dots$

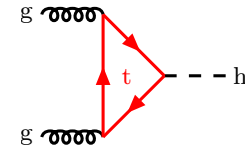
wobei $\alpha_s \approx 1/10$

- ▷ $\alpha_s^1 \Rightarrow \delta M_W = -60 \text{ MeV}$ [Djouadi 1988]
- ▷ $\alpha_s^2 \Rightarrow \delta M_W = -10 \text{ MeV}$ [Fleischer, Tarasov 1994]
- ▷ $\alpha_s^3 \Rightarrow \delta M_W = +0.2 \text{ MeV}$ [YS, Steinhauser 2005]



(3) Entkopplungsrelationen für schwere Quarks

- wichtigster Produktionskanal für Higgs-Bosonen am LHC: Gluonfusion ($g + g \rightarrow H$)
- analog Zerfallskanal ($H \rightarrow g + g$)
- Theorie: Prozesse sind loop-induziert (s.o.)



→ höhere Ordnungen der Störungstheorie extrem wichtig!

▷ z.B. $\Gamma(H \rightarrow gg) = \frac{G_F M_H^2}{36\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \cdot K$

▷ wobei $K \sim 1 + \#\alpha_s + \#\alpha_s^2 + \#\alpha_s^3 + \dots$

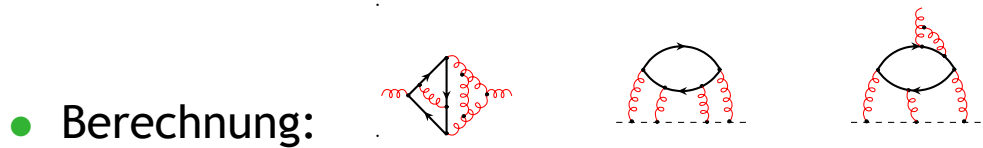
bzw. $K \sim 1 + 0.656 + 0.204 + 0.019 + \dots$ [Baikov,Chetyrkin 2006]

- brauche sehr präzise Kenntnis der Kopplungskonstante α_s
- Experiment: bestimme α_s bei „niedriger“ Energie
z.B. in Tauon-Zerfällen ($M_\tau = 1.777 \text{ GeV}$)
→ $\alpha_s(M_\tau) = 0.345 \pm 0.004_{exp} \pm 0.008_{th}$
- Strategie: evolviere α_s zu höherer Energie
z.B. bis $\alpha_s(M_Z) = 0.1216 \pm 0.0004_{exp} \pm 0.0010_{th} \pm 0.0004_{evol}$ ($M_Z = 91.2 \text{ GeV}$)
→ laufende Kopplung; RG-Gleichungen; Betafunktion $\beta(N_f = \# \text{ leichter Quarks})$
→ vgl. Masse(u, d, s, c, b, t) $\approx (0.002, 0.004, 0.095, 1.25, 4.2, 174) \text{ GeV}$

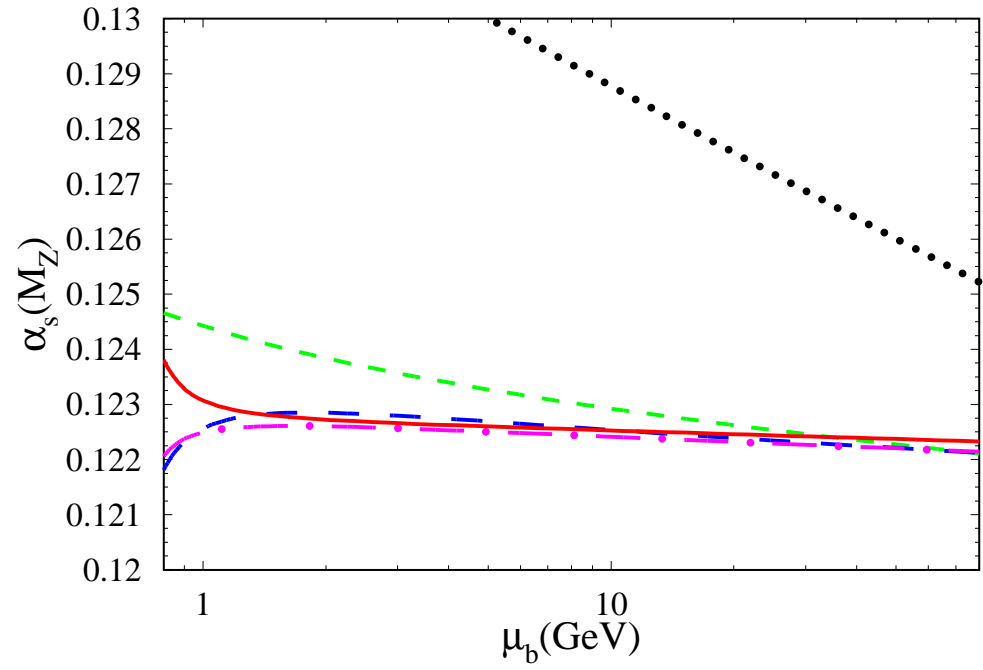
(3) Entkopplungsrelationen für schwere Quarks

- kreuzen also die b -Quark-Schwelle
 → Kernidee: Effekte schwerer Quarks ausintegrieren

● Strategie: $\alpha_s^{(4)}(M_\tau) \xrightarrow{\text{run } N_f=4} \alpha_s^{(4)}(\mu) \xrightarrow{\text{Entk } 4 \leftrightarrow 5} \alpha_s^{(4)}(\mu) \xrightarrow{\text{run } N_f=5} \alpha_s^{(5)}(M_Z)$



- μ -Skalenabhängigkeit?
 - ▷ muss verschwinden
 - ▷ hängt ab von Entkopplungs-Präzision
 - ▷ Ergebnis: 4-loop flach [YS,Steinhauser 2006]



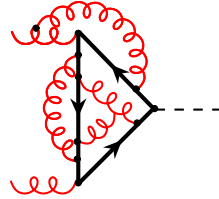
(3) Entkopplungsrelationen für schwere Quarks

- \Rightarrow hochpräzise Evolution der „laufenden“ Kopplung $\alpha_s(E)$
- weitere amüsante Anwendung der Entkopplungsrelationen:

Baustein für (5-loop)

$$\Gamma(H \rightarrow gg)$$

$$\sigma(gg \rightarrow H)$$



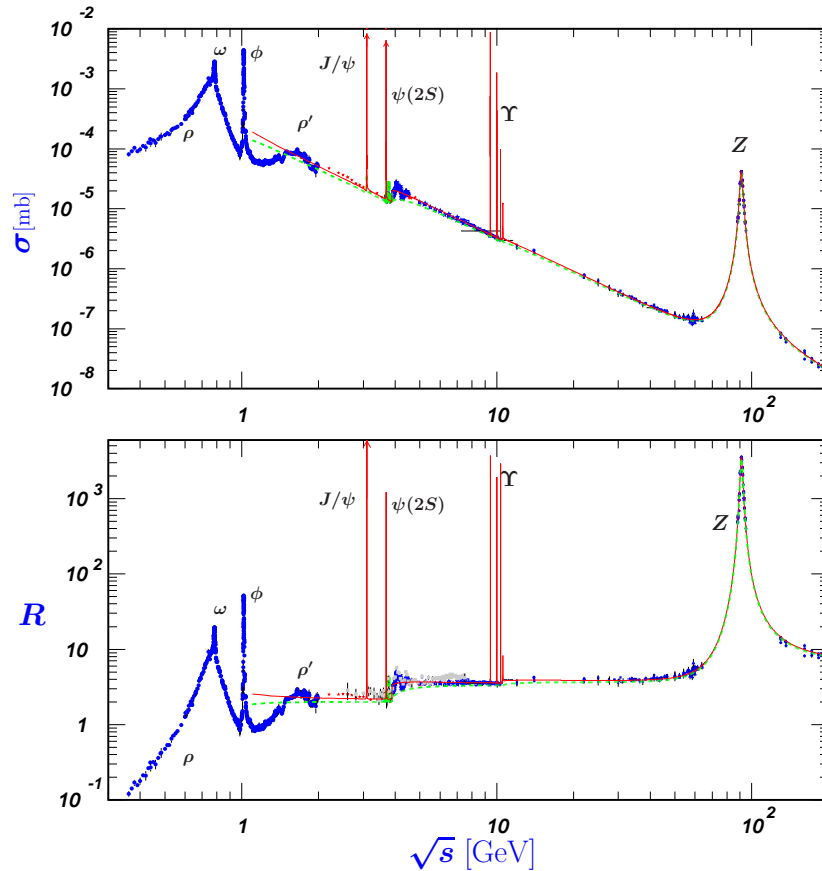
via Niederenergie-Theorem $\mathcal{L}_{eff} = \frac{H}{v} \left(G_{\mu\nu}^a \right)^2 \partial_{\ln m_t^2} \ln \frac{\alpha_s^{(5)}}{\alpha_s^{(4)}}$

[Chetyrkin et al. 1998]

(4) Hochpräzisionsbestimmungen der Massen von Quarks

- zentrale Größe der Teilchenphysik: das Verhältnis $R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$

- Experiment:



- Theorie (naiv):

Partonenmodell

$$R(s) \approx N_c \sum_q Q_q^2 \theta(\sqrt{s} - M_q)$$

$$\sim \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}$$

$u \quad d \quad s \quad c \quad b \quad t$

- ▷ grobe Struktur OK
- ▷ Details → Präzision
- ▷ scharfe Resonanzen
z.B. J/ψ ($\bar{c}c$) oder Υ ($\bar{b}b$)
- ▷ Schwellenverhalten

(4) Hochpräzisionsbestimmungen der Massen von Quarks

- Theorie (präzise):

Unitarität verbindet $R(s)$ mit Korrelator: $\sum_{\text{had}} \left| \text{Diagram} \right|^2 = \text{Diagram}$

- ▷ bzw. $R(s) \approx \Im \Pi(s - i\epsilon)$
- ▷ Dispersionsrelation $\Pi(q^2) \sim q^2 \int ds \frac{R(s)}{s(s - q^2)} + \text{const}$

- Strategie: $R^{exp} \stackrel{!}{=} R^{th}(\alpha_s, M_q)$

- ▷ α_s -Bestimmung \leftarrow konsistente RG-Evolution $\leftarrow \beta(N_f = \text{leichte Quarks})$
+ Entkoppeln schwerer Quarks (s.o.)
- ▷ M_q -Bestimmung

- Kernidee: Taylorkoeffizienten von $\Pi \hat{=} \text{Momente von } R(s)$

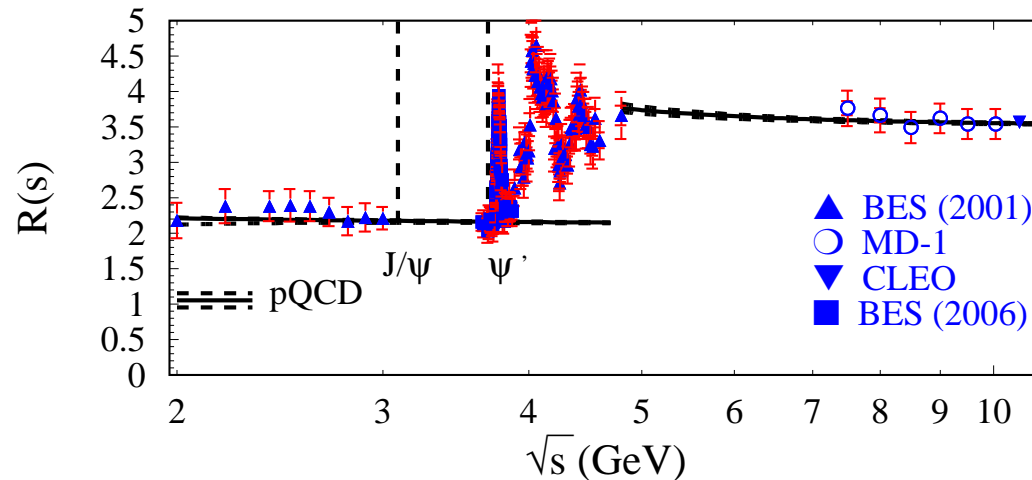
$$\mathcal{M}_n^{th} \sim \frac{1}{n!} \partial_{q^2}^n \Pi(q^2) \Big|_{q^2=0} \quad \text{vs} \quad \mathcal{M}_n^{exp} \sim \int \frac{ds}{s^{n+1}} R^{exp}(s)$$

th: Entwicklung in q^2 / M_q^2

- Berechnung: Bausteine sind Vakuum-Tadpoles [YS,Vuorinen 2005; Boughezal,Czakon 2006]

(4) Hochpräzisionsbestimmungen der Massen von Quarks

- experimentell bestimmte Momente: c -Schwelle, $R(s)$ von $2 \rightarrow 3.3$



$$R^{exp} = R^{Res} + R^{Schw} + R^{Kont}$$

$$\triangleright J/\psi: M \text{ 3 GeV, } \Gamma \text{ 90 keV}$$

$$\triangleright \psi: M \text{ 3.7 GeV, } \Gamma \text{ 317 keV}$$

$$\rightarrow \mathcal{M}_n^{exp}$$

- Vergleich: $\mathcal{M}_n^{th} \stackrel{!}{=} \mathcal{M}_n^{exp}$

$$\triangleright N_f = 4 \text{ Analyse} \rightarrow M_c(M_s) = 1.286(13) \text{ GeV [Kühn, Steinhauser, Sturm 2007]}$$

$$\triangleright N_f = 5 \text{ Analyse} \rightarrow M_b(M_b) = 4.164(25) \text{ GeV [dito]}$$

$$\triangleright \text{vgl. PDG 2008: } 1.27(11) \text{ und } 4.20(17)$$

- Warum sind präzise Quarkmassen so wichtig? z.B.

$$\triangleright \text{B-Meson Zerfälle: } \Gamma(B \rightarrow X_u l \bar{\nu}) \sim G_F^2 M_b^5 |V_{ub}|^2$$

$$\triangleright \Upsilon\text{-Spektroskopie: } M_{\Upsilon(1s)} = 2M_b(1 - \frac{2}{9}\alpha_s^2 + \dots)$$

$$\triangleright \text{Higgs-Boson Zerfall (ILC): } \Gamma(H \rightarrow \bar{b}b) \sim G_F M_H M_b^2(1 + \alpha_s + \dots)$$

Konzepte und Methoden

angewandte Verfahren

- Computeralgebra
 - ▷ Generierung von Feynman-Diagrammen
 - ▷ Klassifikation; Skalarisierung
 - ▷ Reduktion auf „Master-Integrale“ [Möller (Dipl),YS]
- Berechnung der Master-Integrale
 - ▷ numerische Integration: Präzision ?
 - ▷ explizite Integration: „Kunst“
 - ▷ Differenzgleichungen: analytische/numerische Lösung [Bejdakic (PhD),YS]
 - ▷ Differentialgleichungen
- effektive Feldtheorie → Ausintegration schwerer Quarks

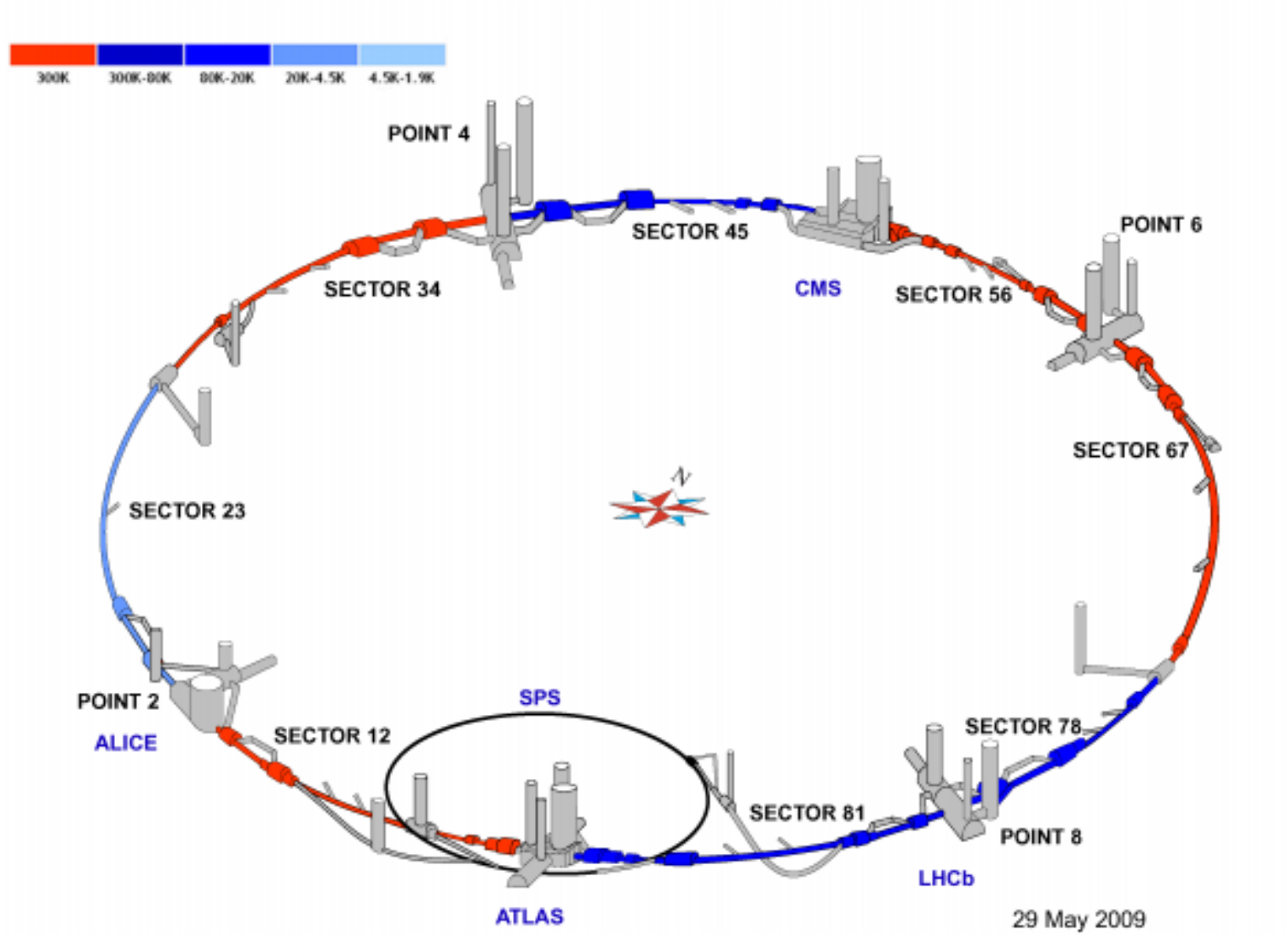
Werkzeuge

- FORM + Computercluster
- spezielle Funktionen
 - ▷ harmonische Polylogarithmen $HPL(x)$ [Remiddi, Vermaseren 2000]
 - ▷ multiple harmonische Summen $S(N)$ [Vermaseren 1998]
- neue/innovative/kombinierte Werkzeuge?! large N? AdS/CFT? Hopf-Algebren?

Ausblick

- haben eine **funktionierende** Beschreibung der Natur: Standardmodell (SM)
- Teilchenphysik höchst spannend:
 - ▷ „überlebt“ das SM die nächste Dekade?
 - ▷ viele theoretische Ideen zur SM-Erweiterung
 - ▷ welche sind in der Natur realisiert?
- riesige experimentelle Anstrengungen
 - ▷ **LHC 2009+** → völlig neue Energiebereiche
- Signale „neuer“ Physik sind extrem klein
 - ▷ **höchste Präzision** bei Hintergrund-Subtraktion erforderlich
- viele Möglichkeiten für Beiträge in der Theorie
 - ▷ mit moderatem Budget
- zentrale **Bausteine**: SM-Parameter;
 - ▷ Skalenverhalten (Evolution)
 - ▷ Masseneffekte
- Bielefelder Beiträge: **QCD-Präzisionsrechnungen**

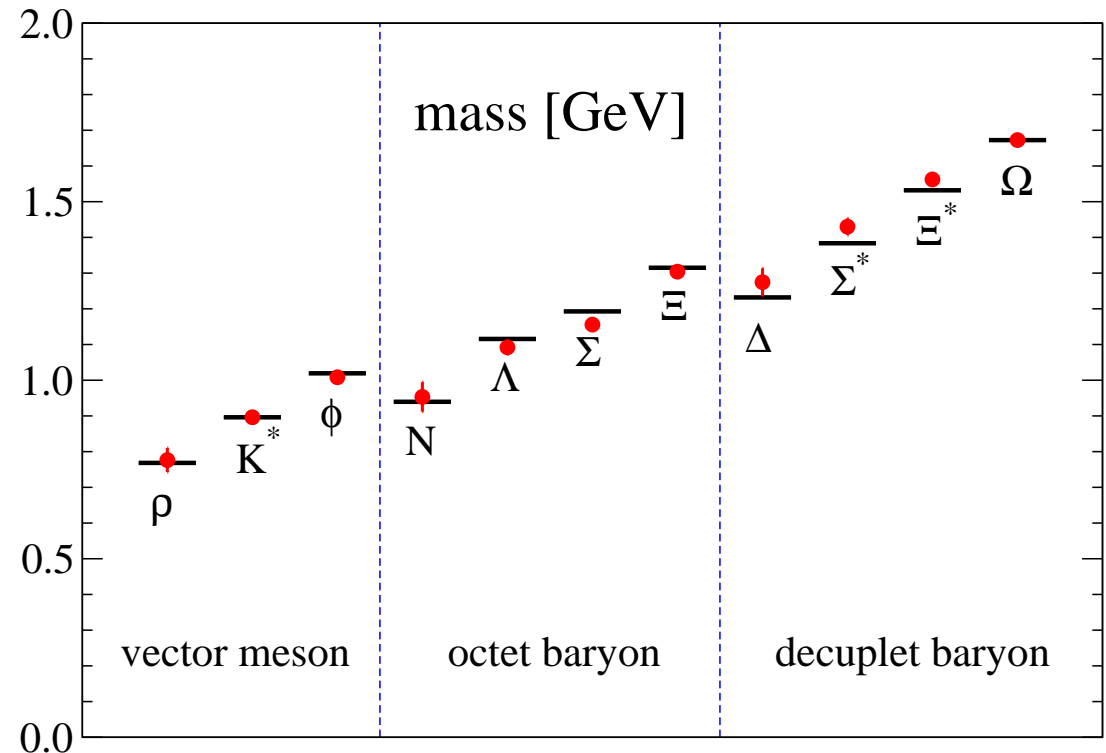
LHC: Status



QCD-Test (mit Rechnern)

studiere das Hadronen-Spektrum (Hadronen: Bindungszust. von Quarks; z.B. $K=s\bar{d}$, $p=uud$, $\Lambda=uds$)

- löse QCD-Gln per Computer
[e.g. S. Aoki et.al., PACS-CS 2008]
- was nicht herauskommt:
 - ▷ Gluonen
 - ▷ Drittel-Ladungen
- was man erhält:
 - ▷ nur die beobachteten Teilchen + Massen
 - ▷ nicht mehr, nicht weniger!



- punchline: QCD erklärt die niedrigliegenden Hadronmassen!
 - ▷ Feld in Entwicklung; Teraflop-Geschwindigkeiten, weltweite Anstrengungen
 - ▷ $a = 0.091$ fm; $32^3 \times 64$ Gitter; NP $\mathcal{O}(a)$ verb. Wilson Quarks
 - ▷ 2+1 flavors; chirale Logs; $m_q \approx 1.3 m_l$; π , K , Ω als Input

Methods: harmonic sums

find interesting new numbers

$$S_{a,\bar{m}}(N) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{[\text{sgn}(a)]^i}{i^{|a|}} S_{\bar{m}}(i) \quad , \quad S(i \geq 0) = 1 \quad , \quad S(i < 0) = 0$$
$$\ln 2 = -S_{-1}(\infty)$$
$$\zeta_{n \geq 2} = S_n(\infty) = \zeta(n)$$
$$a_{n \geq 4} = -S_{-1, \bar{1}_{n-1}}(\infty) = \text{Lin}(1/2)$$
$$s_6 = S_{-5, -1}(\infty) \approx +0.9874414264032997137716500080418202141360271489$$
$$s_{7a} = S_{-5, 1, 1}(\infty) \approx -0.9529600757562986034086521589259605076732804017$$
$$s_{7b} = S_{5, -1, -1}(\infty) \approx +1.0291212629643245342244040880438418430020167126$$
$$s_{8a} = S_{5, 3}(\infty) \approx +1.0417850291827918833899900208023123800815621101$$
$$s_{8b} = S_{-7, -1}(\infty) \approx +0.9964477483978376659808729012242292721440488782$$
$$s_{8c} = S_{-5, -1, -1, -1}(\infty) \approx +0.9839666738217336709207302503065594691219109309$$
$$s_{8d} = S_{-5, -1, 1, 1}(\infty) \approx +0.9999626134626834476967166137169827776095041387$$

“the language that Feynman diagrams speak”?

[J. Vermaseren]

Differential equations: 4-loop example T_6

$$T_{36}(x) \equiv \frac{1}{J^4} \int_{p_{1..4}}^{(d)} \frac{1}{p_1^2+1} \frac{1}{(p_1+p_4)^2+x^2} \frac{1}{p_2^2+1} \frac{1}{(p_2+p_4)^2+x^2} \frac{1}{p_3^2+1} \frac{1}{(p_3+p_4)^2+x^2}$$

$T_{36}(0)$ is known. Symmetry relation:

$$T_{36}(x) = x^{4d-12} T_{36}(1/x)$$

The differential eqn is of second order

$$\begin{aligned} & \{x(1-x^2)\partial_x^2 + (9-3d+(5d-17)x^2)\partial_x - 4x(d-3)(d-4)\} T_{36}(x) \\ &= \frac{3}{2}(d-2) \{(1+x^{d-2})\partial_x - (3d-8)x^{d-3}\} B_{24}(x) \end{aligned}$$

Solve in terms of HPL(x), set $x = 1$

$$\begin{aligned}
T6 = & + 3/2 + \text{ep} * (7/2) + \text{ep}^2 * (9/2) + \text{ep}^3 * (- 39/2 - 3*z3) \\
& + \text{ep}^4 * (- 208 - 1/20*\text{pi}^4 + 109*z3) \\
& + \text{ep}^5 * (- 1254 - 547/60*\text{pi}^4 + 768*\text{li4half} - 32*\text{ln}2^2*\text{pi}^2 + 32* \\
& \quad \text{ln}2^4 + 189*z5 + 855*z3) \\
& + [\dots] \\
& + \text{ep}^9 * (- 555600 - 42503/5*\text{pi}^4 - 11501/15*\text{pi}^6 - 9914311/176400* \\
& \quad \text{pi}^8 - 124416*s9f - 311040*s9e + 62208*s9d + 775008*s9c + 1785024*s9b \\
& \quad - 3409344*s9a + 1336320/7*s8d + 1566720/7*s8c + 14588928/7*s8b + \\
& \quad 2348061/7*s8a - 2079360/7*s7b - 502848/7*s7b*\text{pi}^2 + 1549440/7*s7a - \\
& \quad 212544/7*s7a*\text{pi}^2 + 483840*s6 - 687360/7*s6*\text{pi}^2 + 995328*\text{li8half} + \\
& \quad 1244160*\text{li7half} + 1161216*\text{li6half} + 951552*\text{li5half} - 4320*\text{li5half}* \\
& \quad \text{pi}^4 + 725760*\text{li4half} + 19984/35*\text{li4half}*\text{pi}^4 + 248832*\text{li4half}* \\
& \quad \text{li5half} + 20736*\text{li4half}^2 + 56168/5*\text{ln}2*\text{pi}^4 + 1870/3*\text{ln}2*\text{pi}^6 - \\
& \quad 1444551/1000*\text{ln}2*\text{pi}^8 + 4650048*\text{ln}2*s8b + 3705507/5*\text{ln}2*s8a - 1549440/ \\
& \quad 7*\text{ln}2*s6 - 440640/7*\text{ln}2*s6*\text{pi}^2 + 53568/5*\text{ln}2*\text{li4half}*\text{pi}^4 - 30240* \\
& \quad \text{ln}2^2*\text{pi}^2 - 34272/5*\text{ln}2^2*\text{pi}^4 - 1186/105*\text{ln}2^2*\text{pi}^6 - 62208*\text{ln}2^2* \\
& \quad s7b - 783360/7*\text{ln}2^2*s6 - 10368*\text{ln}2^2*\text{li5half}*\text{pi}^2 - 1728*\text{ln}2^2* \\
& \quad \text{li4half}*\text{pi}^2 + 13216*\text{ln}2^3*\text{pi}^2 + 2448*\text{ln}2^3*\text{pi}^4 - 726/5*\text{ln}2^3*\text{pi}^6 \\
& \quad - 72576*\text{ln}2^3*s6 + 3456*\text{ln}2^3*\text{li4half}*\text{pi}^2 + 30240*\text{ln}2^4 - 4032* \\
& \quad \text{ln}2^4*\text{pi}^2 - 9026/21*\text{ln}2^4*\text{pi}^4 + 10368*\text{ln}2^4*\text{li5half} + 1728*\text{ln}2^4* \\
& \quad \text{li4half} - 39648/5*\text{ln}2^5 + 864*\text{ln}2^5*\text{pi}^2 + 1692/5*\text{ln}2^5*\text{pi}^4 - 10368/ \\
& \quad 5*\text{ln}2^5*\text{li4half} + 8064/5*\text{ln}2^6 - 936/5*\text{ln}2^6*\text{pi}^2 - 1728/7*\text{ln}2^7 + \\
& \quad 1152/5*\text{ln}2^7*\text{pi}^2 + 2124/35*\text{ln}2^8 - 432/5*\text{ln}2^9 - 585155695/16*z9 - \\
& \quad 18402885/7*z7 + 226180863/112*z7*\text{pi}^2 + 4418037/2*z7*\text{ln}2^2 - 821100* \\
& \quad z5 + 1036920/7*z5*\text{pi}^2 + 120042813/560*z5*\text{pi}^4 - 7587000*z5*\text{li4half} \\
& \quad - 783360/7*z5*\text{ln}2*\text{pi}^2 + 502200*z5*\text{ln}2^2 + 340425*z5*\text{ln}2^2*\text{pi}^2 - \\
& \quad 255861*z5*\text{ln}2^4 + 481632*z3 + 38287/14*z3*\text{pi}^4 + 2938237/420*z3*\text{pi}^6 \\
& \quad + 3784320*z3*s6 - 31104*z3*\text{li6half} - 2926656/7*z3*\text{li5half} - 30240*z3 \\
& \quad *\text{li4half} - 5184*z3*\text{li4half}*\text{pi}^2 - 274754/35*z3*\text{ln}2*\text{pi}^4 + 1260*z3* \\
& \quad \text{ln}2^2*\text{pi}^2 + 14769/5*z3*\text{ln}2^2*\text{pi}^4 - 40648/7*z3*\text{ln}2^3*\text{pi}^2 - 1260*z3* \\
& \quad \text{ln}2^4 - 108*z3*\text{ln}2^4*\text{pi}^2 + 121944/35*z3*\text{ln}2^5 - 216/5*z3*\text{ln}2^6 + \\
& \quad 2163963/7*z3*z5 - 5739903*z3*z5*\text{ln}2 - 180558*z3^2 - 288240/7*z3^2* \\
& \quad \text{pi}^2 + 1936800/7*z3^2*\text{ln}2 - 333720/7*z3^2*\text{ln}2*\text{pi}^2 - 220320/7*z3^2* \\
& \quad \text{ln}2^2 - 20412*z3^2*\text{ln}2^3 - 1703845/2*z3^3)
\end{aligned}$$