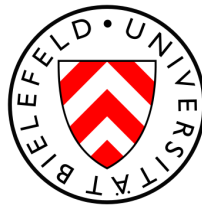


Methoden zur Berechnung des anomalen magnetischen  
Moments in der QED:  
Perspektive des anomalen magnetischen Moments des  
Elektrons

**Bachelorarbeit**

zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science  
der Fakultät Physik  
der Universität Bielefeld



vorgelegt von

Mandy Maria Wygas

Betreuer und 1. Gutachter: Prof. Dr. York Schröder  
2. Gutachter: Thomas Luthe

Bielefeld, den 9. September 2013



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Das anomale magnetische Moment von Leptonen . . . . .	4
2.2	Grundlagen der QED . . . . .	5
2.2.1	Lagrangedichte der QED . . . . .	5
2.2.2	Die Vertexfunktion . . . . .	6
2.2.3	Projektionsmethode . . . . .	9
2.3	Experimentelle Bestimmung des anomalen magnetischen Moments . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Beiträge zum anomalen magnetischen Moment</b>	<b>15</b>
3.1	QED . . . . .	16
3.1.1	1. Ordnung . . . . .	17
3.1.2	2. Ordnung . . . . .	17
3.1.3	Höhere Ordnungen . . . . .	19
3.1.4	Gesamter universeller QED-Beitrag . . . . .	20
3.2	Hadronische Beiträge . . . . .	21
3.2.1	Hadronische Vakuumpolarisation . . . . .	22
3.2.2	Hadronisches Light-by-Light-Scattering . . . . .	22
3.3	Elektroschwache Beiträge . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Vergleich <math>a_e</math> und <math>a_\mu</math></b>	<b>25</b>
4.1	Theorie und Experiment . . . . .	25
4.1.1	Massenabhängige Beiträge . . . . .	25
4.1.2	Diskrepanz . . . . .	28
4.2	Stellung von $a_e$ und $a_\mu$ in Erweiterungen des SMs . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Methoden zur Berechnung des anomalen magnetischen Moments in der QED</b>	<b>32</b>
5.1	Beitrag 1. Ordnung . . . . .	32
5.1.1	Berechnung nach Schwinger . . . . .	33
5.1.2	Klassifizierung der Integrale . . . . .	37
5.1.3	1-Schleifen Rekursionsrelationen . . . . .	41
5.1.4	Computergestützte Berechnung via Projektionsmethode . . . . .	42
5.2	Beitrag 2. Ordnung . . . . .	47
5.2.1	Klassifizierung der Integrale . . . . .	47
5.2.2	2-Schleifen Rekursionsrelationen . . . . .	49
5.2.3	Masterintegrale . . . . .	51
5.2.4	Skalarprodukte und negative Exponenten kürzen . . . . .	55
5.2.5	Computergestützte Berechnung via Projektionsmethode . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Fazit</b>	<b>62</b>

<b>A</b>	<b>Appendix</b>	<b>63</b>
A.1	Feynman-Regeln der QED . . . . .	63
A.2	Metrischer Tensor und Dirac-Matrizen . . . . .	65
A.3	Dimensionale Regularisierung . . . . .	65
A.4	Funktionen . . . . .	66
A.5	Feynman-Parametrisierung . . . . .	67
A.6	„Diracologie“ . . . . .	67
A.7	Wick-Rotation . . . . .	68
<b>B</b>	<b>Mathematica-Notebook der Rekursion</b>	<b>69</b>
<b>C</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>72</b>

---

# 1 Einleitung

Das Ziel der Physik ist es, alle Naturphänomene mit Hilfe von theoretischen Modellen zu beschreiben. In der Teilchenphysik beschreibt das Standardmodell der Teilchenphysik (SM) alle Teilchen und ihre Wechselwirkungen untereinander. Das SM ist eine Quantenfeldtheorie (QFT), das bedeutet, dass die wechselwirkenden Teilchen und Felder quantisiert sind und einheitlich und relativistisch beschrieben werden. Mit dem SM werden Fermionen beschrieben, die in drei Generationen von Quarks und Leptonen unterteilt werden. Das SM vereint drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen und beschreibt sie durch den Austausch von Eichbosonen: die elektromagnetische Wechselwirkung (Photon), die schwache Wechselwirkung ( $W^{\pm}$ -,  $Z^0$ -Bosonen) und die starke Wechselwirkung (Gluonen). Des Weiteren existiert ein skalares Boson, das Higgs-Boson, welches den Teilchen durch den Higgs-Mechanismus Masse verleiht [1]. Mit Hilfe des SM können sehr viele Phänomene gut beschrieben werden. Es können jedoch nicht alle Phänomene beschrieben werden, worauf bereits die Tatsache, dass das SM die Gravitation nicht beinhaltet, hinweist. Nichtgravitative Effekte, die nicht durch das SM erklärt werden können, deuten daraufhin, dass es Einflüsse neuer Physik (NP) gibt, die im SM nicht berücksichtigt wurden. Solche Effekte zu finden und das SM somit auf seine Vollständigkeit zu testen, liegt im Fokus vieler Forschungen.

Das anomale magnetische Moment von Leptonen, insbesondere des Elektrons und des Myons, ist eine der sowohl experimentell als auch theoretisch am präzisesten bestimmten Größen der Physik. Durch den Vergleich der nach dem SM berechneten Werte mit den experimentell ermittelten Werten, kann das SM auf seine Vollständigkeit untersucht werden. Für das Myon beträgt die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment  $\sim 3,5$  Standardabweichungen ( $3,5\sigma$ ). Diese Diskrepanz könnte ein Hinweis auf Einflüsse neuer Physik sein. Das Ziel der Forschung ist es, sowohl experimentell als auch theoretisch immer genauere Werte für das anomale magnetische Moment des Myons zu bestimmen. Auf diese Weise möchte man sicher gehen, dass die Diskrepanz wirklich zu groß ist, um mit den Unsicherheiten erklärt zu werden. Da der experimentelle Wert mit einer höheren Genauigkeit bestimmt werden kann als der theoretische Wert, stellt dies vor allem für die Theorie eine wichtige Aufgabe dar.

In dieser Arbeit liegt der Fokus auf den Methoden zur theoretischen Bestimmung des anomalen magnetischen Moments. In Kapitel 2 werden dafür die notwendigen Grundlagen geschaffen und in Kapitel 3 die verschiedenen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment besprochen. Anschließend wird in Kapitel 4 auf die Perspektive des anomalen magnetischen Moments des Elektrons für den Test der Vollständigkeit des SMs eingegangen. Im fünften Kapitel findet man die Berechnung des Beitrages 1. Ordnung der Quantenelektrodynamik (QED) zum anomalen magnetischen Moment klassisch nach J. S. Schwinger, der diesen Beitrag als erster berechnete, und computergestützt mit Hilfe der Projektionsmethode. Im Anschluss daran findet eine intensive Auseinandersetzung mit der Berechnung des QED-Beitrages 2. Ordnung statt.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Das anomale magnetische Moment von Leptonen

In der klassischen Elektrodynamik ist das magnetische Moment eines elektrisch geladenen Teilchens gegeben durch [2, §1.1]

$$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2mc} \vec{L}, \quad (2.1)$$

wobei  $e$  die Ladung und  $m$  die Masse des Teilchens und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist.  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  ist der Bahndrehimpuls des Teilchens. In der Quantenmechanik wird der Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  zu einem Operator  $\hat{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$ , der die Kommutatorrelation  $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$  erfüllt, aufgrund derer die Eigenwerte  $\hbar l$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums  $\hbar$  quantisiert sind.

Der Spin eines Teilchens ist eine intrinsische Eigenschaft eines Elementarteilchens, bzw. eines Systems von Elementarteilchen, und wird durch die Drehbewegung einer Masse hervorgerufen. Folglich besitzt auch ein Elementarteilchen ohne kinetische Energie eine unveränderliche Spinquantenzahl  $s$ . Im Gegensatz zum Bahndrehimpuls können Spins auch halbzahlig sein. Fermionen besitzen halbzahligen Spin und Bosonen ganzzahligen Spin. Der Spin  $\hat{S} = \hbar\vec{s}$ , mit  $\vec{s} = s\vec{\sigma}$  und  $\vec{\sigma}$  den Pauli-Matrizen (vgl. Kapitel 2.2.2), erfüllt die gleiche Kommutatorrelation wie der Drehimpuls, und erzeugt analog ein magnetisches Moment [2, §1.1]

$$\vec{\mu}_s = g \frac{e\hbar}{2mc} \vec{s}. \quad (2.2)$$

Der zusätzliche Faktor  $g$ , im Vergleich zu (2.1), heißt gyromagnetischer Faktor oder Landé-Faktor und ist ein dimensionsloser Faktor, der den Spin mit dem magnetischen Moment eines Teilchens in Beziehung setzt. Für die Beziehung zwischen Bahndrehimpuls und magnetischem Moment ist dieser Faktor gerade 1. Der Spin von Leptonen, die Fermionen sind, ist  $s = \frac{1}{2}$  und nach der Dirac-Gleichung (vgl. Kapitel 2.2.2) folgt, dass für ein geladenes freies Fermion mit Spin  $s = \frac{1}{2}$  der gyromagnetische Faktor  $g = 2$  ist. Die Abweichung vom Dirac-Wert  $g = 2$  aufgrund von Strahlungskorrekturen (vgl. Kapitel 2.2.2) bezeichnet man als anomales magnetisches Moment  $a_l$  [3]:

$$g_l = 2(1 + a_l), \quad l \in \{e, \mu, \tau\} \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow a_l \equiv \frac{g_l - 2}{2} \quad (2.4)$$

Dieses ist im Allgemeinen unterschiedlich für die verschiedenen Leptonen  $e, \mu$  und  $\tau$ . Der führende Beitrag in Einheiten der Feinstrukturkonstante  $\alpha \propto e^2$  (vgl. Kapitel 3.1)

zum anomalen magnetischen Moment ist der 1949 von J. S. Schwinger berechnete Term [4]

$$a_l = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad l \in \{e, \mu, \tau\}, \quad (2.5)$$

der für alle drei Leptonen gleich ist.

Das anomale magnetische Moment  $a_l$  muss in einer vollständigen Theorie eindeutig vorhersagbar sein. Durch die Möglichkeit  $a_l$  sehr genau rechnerisch und experimentell bestimmen zu können (vgl. Kapitel 2.3), kann eine Theorie auf ihre Vollständigkeit untersucht werden. Abweichungen zwischen  $a_l^{exp}$  und  $a_l^{theo}$  können auf Beiträge von neuer Physik hindeuten, die in der bisherigen Theorie nicht berücksichtigt wurden (vgl. Kapitel 4.2).

Die verschiedenen Beiträge zu  $a_l$ , welche in Kapitel 3 besprochen werden, werden mit Hilfe von n-Schleifen Feynman-Diagrammen über störungstheoretische Methoden (zur n. Ordnung) berechnet (vgl. Kapitel 2.2.2). In der Quantenelektrodynamik (QED) werden die Beiträge zu  $a_l$  in Ordnungen der Feinstrukturkonstante  $\frac{\alpha}{\pi}$  entwickelt (vgl. Kapitel 3.1).

Zum besseren Verständnis der Berechnung von  $a_l$  in der QED werden im nächsten Kapitel 2.2 einige Grundlagen der QED erklärt.

## 2.2 Grundlagen der QED

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist die quantenfeldtheoretische Beschreibung des Elektromagnetismus. Mit ihr werden alle Phänomene beschrieben, die durch elektrisch geladene Punktteilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  und Photonen (Spin 1) verursacht werden. Sie ist die am genauesten verifizierte Theorie der Physik.

### 2.2.1 Lagrangedichte der QED

In der Formulierung der QED mit Hilfe der Lagrangedichte werden Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$  durch Dirac-Spinoren  $\psi(x)$  beschrieben. Diese beschreiben alle möglichen Linearkombinationen der Lösung der Dirac-Gleichung in natürlichen Einheiten ( $c = 0$ ,  $\hbar = 0$ )

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (2.6)$$

durch ebene Wellen vom Typ  $u_p e^{-ipx}$  und  $v_p e^{+ipx}$  (vgl. (2.20), (2.21), [5, §7.2]).

Die Lagrangedichte der QED besteht aus 3 Teilen (vgl. [6, §4.1]):

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \quad (2.7)$$

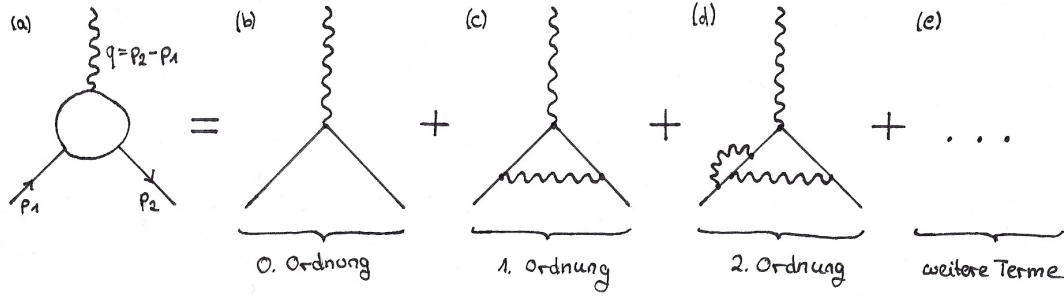


Abb. 2.1: Fermion-Wechselwirkung mit einem externen elektromagnetischen Feld

Dabei ist

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (2.8)$$

die Lagrangedichte eines freien Fermions,

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.9)$$

die Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld, wobei  $F^{\mu\nu}$  der elektromagnetische Feldstärketensor und  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  das elektromagnetische Viererpotential sind, und

$$\mathcal{L}_{int} = -eJ^\mu A_\mu, \quad J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.10)$$

der Wechselwirkungsterm zwischen dem elektromagnetischen Feld und einem Fermion, wobei  $J^\mu$  der elektrische Strom ist.

Eine wichtige Eigenschaft der Lagrangedichte ist die Eichinvarianz unter den Transformationen

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \quad (2.11)$$

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\alpha(x) \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}'_{QED}, \quad (2.13)$$

wobei  $\alpha(x)$  eine reelle Funktion ist.

### 2.2.2 Die Vertexfunktion

Im Feynman-Diagramm in Abb. 2.1(a) sieht man, wie ein Fermion mit Viererimpuls  $p_1$  mit einem externen elektromagnetischen Feld  $A_\mu$  mit Impuls  $q$  wechselwirkt. Der Impuls des Fermions nach der Streuung ist  $p_2$ . Die Amplitude  $\mathcal{M}$  (vgl. A.1) für den Übergang von Zustand  $|\mu_{p_1}\rangle$  zum Zustand  $|\mu_{p_2}\rangle$  zur 0. Ordnung (0-Schleifen) (Abb.



2.1(b)), wird durch den Wechselwirkungsterm  $\mathcal{L}_{int}$  gegeben [2, §2.1]:

$$\mathcal{M} = -ie \overbrace{\langle \mu_{p_2} | J^\mu(0) | \mu_{p_1} \rangle}^{\text{Matrixelement}} A_\mu(q), \quad q = p_2 - p_1 \quad (2.14)$$

$$= -ie \bar{u}_{p_2} \gamma^\mu u_{p_1} A_\mu(q) \quad (2.15)$$

Bei höheren Ordnungen (n-Schleifen) müssen weitere Wechselwirkungsprozesse berücksichtigt werden (Abb. 2.1(c)-(e)), deren Summe durch den Kreis im Feynman-Diagramm in Abb. 2.1(a) dargestellt wird. Diese Strahlungskorrekturen hängen nur von den Impulsen  $p_1$  und  $p_2$  ab und sind lorentzinvariant. Um diese Prozesse zu berücksichtigen, wird der Vertexfaktor  $-ie\gamma^\mu$  (vgl. A.1), mit  $\gamma^\mu$  einer Dirac-Matrix (vgl. A.2), durch die Ersetzung  $\gamma^\mu \rightarrow \Gamma^\mu(p_2, p_1)$  zur Vertexfunktion. Für den elektrischen Strom folgt dadurch  $J^\mu(0) = \bar{\psi} \Gamma^\mu(p_2, p_1) \psi$ . Die allgemeinste Parametrisierung des Übergangsmatrixelements in der QED lautet [2, §2.1]:

$$\langle \mu_{p_2} | J^\mu(0) | \mu_{p_1} \rangle = \bar{u}_{p_2} \Gamma^\mu(p_2, p_1) u_{p_1} \quad (2.16)$$

Mit allgemeinen Argumenten, kann man die Form von  $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$  einschränken. Zur 0. Ordnung muss  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$  sein, damit der Vertexfaktor und die Gleichung (2.15) reproduziert werden. Ganz allgemein könnte man  $\Gamma^\mu$  als Linearkombination von  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\gamma^\mu$  und Konstanten schreiben. Des Weiteren könnte noch ein  $\gamma^5$  (vgl. A.2) auftauchen, welches aber in einer paritätserhaltenden Theorie wie der QED verboten ist, da dies zur Paritätsverletzung führt. Durch die Beachtung der Lorentzinvarianz und weil  $\Gamma^\mu$  (wie auch  $\gamma^\mu$ ) wie ein Vektor transformiert, muss  $\Gamma^\mu$  eine reine Linearkombination von  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\gamma^\mu$  sein [6, §6.2]:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \gamma^\mu \cdot A + (p_2^\mu + p_1^\mu) \cdot B + (p_2^\mu - p_1^\mu) \cdot C \quad (2.17)$$

Die Koeffizienten  $A, B$  und  $C$  können dabei Dirac-Matrizen enthalten und Funktionen von  $q^2$  sein. Wenn man die Ward-Identität (vgl. [6, §7.4])

$$q_\mu \Gamma^\mu = 0 \quad (2.18)$$

in (2.17) einsetzt, erhält man mit  $q = p_2 - p_1$ :

$$\not{q} \cdot A + q^2 \cdot C = 0, \quad \not{q} = q_\mu \gamma^\mu \quad (2.19)$$

Der zweite Term mit dem Koeffizienten  $B$  verschwindet. Beachtet man dabei, dass rechts und links der Vertexfunktion Dirac-Spinoren stehen, für die die Dirac-Gleichung

$$(\not{p}_1 - m)u_{p_1} = 0 \quad (2.20)$$

$$\bar{u}_{p_2}(\not{p}_2 - m) = 0 \quad (2.21)$$

gilt, erkennt man, dass auch der erste Term verschwindet. Daraus folgt, dass  $C = 0$  sein muss, damit die Ward-Identität gilt, da  $\bar{u}_{p_2} q^2 u_{p_1}$  im Allgemeinen nicht verschwindet. Es bleibt:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \gamma^\mu \cdot A + (p_2^\mu + p_1^\mu) \cdot B \quad (2.22)$$

Mit allgemeinen Annahmen kann (2.22) nicht weiter vereinfacht werden. Es ist aber üblich (2.22) mit der Gordon-Identität (vgl. [6, §3])

$$\bar{u}_{p_2} \gamma^\mu u_{p_1} = \bar{u}_{p_2} \left[ \frac{p_2^\mu + p_1^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u_{p_1}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.23)$$

umzuschreiben. Dadurch kann  $(p_2^\mu + p_1^\mu)$  durch  $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$  ersetzt werden und man erhält:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \quad (2.24)$$

$F_1$  und  $F_2$  sind unbekannte Funktionen von  $q^2$ , die Dirac- und Pauli-Formfaktor genannt werden. Um den Zusammenhang der Formfaktoren mit dem anomalen magnetischen Moment zu erhalten, betrachtet man den nichtrelativistischen Limes der Quantenmechanik (vgl. [2, §2.1]). Die Wechselwirkung eines Teilchens mit dem elektromagnetischen Feld wird durch den Hamilton-Operator

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \vec{\mu}\vec{B} + e\phi \quad (2.25)$$

beschrieben, wobei  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  das externe magnetische Feld ist und  $\vec{\mu} = 2\mu\vec{\sigma} = \mu\vec{\sigma}$  der magnetische Moment-Operator ist, mit  $\mu$  dem magnetischen Moment und  $\vec{\sigma}$  den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Der Hamilton-Operator (2.25) liefert die nichtrelativistische Streuamplitude in der Born-Näherung (vgl. [2, §2.1])

$$\mathcal{M} = -2im\chi_2^\dagger \left( -\frac{e}{2m} \vec{A}_q(\vec{p}_2 + \vec{p}_1) + e\phi_q - i\mu\vec{\sigma}[\vec{q} \times \vec{A}_q] \right) \chi_1, \quad (2.27)$$

wobei  $\phi_q$  und  $\vec{A}_q$  die Fourierkomponenten des elektrischen Potentials  $\phi$  und des Vektorpotentials  $\vec{A}$  sind und  $\chi_1 = (1, 0)^T$  und  $\chi_2 = (0, 1)^T$ , mit  $\chi_2^\dagger$  dem adjungierten Vektor von  $\chi_2$ .

Um den nichtrelativistischen Limes der Streuamplitude aus (2.14) abzuleiten, benutzt man die Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen (vgl. (A.2))

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

und den Dirac-Spinor

$$u_p = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p} \vec{\sigma}}{E + m} \chi \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

mit  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ .

Eingesetzt in (2.14) und nach Entwicklung in  $\frac{|\vec{p}_{1,2}|}{m}$  in erster Ordnung, erhält man

$$\mathcal{M} = -2iem\chi_2^\dagger \left[ F_1(0) \left( \phi_q - \frac{\vec{A}_q(\vec{p}_2 + \vec{p}_1)}{2m} \right) - i \frac{F_1(0) + F_2(0)}{2m} \vec{\sigma}[\vec{q} \times \vec{A}_q] \right] \chi_1. \quad (2.30)$$

Ein Vergleich von (2.27) mit (2.30) liefert:

$$F_1(0) = 1, \quad \mu = \frac{e}{2m}(F_1(0) + F_2(0)). \quad (2.31)$$

Mit (2.2) und mit  $\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$  folgt für den gyromagnetischen Faktor:

$$g = 2(1 + F_2(0)) \quad (2.32)$$

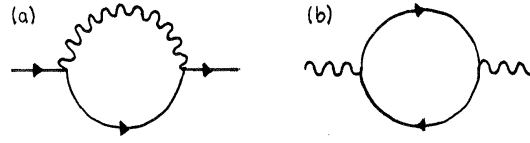
Wenn  $F_2(q)$  bei  $q \rightarrow 0$  nicht verschwindet, weicht der gyromagnetische Faktor vom Dirac-Wert  $g = 2$  ab. Nach Vergleich von (2.32) mit (2.3) erhält man für das anomale magnetische Moment

$$a_l = F_2(0), \quad l \in \{e, \mu, \tau\}. \quad (2.33)$$

Da nur der Pauli-Formfaktor  $F_2$  im Limes  $q \rightarrow 0$  zum anomalen magnetischen Moment beiträgt, kann man in der Berechnung von  $a_l$  Terme proportional zu  $\gamma^\mu$  vernachlässigen (vgl. Vertexfunktion (2.24)).

### 2.2.3 Projektionsmethode

Anstatt die gesamte Vertexfunktion  $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$  aus (2.24) zu berechnen, kann man die Projektionsmethode (vgl. [7]) benutzen, um sie auf den für das anomale magnetische Moment relevanten Teil zu projizieren.



**Abb. 2.2:** Feynman-Diagramm der Selbstenergie (a) des Elektrons und (b) des Photons

Dafür wird die Vertexfunktion  $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$  zuerst im Impuls  $q = p_2 - p_1$  des externen Photons linearisiert:

$$\Gamma^\mu(P, q) \simeq \Gamma^\mu(P, 0) + q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Gamma^\mu(P, q) \Big|_{q=0} \equiv V^\mu(p) + q_\nu T^{\nu\mu}(p), \quad (2.34)$$

mit  $P = p_1 + p_2$  und  $p = \frac{P}{2}$ . Man kann die Berechnung vereinfachen, indem man danach direkt im für  $a_l$ ,  $l \in \{e, \mu, \tau\}$ , relevanten Limes  $q \rightarrow 0$  rechnet. Da  $a_l$  nicht von der Richtung des Leptonenimpulses abhängt, kann über die Richtung von  $P$  gemittelt werden, wobei  $P \cdot q = 0$  gilt. Man erhält für das anomale magnetische Moment [8, §2.1]:

$$a_l = \frac{1}{8(D-2)(D-1)m_l} \text{Tr}\{(\not{p} + m_l)[\gamma_\mu, \gamma_\nu](\not{p} + m_l)T^{\nu\mu}(p)\} + \frac{1}{4(D-1)m_l^2} \text{Tr}\{[m_l^2 \gamma_\mu - (D-1)m_l p_\mu - D\not{p}p_\mu] V^\mu(p)\} \Big|_{p^2=m_l^2} \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{8(D-2)(D-1)m_l} \text{TR1} + \frac{1}{4(D-1)m_l^2} \text{TR2}, \quad (2.36)$$

mit  $Tr$  der Spur über die Dirac-Matrizen. Dabei ist  $D = 4 - 2\epsilon$  die Raumzeit. Im Fall von UV-Divergenzen sorgt  $\epsilon > 0$  für eine dimensionale Regularisierung (vgl. A.3). Der Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  wird nach der Renormierung (vgl. [6, §10]) gebildet. Da die Amplituden  $T^{\nu\mu}(p)$  und  $V^\mu(p)$  nur von einem „on-shell“ (d.h.  $p^2 = m_l^2$ ) Impuls  $p$  abhängen, reduziert das das Problem auf die Berechnung von Diagrammen mit „on-shell“-Selbstenergien, da der Impuls  $q$  des externen Photons gleich Null gesetzt werden kann. Als Selbstenergien fasst man dabei die störungstheoretischen Korrekturen zusammen. Das Feynman-Diagramm der Selbstenergie des Elektrons (Positrons) sieht man in Abb. 2.2 (a) und das der Selbstenergie des Photons in Abb. 2.2 (b).

Die Berechnung von  $a_l$  mit Hilfe der Projektionsmethode ist vor allem bei der Berechnung von höheren Ordnungen der Strahlungskorrekturen nützlich. Mit steigender Ordnung tauchen mehr Dirac-Matrizen in der Rechnung auf, die die klassische Berechnung verkomplizieren. Mit Hilfe der Projektionsmethode bildet man die Spur über diese Dirac-Matrizen, was die Berechnung stark vereinfacht (vgl. A.2). Als Beispiel dafür findet man im Kapitel 5.1 die Berechnung der 1-Schleifen Korrektur einmal ohne und einmal mit Projektionsmethode.

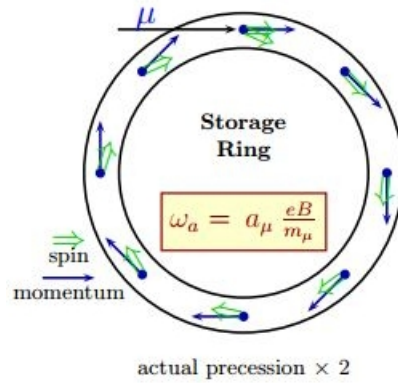


Abb. 2.3: Spin-Präzession im Speicher-Ring [8, §2]

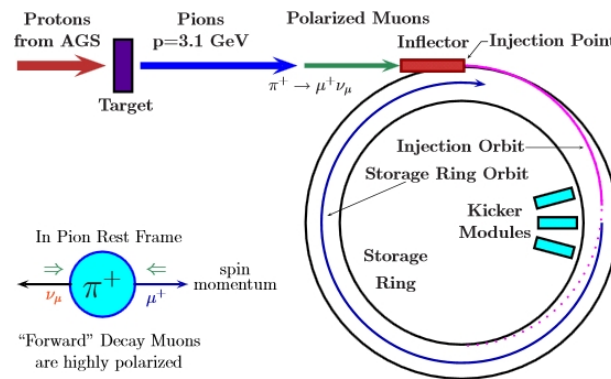


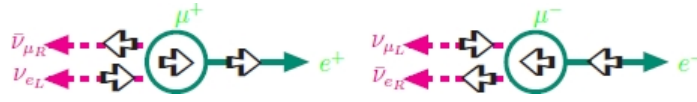
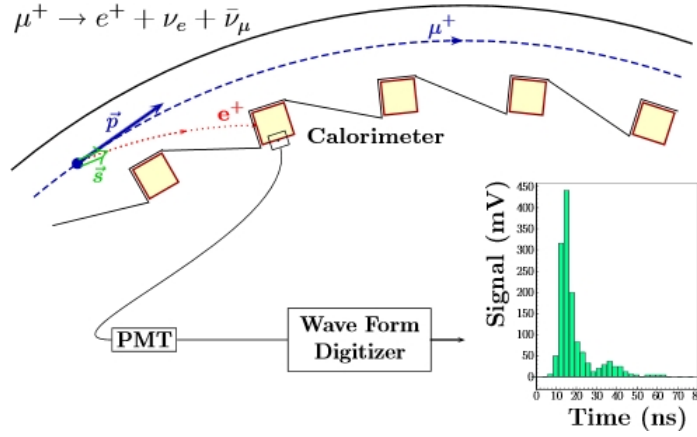
Abb. 2.4: Schema des Brookhaven Muon g-2 Experiments [8, §2]

### 2.3 Experimentelle Bestimmung des anomalen magnetischen Moments

In diesem Abschnitt wird grob erklärt, wie der Versuchsaufbau des Brookhaven Muon g-2 Experiments aussieht. Für eine genauere Beschreibung vergleiche [8, §2].

Die Messung von  $a_\mu$  ist relativ einfach. Polarisierte Myonen vollführen in einem konstanten Magnetfeld eine Kreisbahn (s. Abb. 2.3). Das anomale magnetische Moment  $a_\mu$  ist dabei für die Larmor-Präzession  $\omega_a$  der Richtung des Myonenspins verantwortlich. Im Experiment wird folglich die Kreis- und die Spinbewegung des Myons in einem magnetischen Speicherring untersucht.

In Abb. 2.4 sieht man den schematischen Aufbau des Experiments. Protonen werden im Alternating Gradient Synchrotron (AGS) des Brookhaven National Laboratory (BNL) auf eine Energie von  $24 \text{ GeV}$  beschleunigt und treffen auf ein Target, wodurch Pionen ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ) erzeugt werden. Die Pionen sind instabil und zerfallen in ihrem Ruhesystem im Mittel nach  $\tau_\pi = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$  über die schwache Wechselwirkung in ein Myon und ein Myon-Neutrino ( $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$ ). Das Pion hat Spin 0 und das Neutrino (Anti-neutrino) hat aufgrund der Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung immer

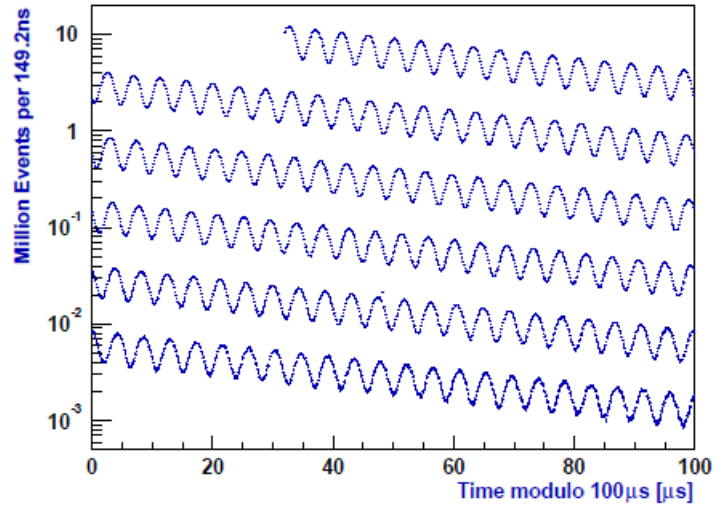

 Abb. 2.5: Paritätsverletzender Zerfall des  $\mu^+$  und  $\mu^-$  [8, §2]

 Abb. 2.6: Zerfall des  $\mu^+$  und Detektion der emittierten  $e^+$  [8, §2]

eine negative (positive) Helizität. Da die schwache Kraft sehr kurzreichweitig ist, ist der Bahndrehimpuls im Endzustand 0 und das  $\mu^-$  ( $\mu^+$ ) muss somit eine positive (negative) Helizität im Ruhesystem des Pions haben, um den Bahndrehimpuls zu erhalten (s. Abb. 2.4). Man erhält so longitudinal polarisierte Myonen, die in einen Speicherring mit konstantem Magnetfeld  $\vec{B}$  ( $|\vec{B}| = B$ ) eingespeist werden, wo sie aufgrund der Lorentzkraft auf eine Kreisbahn mit der Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  gezwungen werden. Da die Myonen polarisiert sind, stimmt zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Richtung des Myonenspins mit dem Myonenimpuls überein. Der Myonenspin präzediert mit der Frequenz  $\omega_s$ , welche etwas größer als  $\omega_c$  ist. Für die Frequenzen folgt

$$\omega_c = \frac{eB}{m_\mu \gamma}, \quad \omega_s = \frac{eB}{m_\mu \gamma} + a_\mu \frac{eB}{m_\mu}, \quad \omega_a = \omega_s - \omega_c = a_\mu \frac{eB}{m_\mu}, \quad (2.37)$$

wobei  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  der Lorentzfaktor und  $v$  die Geschwindigkeit des Myons in natürlichen Einheiten ( $c = 1$ ) sind. Im Experiment werden  $\omega_a$  und  $B$  gemessen. Die Myonenmasse  $m_\mu$  erhält man von anderen Experimenten mit dem Myonium, einem gebundenem  $\mu^+e^-$ -System. Hierbei ist nochmal hervorzuheben, dass  $\omega_a = 0$  ist, wenn  $g = 2$  wäre.

Im Experiment ändert sich die Spinachse mit jedem Kreis um  $12'(\text{arc s})$ , während sich der Myonenimpuls nicht ändert. Da die Myonen sich mit  $v = 0,9988 c$  bewegen, zerfallen sie aufgrund der Zeitdilatation ( $t = \tau\gamma$ ) erst nach  $t = 64,435 \cdot 10^{-6} s$  anstatt nach  $\tau_\mu = 2,197 \cdot 10^{-6} s$ , wobei  $\tau_\mu$  die mittlere Lebensdauer der Myonen in ihrem Ruhesystem ist. Die Myonen vollziehen somit viele Kreise im Speicherring, bevor sie über  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  ( $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ ) zerfallen. Dadurch wird der Winkel



**Abb. 2.7:** Zerfälle pro Zeit für die 3,6 Milliarden  $\mu^-$  Zerfälle von 2001 [8, §2]

zwischen Myonenimpuls und Myonenspin größer.

Aufgrund der Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung wird das Positron (Elektron) bevorzugt in (entgegengesetzt zur) Richtung des Myonenspins emittiert (s. Abb. 2.5). Der Radius der Kreisbewegung der Positronen (Elektronen) ist aufgrund der geringeren Masse kleiner als bei den Myonen. Die Zerfallspositronen (-elektronen) können so von 24 Kalorimetern, welche sich in gleichmäßigen Abständen innerhalb des Myonen-Speicherrings befinden, detektiert werden. Die Kalorimeter messen die Energie der Positronen (Elektronen), mit welcher sich die Richtung des Myonenspins bestimmen lässt und die Zeit der Detektion (s. Abb. 2.6). Wenn man aus den Messwerten nur Positronenergien (Elektronenenergien) oberhalb einer bestimmten Schwelle auswählt, somit nur die Positronen (Elektronen), die in Richtung des Myonenspins emittiert werden, erhält man eine Messrate der Zerfallspositronen (-elektronen), die von der Präzessionsfrequenz abhängt (s. Abb. 2.7)[8, §2]:

$$N(t) = N_0(E) \exp\left(\frac{-t}{\gamma\tau_\mu}\right) \left[1 + A(E) \sin(\omega_a + \phi(E))\right] \quad (2.38)$$

Dabei ist  $N_0(E)$  ein Normierungsfaktor und  $A(E)$  ist der Antisymmetrisierungsfaktor für Positronen (Elektronen) mit Energien über  $E$ , welcher die Paritätsverletzung widerspiegelt. In Abb. 2.7 ist zu erkennen, dass der exponentielle Zerfall der Myonen mit der Kreisfrequenz  $\omega_a$  moduliert ist. Auf diese Weise kann man die Kreisfrequenz  $\omega_a$  sehr genau bestimmen.

Die Genauigkeit von  $a_\mu$  wird hauptsächlich durch die Genauigkeit der Homogenität und der Messung des Betrages des magnetischen Feldes  $B$  begrenzt. Es spielen noch

weitere Faktoren eine Rolle, die für das Verständnis des Prinzips nicht notwendig sind und auf die hier nicht weiter eingegangen wird (vgl. [8, §2]).

Am Ende wird über die stark übereinstimmenden Werte von  $a_{\mu^-}$  und  $a_{\mu^+}$  gemittelt. Der aktuelle experimentelle Wert beträgt [9]

$$a_{\mu}^{exp} = 116\,592\,089\,(63) \cdot 10^{-11} \quad [0,54\,ppm] . \quad (2.39)$$

Mit dem Brookhaven Muon g-2 Experiment wurde die experimentelle Bestimmung von  $a_{\mu}$  um ein 14-faches genauer zum vorherigen Experiment am CERN [8, §2]. Nächste Experimente werden am Fermilab [10] und am J-PARC [11] vorbereitet, mit denen man sich eine Verbesserung der Genauigkeit von  $a_{\mu}^{exp}$  um einen Faktor 4 erhofft.



---

### 3 Beiträge zum anomalen magnetischen Moment

Man unterscheidet massenabhängige und massenunabhängige, universelle Beiträge zum anomalen magnetischen Moment. Universelle Beiträge sind Beiträge von Feynman-Diagrammen höherer Ordnung mit zusätzlichen virtuellen Photonen. Massenabhängige Beiträge treten erst ab 2. Ordnung (2-Schleifen) auf, da erst ab 2. Ordnung geschlossene Fermionenschleifen auftreten können, deren Beitrag von der Masse der virtuellen Fermionen abhängt. Wenn die virtuellen Teilchen in den Fermionenschleifen und das äußere Lepton gleich sind, zählt man diese Beiträge auch zu den universellen Beiträgen.

Wenn man alle bekannten Wechselwirkungen des Standardmodells (SM) berücksichtigt, liefern alle Teilchen des SMs über interne Schleifen Beiträge zum magnetischen Moment von Leptonen  $a_l$ ,  $l \in \{e, \mu, \tau\}$ . Dabei ist es wichtig zu verstehen, wie der Beitrag eines Teilchens der Masse  $m_p$  zu  $a_l$  von seiner Masse abhängt. Man kann zwei Fälle unterscheiden (vgl. [2, §2.2]):

1. *Schwere virtuelle Teilchen mit  $m_p \geq m_l$ :*

$$\delta a_l^p \propto \left(\frac{m_l}{m_p}\right)^2 \ln^{k_p} \left(\frac{m_p}{m_l}\right) \quad (3.1)$$

2. *Leichte virtuelle Teilchen mit  $m_p \ll m_l$ :*

$$\delta a_l^p \propto \ln^{k_p} \left(\frac{m_l}{m_p}\right) \quad (3.2)$$

Dabei hängt der Exponent  $k_p$  des Logarithmus von der Ordnung der Entwicklung der Störungstheorie in der Feinstrukturkonstante ab (vgl. Kapitel 3.1), der ohne genauere Analyse jedoch nicht genau bestimmt werden kann. Erkennbar ist, dass leichte virtuelle Teilchen mit  $m_p \ll m_l$  einen großen Beitrag zu  $a_l$  liefern im Gegensatz zu schweren virtuellen Teilchen mit  $m_p \geq m_l$ , die nur einen kleinen Beitrag zu  $a_l$  liefern.

Im Vergleich von  $a_e$  zu  $a_\mu$  sind die massenabhängigen Beiträge um den Faktor  $\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 \approx 4 \cdot 10^4$  größer. Die massenabhängigen Beiträge zu  $a_\tau$  sind um den  $\left(\frac{m_\tau}{m_e}\right)^2 \approx 12 \cdot 10^6$  größer als zu  $a_e$ . Aufgrund der sehr kleinen mittleren Lebensdauer  $\tau_\tau = 290,6 \cdot 10^{-15} \text{ s}$  des Tauons ist es zur Zeit jedoch jenseits der experimentellen Möglichkeiten,  $a_\tau$  experimentell mit einer vergleichbaren Genauigkeit zu bestimmen wie  $a_e$  und  $a_\mu$ . Theoretisch lässt sich  $a_\tau = 117\,721(5) \cdot 10^{-8}$  [12] bestimmen. Experimentell kann nur der Bereich, in dem sich  $a_\tau$  befinden muss, eingeschränkt werden:  $-0.052 < a_\tau < 0.013$  [12]. Im Weiteren wird daher nur auf das anomale magnetische Moment des Elektrons und des Myons eingegangen. Eine genauere Beschreibung der massenabhängigen Effekte wird in Kapitel 4 gegeben.

### 3.1 QED

Betrachtet man nur QED-Beiträge zu  $a_l$ , so kann man  $a_l$  unterteilen in [8, §3]:

$$a_l^{QED} = A_1 + A_2 \left( \frac{m_l}{m_e} \right) + A_2 \left( \frac{m_l}{m_\mu} \right) + A_2 \left( \frac{m_l}{m_\tau} \right) + A_3 \left( \frac{m_l}{m_e}, \frac{m_l}{m_\mu}, \frac{m_l}{m_\tau} \right), \quad (3.3)$$

$$l \in \{e, \mu, \tau\}$$

Dabei gehören die Beiträge von  $A_2$  und  $A_3$ , bei denen das Lepton der Leptonenschleife das gleiche wie das äußere Lepton ist, noch zum Term  $A_1$ , der den universellen Beitrag bezeichnet. Dieser ist für jedes Lepton gleich. Der Term  $A_2$  beschreibt Beiträge von Diagrammen mit einer geschlossenen Leptonenschleife, in der sich das Lepton vom äußeren unterscheidet. Diese Beiträge treten ab 2-Schleifen auf. Der Term  $A_3$  beschreibt Beiträge von Diagrammen mit zwei geschlossenen Leptonenschleifen, mit zwei verschiedenen Leptonen, die sich beide vom äußeren Lepton unterscheiden. Diese Beiträge treten erst ab 3-Schleifen auf.

Die einzelnen Terme  $A_i$  können mit störungstheoretischen Methoden berechnet werden. Voraussetzung dafür ist die genaue Kenntnis eines genügend kleinen Parameters. In der QED bietet sich dafür die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (3.4)$$

an. Der Vertexfaktor in der QED lautet  $ie\gamma^\mu$ , mit jeder Ordnung kommen zwei Vertices also gerade ein Faktor  $e^2 \propto \alpha$  zur Amplitude hinzu, weswegen es sich anbietet in  $\alpha$  zu entwickeln. Des Weiteren ist der Wert von  $\alpha$  sehr genau bekannt. Den genauesten Wert erhält man über das anomale magnetische Moment des Elektrons  $a_e$  [13]:

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137,035\,999\,173 \quad (34) \quad [0,25 \text{ ppb}] \quad (3.5)$$

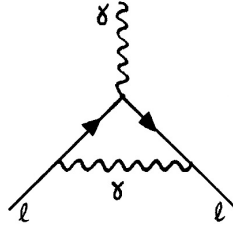
Genauereres dazu wird in Kapitel 4 besprochen.

Für die Entwicklung der Terme  $A_i$  in einer Störungsreihe in  $\frac{\alpha}{\pi}$  gilt [8, §3]:

$$A_i = A_i^{(2)} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) + A_i^{(4)} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_i^{(6)} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.6)$$

Der gesamte Beitrag zu einer bestimmten Ordnung  $n$  ist dabei:

$$c_n = \sum_{i=1}^3 A_i^{(2n)} \quad (3.7)$$



**Abb. 3.1:** Feynman-Diagramm 1. Ordnung QED

Es gilt also für die störungstheoretische Entwicklung von  $a_l^{QED}$  in  $\frac{\alpha}{\pi}$ :

$$a_l^{QED} = \sum_{n=1}^{\infty} a_l^{(n)QED} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \quad (3.8)$$

Um die gleiche Genauigkeit in der theoretischen Berechnung von  $a_l$  zu erreichen wie in der experimentellen Bestimmung, muss man derzeit die Terme bis zur 5. Ordnung berechnen. In den folgenden Kapiteln werden die Beiträge der verschiedenen Ordnungen behandelt und die universellen Beiträge genannt. Die massenabhängigen Beiträge der QED werden in Kapitel 4.1 besprochen. Man erhält sie durch Ersetzung der Leptonen in den virtuellen Leptonenschleifen.

### 3.1.1 1. Ordnung

In der QED trägt zur 1. Ordnung nur ein Feynman-Diagramm bei, welches man in Abb. 3.1 sehen kann. Der Beitrag dieses Diagramms ist universell, also für alle Leptonen gleich, da man nur eine Schleife mit einem virtuellen Photon hat. Als Beitrag erhält man gerade das berühmte Ergebnis von Schwinger [4]:

$$a_l^{(1)QED} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right), \quad l \in \{e, \mu, \tau\} \quad (3.9)$$

In Kapitel 5.1 wird dieser Beitrag per Hand und computergestützt über die Projektionsmethode berechnet.

### 3.1.2 2. Ordnung

In der QED existieren 11 Feynman-Diagramme mit 2-Schleifen. Diese kann man in Abb. 3.2 sehen, wobei in der Leptonenschleife in Abb. 3.2 9)  $l \in \{e, \mu, \tau\}$  gemeint ist und das Feynman-Diagramm somit 3 Feynman-Diagramme repräsentiert. Die Feynman-Diagramme in Abb. 3.2 1)-8) liefern universelle Beiträge zu  $a_l$  und das Feynman-Diagramm in Abb. 3.2 9) liefert, je nachdem ob das Lepton der Leptonenschleife das

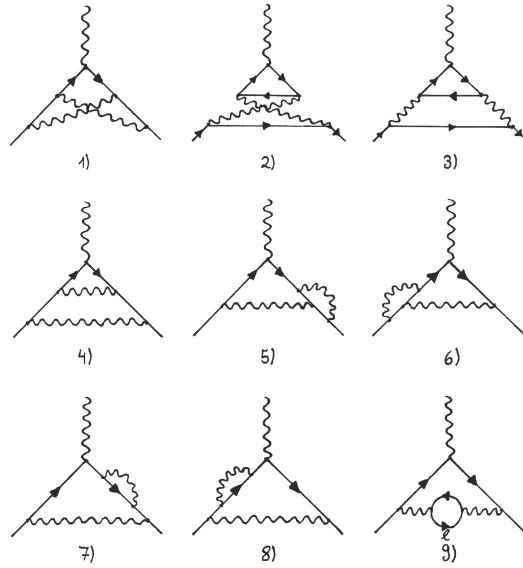
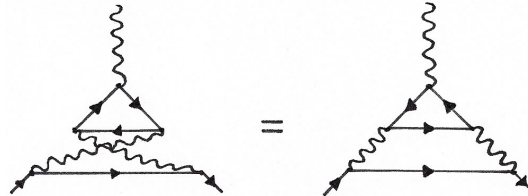


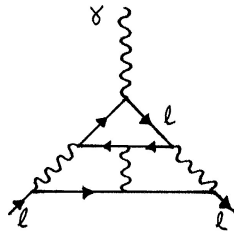
Abb. 3.2: Feynman-Diagramme 2. Ordnung QED

gleiche wie das äußere Lepton ist oder nicht, einen universellen oder massenabhängigen Beitrag. Eine interne Leptonenschleife in einem Feynman-Diagramm nennt man auch Photon-Vakuumpolarisation (VP) oder Photon-Selbstenergie (vgl. Abb. 2.2).

Die Feynman-Diagramme in Abb. 3.2 2) und Abb. 3.2 3) unterscheiden sich nur in ihrem Umlaufsinn in der Leptonenschleife. Dies lässt sich gut erkennen, wenn man Abb. 3.2 2) anders zeichnet:



Nach den Feynman-Regeln (vgl. A.1) ist bekannt, dass wenn man die Richtung eines Fermionen-Propagators umkehrt, das äquivalent zum Vertauschen der virtuellen Elektron- und Positronzustände ist, welche der Propagator repräsentiert. Folglich muss, um den Umlaufsinn der Leptonenschleife umzukehren, an jedem Vertex der Vertexpfaktor  $i(+e)\gamma_\mu$  durch  $i(-e)\gamma_\mu$  ersetzt werden. Aus diesem Grund unterscheiden sich die Amplituden der Feynman-Diagramme in Abb. 3.2 2) und Abb. 3.2 3) nur um einen Faktor  $(-1)^3$  und summieren sich exakt zu Null. Dies lässt sich auch in der expliziten Berechnung der Amplituden der Diagramme erkennen (vgl. Kapitel 5.2). Das Ergebnis dieser beiden Diagramme ist ein Spezialfall des Theorems von Furry, das besagt, dass Beiträge von Diagrammen, die eine geschlossene Fermionenschleife mit einer ungeraden



**Abb. 3.3:** „Light-by-Light-Scattering“ 3. Ordnung QED [2, §2.5]

Anzahl an Vertices besitzen, verschwinden. Die Ursache dafür ist, dass es immer zwei dieser Diagramme gibt, die sich nur in der Umlaufrichtung der Fermionenschleife unterscheiden und deren Amplituden sich, mit der oben genannten Begründung, zu Null addieren (vgl. [14, §9.1]).

Für den gesamten universellen Beitrag zweiter Ordnung erhält man:

$$a_{l,uni}^{(2)QED} = \frac{197}{144} + \left( \frac{1}{2} - 3 \ln(2) \right) \zeta(2) + \frac{3}{4} \zeta(3) \quad (3.10)$$

$$= -0.328\,478\,965\,579\,193 \dots \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \quad (3.11)$$

Dabei ist  $\zeta(s)$  die Riemannsche Zeta-Funktion (vgl. A.4). Dieser Wert ist von Petermann [15] und Sommerfield [16] analytisch berechnet worden und kann bis zur gewünschten Genauigkeit angegeben werden.

Methoden zur Berechnung der QED-Beiträge 2. Ordnung befinden sich in Kapitel 5.2.

### 3.1.3 Höhere Ordnungen

#### 3. Ordnung

Zum universellen Beitrag 3. Ordnung tragen 72 Diagramme bei (vgl. [8, §3.1]). Die massenabhängigen Beiträge erhält man aus diesen Diagrammen, indem man in den Feynman-Diagrammen mit Leptonenschleifen das virtuelle Lepton austauscht. So erhält man noch einmal 45 Diagramme für die massenabhängigen Beiträge 3. Ordnung. Ab 3. Ordnung liefern auch Diagramme mit „Light-by-Light-Scattering“ (LbL) einen Beitrag zu  $a_l$ . Ein typisches LbL-Diagramm sieht man in Abb. 3.3. Schon zur 2. Ordnung gibt es Diagramme mit LbL (s. Abb. 3.2 2)-3)), welche aber keinen Beitrag liefern. In 3. Ordnung hat man eine geschlossene Leptonenschleife mit vier Vertices, weshalb diese Diagramme nicht verschwinden, sondern einen Beitrag liefern. Interessant bei den Diagrammen mit LbL ist, dass sie große Beiträge liefern und somit auch bei der Berechnung höherer Ordnungen eine große Rolle spielen (vgl. [2, §2.5]).

Der universelle Beitrag 3. Ordnung [3]

$$a_{l,uni}^{(3)QED} = 1,181\,241\,456 \dots \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \quad (3.12)$$

wurde von Laporta und Remiddi [17] analytisch berechnet und kann bis zur gewünschten Genauigkeit angegeben werden.

#### 4. Ordnung

Es existieren 891 Diagramme 4. Ordnung, 373 mit und 518 ohne Leptonenschleifen. Aufgrund der Komplexität in der Berechnung dieser Diagramme, wurden bisher nur einige Diagramme analytisch berechnet und der komplette Wert von Kinoshita et al. [18] numerisch mittels Monte-Carlo-Integration bestimmt:

$$a_{l,uni}^{(4)QED} = -1,9106 (20) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \quad (3.13)$$

#### 5. Ordnung

Zur 5. Ordnung tragen 12672 Feynman-Diagramme zum universellen Beitrag von  $a_l$  bei. 2012 wurde deren Beitrag erstmals von Kinoshita et al. [18] numerisch mittels Monte-Carlo-Integration berechnet:

$$a_{l,uni}^{(5)QED} = 9,16 (58) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 \quad (3.14)$$

Zuvor wurde der vage Schätzwert  $a_{l,uni}^{(5)QED} = 0,0 (4,6) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5$  für die Bestimmung von  $a_l$  benutzt.

##### 3.1.4 Gesamter universeller QED-Beitrag

Unter Berücksichtigung aller Diagramme bis zur 5. Ordnung der universellen Beiträge zu  $a_l$  erhält man:

$$\begin{aligned} a_{l,uni}^{QED} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 0,328\,478\,965\,579\,193 \dots \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,181\,241\,456 \dots \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \\ &\quad - 1,9106 (20) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 9,16 (58) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 \\ &= 0,001\,159\,652\,176\,30 (43)(10)(31) \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die Unsicherheiten kommen hierbei, bei der ersten beginnend, von der Feinstrukturkonstante, dem 4-Schleifen und 5-Schleifen Beitrag. Interessant hierbei ist das alternierende Vorzeichen der Beiträge der verschiedenen Ordnungen (positiv für  $n$  gerade und negativ für  $n$  ungerade), für das es keine einfache Erklärung gibt (vgl. [3]).

Zur Berechnung wurde der Wert der Feinstrukturkonstante aus Experimenten mit Atominterferometrie [18]

$$\alpha^{-1}(^{87}\text{Rb}) = 137,035\,999\,049\,(90) [0.66\text{ ppb}] \quad (3.16)$$

benutzt und nicht  $\alpha(a_e)$ , um diesen universellen Beitrag sowohl bei der Berechnung des gesamten anomalen magnetischen Moments des Myons  $a_\mu$  als auch des Elektrons  $a_e$  verwenden zu können (vgl. Kapitel 4.1).

Beiträge höherer Ordnungen wurden bisher noch nicht berechnet.

### 3.2 Hadronische Beiträge

Ab Feynman-Diagrammen mit 2-Schleifen (s. Abb. 3.2 9)) liefert neben der QED auch die Quantenchromodynamik (QCD) Beiträge zum anomalen magnetischen Moment  $a_l$ . Mit der QCD werden starke Wechselwirkungsprozesse beschrieben. Die Leptonen in den Schleifen der Feynman-Diagramme können durch Quarks ersetzt werden, indem man die Ladung, Farbe und Masse anpasst. Auf diese Weise könnte man analog zur QED wieder störungstheoretische Methoden anwenden, um diese Beiträge zu berechnen. Die Quarks unterliegen aber dem Confinement (vgl. [14, §11.2]) und treten nur gebunden in Hadronen auf. Hadronen unterteilen sich in Mesonen, Quark-Antiquark-Paare, und Baryonen (Antibaryonen), 3-(Anti)Quark-Zustände, die farblos sind. Aufgrund dieser Tatsache, kann die Quarkmasse in der Schleife nicht direkt bestimmt werden. Des Weiteren ist die Kopplungskonstante der QCD  $\alpha_s(s)$  eine laufende Kopplungskonstante und wird bei kleinen Energien  $E = \sqrt{s}$  groß. Daher kann störungstheoretische QCD („perturbative QCD“ = pQCD) nicht unterhalb von  $2\text{ GeV}$  und nur fern von möglichen Resonanzen angewandt werden (vgl. [8, §4]). Bei höheren Energien können die hadronischen Beiträge mittels pQCD berechnet werden, da dort die Kopplungskonstante aufgrund der Asymptotischen Freiheit (vgl. [14, §15]) klein ist. Bei kleinen Energien bedient man sich eines semi-phänomenologischen Ansatzes, indem man die Dispersionsrelation zusammen mit dem Optischen Theorem und experimentellen Daten zur Berechnung verwendet. Eine genauere Beschreibung der Methoden zur Berechnung findet man in [8, §4]. Da die Berechnung der hadronischen Beiträge sehr kompliziert ist, liefern sie die größte Ungenauigkeit in der theoretischen Bestimmung des anomalen magnetischen Moments.

Die hadronischen Beiträge sind zwangsläufig massenabhängig und lassen sich in zwei Arten unterscheiden: die hadronische Vakuumpolarisation (VP) und hadronisches „Light-by-Light-Scattering“ (LbL).

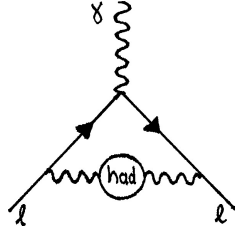


Abb. 3.4: Führende Ordnung der hadronischen VP

### 3.2.1 Hadronische Vakuumpolarisation

Die hadronische Vakuumpolarisation tritt ab Feynman-Diagrammen mit 2-Schleifen auf (s. Abb. 3.4). Der Beitrag der Quarkschleife wird durch die Photon-Selbstenergie beschrieben (vgl. Abb 2.2(b)). Mit der Dispersionsrelation (vgl. [8, §4]) kann die Photon-Selbstenergie mit dem Wirkungsquerschnitt der hadronischen Elektron-Positron-Anihilation  $e^+ + e^- \rightarrow Hadronen$  in Verbindung gebracht werden, welcher experimentell bestimmt werden kann. Eine andere Möglichkeit wäre die Photon-Selbstenergie mit dem Zerfall  $\tau \rightarrow \nu_\tau + Hadronen$  in Verbindung zu setzen (vgl. [8, §4.1.2]), welchen man ebenfalls experimentell bestimmen kann. Diese beiden Werte weisen jedoch eine Diskrepanz auf, die man bisher nicht eindeutig erklären konnte. Da der Wirkungsquerschnitt  $\sigma(e^+ + e^- \rightarrow Hadronen)$  dem, was man benötigt, eher gleich, wird in der Regel dieser für die Berechnung der hadronischen Vakuumpolarisation benutzt.

Der führende Beitrag („leading order“=LO) der hadronischen Vakuumpolarisation zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons  $a_e$  [18] und des Myons  $a_\mu$  [19] beträgt:

$$a_e^{LOhad,VP} = 1,875 (18) \cdot 10^{-12} , \quad (3.17)$$

$$a_\mu^{LOhad,VP} = 6949,1 (37,2)(21,0) \cdot 10^{-11} \quad (3.18)$$

Der „next-to-leading-order“ (NLO) Beitrag ist auch bekannt und beträgt [18],[19] :

$$a_e^{NLOhad,VP} = - 0,225 (5) \cdot 10^{-12} , \quad (3.19)$$

$$a_\mu^{NLOhad,VP} = - 98,4 (0,6)(0,4) \cdot 10^{-11} \quad (3.20)$$

Bei  $a_\mu$  kommt die erste Unsicherheit dabei von den experimentellen Daten und die zweite von der Berechnung. Bei  $a_e$  ist die Unsicherheit schon die gesamte Unsicherheit.

### 3.2.2 Hadronisches Light-by-Light-Scattering

Ab Feynman-Diagrammen mit 3-Schleifen kann analog zur QED auch hadronisches „Light-by-Light-Scattering“ auftauchen. Wie auch in der QED können diese Diagramme einen großen Beitrag liefern (vgl. Kapitel 3.1.3), weswegen die genaue Berechnung



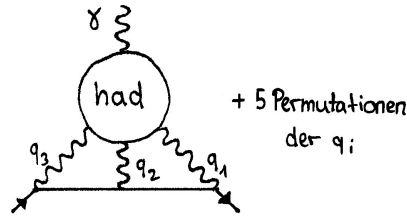


Abb. 3.5: Hadronisches LbL

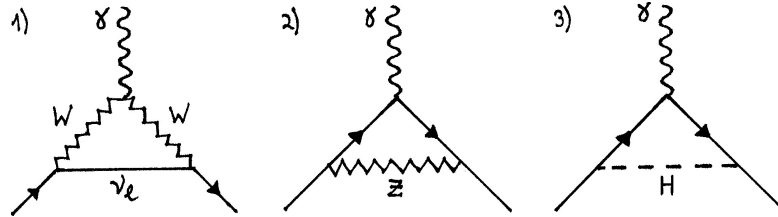


Abb. 3.6: Elektroschwache Feynman-Diagramme 1. Ordnung

dieser Beiträge wichtig ist. Dieser Beitrag lässt sich jedoch nicht mittels Störungstheorie berechnen. Ein Grund dafür ist, dass drei der vier Photonen aus Abb. 3.5 virtuell sind und man somit über alle möglichen Impulse integrieren muss. Deswegen kann man in der Berechnung der Beiträge keine experimentellen Daten nutzen. Stattdessen werden verschiedene theoretische Modelle zur Berechnung genutzt. Nur wenige Beiträge können analytisch und modellunabhängig berechnet werden. Die verschiedenen Modelle liefern jedoch alle ähnliche Beiträge der Diagramme. Eine genauere Beschreibung der verschiedenen Modelle findet man in [8, §5].

Der Beitrag des hadronischen „Light-by-Light-Scattering“ zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons  $a_e$  [18] und des Myons  $a_\mu$  [19] beträgt:

$$a_e^{had,LbL} = 0,035 (10) \cdot 10^{-12} , \quad (3.21)$$

$$a_\mu^{had,LbL} = 116 (40) \cdot 10^{-11} \quad (3.22)$$

Diese Werte sind von der gleichen Größenordnung wie  $a_e^{NLOhad,VP}$  und  $a_\mu^{NLOhad,VP}$ , weisen aber eine viel größere Ungenauigkeit auf. Ein zukünftiges Ziel ist es, den hadronischen LbL-Beitrag mit einer höheren Genauigkeit zu berechnen, um die Genauigkeit vom gesamten anomalen magnetischen Moment der Leptonen zu verbessern.

### 3.3 Elektroschwache Beiträge

Neben der QED und der QCD trägt auch die elektroschwache Wechselwirkung zum anomalen magnetischen Moment der Leptonen  $a_l$ ,  $l \in \{e, \mu, \tau\}$ , bei. In Abb. 3.6 sieht

man die elektroschwachen Feynman-Diagramme 1. Ordnung.

In der Näherung, in der man Terme  $\mathcal{O}\left(\frac{m_l^2}{m_{W,Z}^2}\right)$  vernachlässigt, da sie aufgrund der viel größeren Masse der Eichbosonen klein sind, erhält man für die Beiträge der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen (s. Abb. 3.6 1)+2)) in 1. Ordnung zu  $a_l$  [8, §6]:

$$a_l^{(1)EW,W} = \frac{\sqrt{2}G_F m_l^2}{16\pi^2} \frac{10}{3}, \quad (3.23)$$

$$a_l^{(1)EW,Z} = \frac{\sqrt{2}G_F m_l^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4s_W^2)^2 - 5}{3} \quad (3.24)$$

Dabei ist  $G_F = 1,166\,3787(6) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  die Fermi-Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung,  $s_W^2 = \sin(\theta_W)^2 = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} = 0,222\,76(56)$  der elektroschwache Mischungswinkel mit  $m_W = 80,385(15) \text{ GeV}$  und  $m_Z = 91,187\,6(21) \text{ GeV}$  den Massen des  $W$ - und  $Z$ -Bosons [21].

Für den Beitrag des Higgs-Bosons (s. Abb. 3.6 3)) erhält man [8, §6]:

$$a_l^{(1)EW,H} = \frac{\sqrt{2}G_F m_l^2}{4\pi^2} \int_0^1 dy \frac{(2-y)y^2}{y^2 + (1-y)\left(\frac{m_H^2}{m_l^2}\right)} \quad (3.25)$$

Der Beitrag des Higgs-Bosons ist der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-14})$  [8, §6] und liefert somit einen sehr kleinen Beitrag.

Nach der Bestimmung der Higgs-Masse,  $m_H = 125,9(0,4) \text{ GeV}$  [21], am LHC beträgt der gesamte elektroschwache Beitrag zu  $a_e$  [13] und  $a_\mu$  [9] inklusive höherer Ordnungen:

$$a_e^{EW} = 0,029\,73(5,2) \cdot 10^{-12}, \quad (3.26)$$

$$a_\mu^{EW} = 153,6(1) \cdot 10^{-11} \quad (3.27)$$

Der Test der theoretischen Bestimmung der elektroschwachen Beiträge zu  $a_\mu$  war eines der wichtigsten Ziele des Brookhaven Muon  $g-2$  Experiments, da der Beitrag der elektroschwachen Wechselwirkung zu  $a_\mu$  drei Standardabweichungen ( $3\sigma$ ) beträgt.

---

## 4 Vergleich $a_e$ und $a_\mu$

Das anomale magnetische Moment des Myons  $a_\mu$  steht im Fokus der Berechnungen und Experimente. Das anomale magnetische Moment des Elektrons  $a_e$  wird hingegen nur zur Bestimmung der Feinstrukturkonstante  $\alpha(a_e)$  benutzt, welche man in der Berechnung von  $a_\mu$  benötigt.

In diesem Kapitel wird ein Vergleich zwischen  $a_e$  und  $a_\mu$  gezogen. Der Fokus liegt dabei auf der Genauigkeit ihrer experimentellen und theoretischen Bestimmung (Kapitel 4.1) und der Möglichkeit durch die Diskrepanz dieser Werte  $\Delta a_l = a_l^{exp} - a_l^{theo}$ ,  $l \in \{e, \mu\}$ , Aussagen über die Vollständigkeit des Standardmodells (SM) treffen zu können (Kapitel 4.2).

### 4.1 Theorie und Experiment

#### 4.1.1 Massenabhängige Beiträge

In Kapitel 3.1 wurden bereits die universellen Beiträge der QED zu  $a_l$  genannt. Zu den massenabhängigen Beiträgen der QED zu  $a_e$  tragen Leptonenschleifen mit virtuellen Myonen und Tauonen bei. Zu  $a_\mu$  tragen Leptonenschleifen mit virtuellen Elektronen und Tauonen bei.

In Tab. 4.1 sind die Beiträge der massenabhängigen QED-Terme  $A_2$  und  $A_3$  (vgl. Kapitel 3.1, (3.6)) zu  $a_e$  und  $a_\mu$  aufgelistet. Zur Berechnung wurden die Massenverhältnisse

$$\frac{m_e}{m_\mu} = 4,836\,331\,66\,(12) \cdot 10^{-3}, \quad \frac{m_e}{m_\tau} = 2,875\,92\,(26) \cdot 10^{-4}, \quad [18] \quad (4.1)$$

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206,768\,284\,3\,(52), \quad \frac{m_\mu}{m_\tau} = 5,946\,49\,(54) \cdot 10^{-2} \quad [19] \quad (4.2)$$

verwendet. Zur 5. Ordnung wurde für  $a_e$  bisher nur der Term  $A_2^{10}(m_e/m_\mu)$  berechnet. Die massenabhängigen Beiträge zu  $a_e$  sind klein, da  $m_e \ll m_{\mu,\tau}$  ist und sie somit proportional zu  $\ln^{k_p} \left( \frac{m_{\mu,\tau}}{m_e} \right)$  sind (vgl. Kapitel 3). Virtuelle Tauonenschleifen liefern ebenfalls einen kleinen Beitrag zu  $a_\mu$ , da  $m_\mu \ll m_\tau$  ist. Dagegen liefern virtuelle Elektronenschleifen einen großen Beitrag zu  $a_\mu$ , da  $m_\mu \gg m_e$  ist und der Beitrag proportional zu  $\left( \frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \ln^{k_p} \left( \frac{m_e}{m_\mu} \right)$  ist. Bei den Termen  $A_2(m_{e,\mu}/m_\tau)$  wird deutlich, dass massenabhängige Beiträge zu  $a_\mu$  im Vergleich zu  $a_e$  in etwa um den Faktor  $\left( \frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \approx 4 \cdot 10^4$  vergrößert sind (vgl. Kapitel 3).

Vergleicht man die gesamten massenabhängigen QED-Beiträge zu einer bestimmten Ordnung mit den universellen Beiträgen dieser Ordnung aus (3.15), welche der Größen-

$a_e$	$a_\mu$
$A_2^{(4)}(m_e/m_\mu) = 5,197\,386\,67\,(26) \cdot 10^{-7}$	$A_2^{(4)}(m_\mu/m_e) = 1,094\,258\,312\,0\,(83)$
$A_2^{(4)}(m_e/m_\tau) = 1,837\,98\,(34) \cdot 10^{-9}$	$A_2^{(4)}(m_\mu/m_\tau) = 0,780\,79\,(15) \cdot 10^{-4}$
$A_e^{(4)} \propto 10^{-7}$	$A_\mu^{(4)} \propto 10^0$
$A_2^{(6)}(m_e/m_\mu) = -7,373\,941\,55\,(27) \cdot 10^{-6}$	$A_2^{(6)}(m_\mu/m_e) = 22,868\,380\,04\,(23)$
$A_2^{(6)}(m_e/m_\tau) = -6,583\,0\,(11) \cdot 10^{-8}$	$A_2^{(6)}(m_\mu/m_\tau) = 0,360\,70\,(13) \cdot 10^{-3}$
$A_3^{(6)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau) = 0,190\,9\,(1) \cdot 10^{-12}$	$A_3^{(6)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 0,527\,76\,(11) \cdot 10^{-3}$
$A_e^{(6)} \propto 10^{-6}$	$A_\mu^{(6)} \propto 10^1$
$A_2^{(8)}(m_e/m_\mu) = 9,222\,(66) \cdot 10^{-4}$	$A_2^{(8)}(m_\mu/m_e) = 132,685\,2\,(60)$
$A_2^{(8)}(m_e/m_\tau) = 8,24\,(12) \cdot 10^{-6}$	$A_2^{(8)}(m_\mu/m_\tau) = 0,042\,34\,(12)$
$A_3^{(8)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau) = 7,465\,(18) \cdot 10^{-7}$	$A_3^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 0,062\,72\,(4)$
$A_e^{(8)} \propto 10^{-6}$	$A_\mu^{(8)} \propto 10^2$
$A_2^{(10)}(m_e/m_\mu) = -0,003\,82\,(39)$	$A_2^{(10)}(m_\mu/m_e) = 742,18\,(87)$
	$A_2^{(10)}(m_\mu/m_\tau) = -0,068\,(5)$
	$A_3^{(10)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 2,011\,(10)$
$A_e^{(10)} \propto 10^{-3}$	$A_\mu^{(10)} \propto 10^2$

**Tab. 4.1:** Massenabhängige QED-Beiträge zu  $a_e$  [18] und  $a_\mu$  [19]

ordnung  $\mathcal{O}(10^{-1})$  bis  $\mathcal{O}(10^0)$  sind, so erkennt man, dass die massenabhängigen Beiträge zu  $a_e$  viel geringer als die universellen sind. Bei  $a_\mu$  hingegen sind sie mit der Ordnung steigend größer als die universellen Beiträge. Da  $(\frac{\alpha}{\pi})^6 = 1,6 \cdot 10^{-16}$  ist, geht man davon aus, dass Terme der Ordnung  $n > 6$  für  $a_e$  vernachlässigbar klein sind, da die Koeffizienten  $A_i^{(2n)}$  für  $n > 6$  klein sein werden. Für  $a_\mu$  wird angenommen, dass der Beitrag der 6. Ordnung in etwa der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-12})$  und somit größer als die Unsicherheit der 5. Ordnung ist, weswegen ein nächstes Ziel zumindest eine vage Abschätzung dieses Wertes ist (vgl. [19]). Erkennbar ist, dass es für eine gewisse Genauigkeit der theoretischen Bestimmung von  $a_e$  ausreicht, weniger Ordnungen zu kennen als für die gleiche Genauigkeit in  $a_\mu$ . Dies liegt an den vergrößerten massenabhängigen Beiträgen.

Ein noch größerer Anteil der massenabhängigen Beiträge zum gesamten anomalen magnetischen Moment ließe sich bei  $a_\tau$  erkennen. Da es keine Leptonenschleifen gibt, bei denen die Masse des virtuellen Leptons größer als die des Tauons ist, sind die Bei-

träge von Leptonenschleifen zu  $a_\tau$  groß. Die verschiedenen Beiträge zum Tauon und ein Vergleich mit dem Elektron und Myon werden an dieser Stelle nicht weitergehend behandelt, da dies den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Für weitere Informationen siehe [12].

Die explizite Berechnung der massenabhängigen QED-Beiträge wird in [8, §3.3] geschildert.

Um den gesamten QED-Beitrag mit Hilfe der Koeffizienten  $A_i$  der Reihenentwicklung in  $\frac{\alpha}{\pi}$  zu berechnen, benötigt man einen Wert der Feinstrukturkonstante, der unabhängig von  $a_e$  ist (vgl. Kapitel 4.2). Diesen Wert erhält man aus Atominterferometrie mit Cäsium ( $^{133}\text{Cs}$ ) und Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ). Genauer zu den Experimenten findet man in [13]. Die Experimente ergeben:

$$\alpha^{-1}(^{133}\text{Cs}) = 137,036\,000\,0\,(11) \quad [7,7\text{ ppb}] \quad (4.3)$$

$$\alpha^{-1}(^{87}\text{Rb}) = 137,035\,999\,049\,(90) \quad [0,66\text{ ppb}] \quad (4.4)$$

Aufgrund der größeren Unsicherheit von  $\alpha^{-1}(^{133}\text{Cs})$  wird  $\alpha^{-1}(^{87}\text{Rb})$  zur Berechnung verwendet. Wenn man diesen Wert mit der Bestimmung der Feinstrukturkonstante aus  $a_e$  [13]

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137,035\,999\,173\,(34) \quad [0,25\text{ ppb}] \quad (4.5)$$

vergleicht (zur Berechnung vgl. Kapitel 4.2), so erkennt man zwischen den beiden Werten eine Abweichung von  $1,3\sigma$ . Der Unterschied zwischen den beiden Werten ist jedoch geringer als die Unsicherheit in der Messung von  $a_\mu^{\text{exp}}$ , weswegen beide Werte zur Berechnung von  $a_\mu^{\text{QED}}$  genutzt werden können. Aufgrund der etwas höheren Genauigkeit von  $\alpha(a_e)$  wird üblicherweise dieser Wert für die Feinstrukturkonstante in der Berechnung von  $a_\mu$  benutzt. Für den gesamten QED-Beitrag zu  $a_\mu$  erhält man mit der Feinstrukturkonstante  $\alpha(^{87}\text{Rb})$  [19]:

$$a_\mu^{\text{QED}}(^{87}\text{Rb}) = 116\,584\,718\,951\,(9)(19)(7)(77) \cdot 10^{-14} \quad (4.6)$$

Mit der Feinstrukturkonstante  $\alpha(a_e)$  ergibt sich der etwas genauere Wert von [19]

$$a_\mu^{\text{QED}}(a_e) = 116\,584\,718\,845\,(9)(19)(7)(30) \cdot 10^{-14} . \quad (4.7)$$

Dabei kommt in (4.6) und (4.7) jeweils die letzte Unsicherheit von der Unsicherheit der Feinstrukturkonstante. Die anderen Unsicherheiten kommen, bei der ersten beginnend, vom Massenverhältnis, dem 4-Schleifen und 5-Schleifen Beitrag. Die Berechnung von  $a_\mu$  über  $\alpha(a_e)$  ist jedoch nicht ganz unproblematisch, was in Kapitel 4.2 besprochen wird. Zum besseren Vergleich von  $a_e$  mit  $a_\mu$  wird im Weiteren der Wert aus (4.6) verwendet.

Mit  $\alpha(^{87}Rb)$  aus (4.4), den Massenverhältnissen aus (4.1) und (4.2) und den Werten aus Tab. 4.1 lässt sich mit dem universellen Beitrag (3.15) der gesamte QED-Beitrag bis einschließlich der 5. Ordnung zu  $a_e$  und  $a_\mu$  berechnen. Zusammen mit den hadronischen ((3.17) - (3.22)) und elektroschwachen ((3.26), (3.27)) Beiträgen erhält man insgesamt für die anomalen magnetischen Momente:

$$a_e^{theo} = 11\,596\,521\,817,8 (0,6)(0,4)(0,2)(7,6) \cdot 10^{-13} \quad [13] \quad (4.8)$$

$$a_\mu^{theo} = 116\,591\,840 (59) \cdot 10^{-11} \quad [19] \quad (4.9)$$

Die ersten drei Unsicherheiten in  $a_e$  kommen dabei von den 4-Schleifen, 5-Schleifen und hadronischen Beiträgen, wobei die Unsicherheit der elektroschwachen Beiträge vernachlässigbar klein ist. Die vierte Unsicherheit kommt von der experimentellen Bestimmung von  $\alpha(^{87}Rb)$ . Für  $a_\mu$  wurden die Unsicherheiten zusammengefasst.

#### 4.1.2 Diskrepanz

##### Diskrepanz $\Delta a_e$

Ein Experiment zur Bestimmung des anomalen magnetischen Moments des Elektrons wurde 2008 an der Harvard Universität von Gabrielse et al. an einem „one-particle quantum cyclotron“ durchgeführt. Eine genaue Beschreibung des Experiments findet man in [20]. Mit Hilfe dieses Experimentes erhält man den Wert [13]:

$$a_e^{exp} = 11\,596\,521\,807,3 (2,8) \cdot 10^{-13} \quad [0,24 \text{ ppb}] \quad (4.10)$$

Die Unsicherheit dieses Wertes ist 15-mal kleiner als die des vorherigen Wertes von 1987, was einen enormen Fortschritt in der experimentellen Genauigkeit widerspiegelt.

Vergleicht man  $a_e^{exp}$  aus (4.10) mit  $a_e^{theo}$  aus (4.8), erhält man eine Diskrepanz zwischen diesen Werten von

$$\Delta a_e = a_e^{exp} - a_e^{theo} = -10,5 (8,1) \cdot 10^{-13} . \quad (4.11)$$

Dies entspricht einer Abweichung von  $1,3\sigma$ , was bedeutet, dass Theorie und Experiment gut übereinstimmen. Die Unsicherheit  $\delta\Delta a_e = 8,1 \cdot 10^{-13}$  folgt aus der quadratischen Kombination der Unsicherheiten (in der Größenordnung  $10^{-13}$ )

$$\underbrace{(0,6)_{QED4}, (0,4)_{QED5}, (0,2)_{had}, (0,0052)_{ew}}_{(0,7)_{theo}}, \underbrace{(7,6)_{\delta\alpha}, (2,8)_{\delta a_e^{exp}}}_{(8,1)_{exp}} . \quad (4.12)$$

Die ersten beiden Unsicherheiten könnten durch genauere numerische Berechnungen auf bis zu  $0,1 \cdot 10^{-13}$  verkleinert werden [13]. Dagegen ist es schwierig die Unsicherheit des hadronischen Beitrages noch zu reduzieren. Die elektroschwache Unsicherheit ist hingegen vernachlässigbar klein. Insgesamt geht man davon aus, dass sich die gesamte theoretische Unsicherheit in Zukunft um einen Faktor 2 oder 3 verkleinern lässt (vgl. [13]). Die Genauigkeit von  $\Delta a_e$  wird maßgeblich durch die experimentellen Unsicherheiten in der Bestimmung von  $a_e^{exp}$  und der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  ( $^{87}Rb$ ) beschränkt. Dabei liefert  $\delta\alpha$  die größte Ungenauigkeit und ist sogar dreimal so groß wie  $\delta a_e^{exp}$ . Eine Verbesserung der Genauigkeit in der Bestimmung von  $\alpha$  ( $^{87}Rb$ ) ist notwendig, um die gesamte Genauigkeit von  $\Delta a_e$  zu verbessern. Dies ist ein Ziel zukünftiger Experimente. Des Weiteren sollte der hadronische Beitrag kontrolliert und überarbeitet werden, da die Summe der hadronischen Beiträge  $1,685(21) \cdot 10^{-12}$  größer als  $\Delta a_e$  ist.

### Diskrepanz $\Delta a_\mu$

Vergleicht man den experimentell (2.39) und theoretisch (4.9) bestimmten Wert des anomalen magnetischen Moments des Myons miteinander, so erhält man eine Diskrepanz von

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{exp} - a_\mu^{theo} = 249(86) \cdot 10^{-11} . \quad (4.13)$$

Die Unsicherheit  $\delta\Delta a_\mu = 86 \cdot 10^{-11}$  folgt, in quadratischer Kombination, aus den Unsicherheiten (in der Größenordnung  $10^{-11}$ )

$$\underbrace{(0,019)_{QED4}, (0,007)_{QED5}, (59)_{had}, (2)_{ew}}_{(59)_{theo}}, \underbrace{(0,077)_{\delta\alpha}, (63)_{\delta a_\mu^{exp}}}_{(63)_{exp}} . \quad (4.14)$$

Die Diskrepanz zwischen  $a_\mu^{exp}$  und  $a_\mu^{theo}$  ist trotz der Verbesserung in der Berechnung der 4-Schleifen, der Berechnung der 5-Schleifen Beiträge sowie auch der Verbesserung des elektroschwachen Beitrages, nicht wesentlich besser geworden und beträgt immer noch  $\sim 3,5\sigma$ . Die größte Quelle der theoretischen Unsicherheit sind die hadronischen Beiträge, deren exaktere Berechnung ein Ziel der nächsten Jahre ist. Den experimentellen Fehler dominiert  $\delta a_\mu^{exp}$ , weswegen auch hier eine Verbesserung nötig ist (vgl. [10], [11]). Die große Diskrepanz  $\Delta a_\mu$  ist jedoch nicht allein mit Messunsicherheiten und Unsicherheiten in der Berechnung von  $a_\mu$  zu erklären. In einer vollständigen Theorie sollte das anomale magnetische Moment genau vorhersagbar sein. Daher weist die Diskrepanz darauf hin, dass das SM nicht vollständig ist, sondern es Einflüsse neuer Physik, die im SM nicht berücksichtigt werden, auf  $a_\mu$  geben könnte. Diese möglichen Einflüsse werden im nächsten Kapitel besprochen.

## 4.2 Stellung von $a_e$ und $a_\mu$ in Erweiterungen des SMs

Das anomale magnetische Moment des Elektrons  $a_e$  spielte bis jetzt, im Gegensatz zu  $a_\mu$ , keine Rolle für den Test der Vollständigkeit des SMs. Dies folgt aus der Annahme, dass Einflüsse neuer Physik, die über das SM hinausgehen, keine großen Beiträge zu  $a_e$  liefern.

Aufgrund dieser Annahme beschränkt sich die theoretische Berechnung und experimentelle Bestimmung von  $a_e$  darauf, aus dem Vergleich dieser Werte die Feinstrukturkonstante  $\alpha(a_e)$  zu bestimmen. Der theoretisch bestimmte Wert von  $a_e$  lässt sich in die Komponenten

$$a_e^{theo}(\alpha) = a_e^{QED}(\alpha) + a_e^{had} + a_e^{ew} \quad (4.15)$$

zerlegen, wobei man davon ausgeht, dass die Abhängigkeit des hadronischen und elektroschwachen Beitrages von der Feinstrukturkonstante vernachlässigbar ist. Da sich der QED-Beitrag zu  $a_e$  in einer Reihe in  $\frac{\alpha}{\pi}$  mit bekannten Koeffizienten entwickeln lässt (vgl. Kapitel 3.1), erhält man durch den Vergleich von

$$a_e^{QED}(\alpha) = a_e^{exp} - (a_e^{had} + a_e^{ew}) \quad (4.16)$$

und auflösen nach  $\alpha$  einen Wert für die Feinstrukturkonstante in Abhängigkeit von  $a_e$ . Wenn man  $\alpha$  auf diese Weise bestimmt, geht man davon aus, dass  $a_e^{theo} = a_e^{exp}$  gilt, also dass das SM  $a_e$  genau vorhersagt und es keine bzw. verschwindend kleine Beiträge von neuer Physik (NP) gibt.

Der so bestimmte Wert für die Feinstrukturkonstante wird üblicherweise in der theoretischen Berechnung von  $a_\mu$  verwendet. Dies stellt jedoch ein Problem dar. Aufgrund der Annahme, dass es keine Einflüsse neuer Physik auf  $a_e$  gibt, werden auch die Einflüsse neuer Physik auf  $a_\mu$  beschränkt, da  $a_\mu$  aufgrund von  $\alpha(a_e)$  indirekt von  $a_e$  abhängt.

Mit der Bestimmung von  $a_\mu$  unabhängig von  $a_e$  lassen sich Modelle zur Erklärung der Diskrepanz  $\Delta a_\mu$  auf ihre Auswirkungen auf  $a_e$  untersuchen und ob die Auswirkungen im Rahmen der Diskrepanz  $\Delta a_e$  liegen und die Modelle somit konsistent sind.

Es gibt eine Vielzahl von Modellen, die das SM erweitern. In diesen Modellen werden typischerweise neue Teilchen postuliert, welche in den virtuellen Schleifen erzeugt werden könnten und so zu  $a_l$ ,  $l \in \{e, \mu, \tau\}$  beitragen würden.

In vielen Modellen für neue Physik skalieren die Beiträge so, dass [13]

$$\frac{a_l^{NP}}{a_{l'}^{NP}} = \left( \frac{m_l}{m_{l'}} \right)^2, \quad l, l' \in \{e, \mu, \tau\}. \quad (4.17)$$



Man kann so direkt von den Modellen zur Erklärung von  $\Delta a_\mu$  und den daraus resultierenden Beiträgen  $a_\mu^{NP}$  auf die Beiträge neuer Physik zu  $a_e$  schließen [13]:

$$a_e^{NP} = \left( \frac{a_\mu^{NP}}{3 \cdot 10^{-9}} \right) 0,7 \cdot 10^{-13} \quad (4.18)$$

Da im Idealfall  $a_\mu^{NP} = \Delta a_\mu$  ist, folgt aus Gleichung (4.18) für die Diskrepanzen:

$$\Delta a_e = \left( \frac{\Delta a_\mu}{3 \cdot 10^{-9}} \right) 0,7 \cdot 10^{-13} . \quad (4.19)$$

Mit (4.13) erhält man so  $\Delta a_e = (0,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-13}$ . Vergleicht man dies mit (4.11) so erkennt man, dass die Genauigkeit von  $\Delta a_e$  fast ausreicht, um (4.19) zu bestätigen. Daher ist es wichtig  $\Delta a_e$  mit einer Genauigkeit unterhalb der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-13})$  zu bestimmen. Dies würde zeigen, ob Modelle für neue Physik, deren Beiträge nach Gleichung (4.17) skalieren, auch in Hinblick auf  $a_e$  verifiziert werden können.

Ferner gibt es Modelle, wie zum Beispiel Multi-Higgs-Dublett Modelle, deren Beiträge nicht wie in (4.17) skalieren. In solchen Modellen erweitert man das SM-Higgs um weitere Higgs-Felder, welche zum Beispiel durch supersymmetrische Erweiterungen des SMs motiviert sind. Beiträge solcher Modelle skalieren mit [13]

$$\frac{a_l^{NP}}{a_{l'}^{NP}} = \left( \frac{m_l}{m_{l'}} \right)^4, \quad l, l' \in \{e, \mu, \tau\} . \quad (4.20)$$

Auch mit solchen Modellen kann vom Beitrag  $a_\mu^{NP}$  auf den Beitrag  $a_e^{NP}$  geschlossen werden. Jedoch sind bei solchen Modellen die Beiträge  $a_e^{NP}$  im Vergleich zu den Modellen, die nach (4.17) skalieren, um die Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-5})$  kleiner und somit weit davon entfernt, nachgewiesen werden zu können.

Daneben gibt es noch Modelle, in denen der Beitrag  $a_l^{NP}$ ,  $l \in \{e, \mu, \tau\}$ , keine Korrelation zu den Leptonenmassen mehr aufweist. Diese Modelle sind theoretisch sehr interessant, da sie Beiträge  $a_e^{NP}$  liefern können, die man schon mit der jetzigen Genauigkeit nachprüfen kann. Solche Modelle sind außerdem nützlich, da sie sich auch auf andere experimentelle Observablen auswirken, an denen man die Effekte neuer Physik überprüfen könnte. Eine genauere Behandlung solcher Modelle findet man in [13].

$a_e$  liefert somit eine wichtige Möglichkeit zur Probe von Modellen neuer Physik, die über das SM hinausgehen, mit denen die  $\sim 3,5\sigma$  Diskrepanz zwischen der theoretischen und experimentellen Bestimmung von  $a_\mu$  erklärt werden soll. Dies ist zum einen der Genauigkeit der experimentellen und theoretischen Bestimmung von  $a_e$  zu verdanken, zum anderen der Verbesserung in der Bestimmung der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  unabhängig von  $a_e$ . Ein zukünftiges Ziel muss es sein, die Genauigkeit von  $\alpha$  ( $^{87}Rb$ ), sowie auch die Genauigkeit in der Bestimmung von  $a_e^{exp}$  zu verbessern, um noch bessere Aussagen treffen zu können.

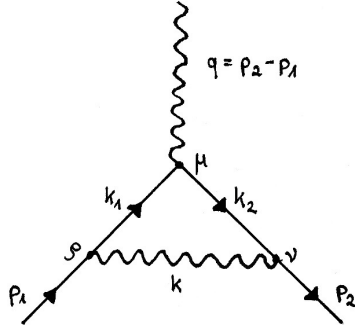


Abb. 5.1: 1-Schleifen Feynman-Diagramm in der QED

## 5 Methoden zur Berechnung des anomalen magnetischen Moments in der QED

In Kapitel 5.1 werden zwei Methoden zur Berechnung des anomalen magnetischen Moments zur 1. Ordnung in der QED vorgestellt. In Kapitel 5.1.1 die klassische Methode mittels der Vertauschungsrelation der Dirac-Matrizen (vgl. A.2) und in Kapitel 5.1.4 die Berechnung mit Hilfe der Projektionsmethode. In den Kapiteln 5.1.2 und 5.1.3 werden mathematische Methoden besprochen, die zur Berechnung des Beitrages 1. Ordnung mittels der Projektionsmethode benötigt werden. In Kapitel 5.2 wird anhand der Projektionsmethode gezeigt, welche Methoden benötigt werden, um den QED-Beitrag 2. Ordnung zu berechnen.

### 5.1 Beitrag 1. Ordnung

Aus dem 1-Schleifen Feynman-Diagramm in Abb. 5.1 erhält man mit Hilfe der Feynman-Regeln der QED (vgl. A.1) für die Amplitude dieses Prozesses:

$$\mathcal{M} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}_{p_2} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}_2 + m)}{k_2^2 - m^2} (ie\gamma^\mu \epsilon(q)) \frac{i(\not{k}_1 + m)}{k_1^2 - m^2} (ie\gamma_\rho) \frac{-i\eta^{\nu\rho}}{k^2} u_{p_1} \quad (5.1)$$

Wenn man nur die Schleife, also den Wechselwirkungsprozess 1. Ordnung betrachtet, erhält man durch Vernachlässigung der äußeren Propagatoren die Vertexfunktion aus der Amplitude (vgl. Kapitel 2.2.2):

$$\bar{u}_{p_2} \Gamma^\mu(p_2, p_1) u_{p_1} = \bar{u}_{p_2} (-ie^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\rho (\not{k}_2 + m) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m) \gamma_\rho}{k^2 (k_2^2 - m^2) (k_1^2 - m^2)} u_{p_1} \quad (5.2)$$

In der weiteren Berechnung wird nur die Vertexfunktion  $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$  umgeformt, wobei zu beachten ist, dass links und rechts der Vertexfunktion die Dirac-Spinoren stehen.

### 5.1.1 Berechnung nach Schwinger

In diesem Kapitel wird aus der Vertexfunktion (5.2) der Beitrag zum anomalen magnetischen Moment analog zur Rechnung von Schwinger [4] bestimmt.

Nach Ausmultiplikation und Anwendung der Relationen für die Dirac-Matrizen (vgl. A.2) erhält man für die Vertexfunktion aus (5.2):

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{1\beta} k_{2\alpha} \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2m(k_2 + k_1)^\mu + m^2 \gamma^\mu}{k^2 (k_2^2 - m^2) (k_1^2 - m^2)} \quad (5.3)$$

Zur Vereinfachung des Nenners schreibt man diesen mit Hilfe der Feynman-Parametrisierung (vgl. A.5) in ein Polynom um:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p_2, p_1) = & 4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ & \times \frac{k_{1\beta} k_{2\alpha} \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2m(k_2 + k_1)^\mu + m^2 \gamma^\mu}{[x(k_2^2 - m^2) + y(k_1^2 - m^2) + zk^2]^3} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Aus der Impulserhaltung im Feynman-Diagramm in Abb. 5.1 folgt  $k_2 = q + p_1$  und  $k = p_1 - k_1$ . Damit folgt für die Vertexfunktion:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p_2, p_1) = & 4ie^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ & \times \frac{k_{1\beta} (q + k_1)_\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2m(q + 2k_1)^\mu + m^2 \gamma^\mu}{[k_1^2(x + y + z) + 2k_1(xq - zp_1) - (x + y)m^2 + xq^2 + zp_1^2]^3} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mit der Substitution  $k_1 \rightarrow k_1 - a$ ,  $a = xq - zp_1$ , werden die einzelnen Terme des Nenners quadratisch:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p_2, p_1) = & 4ie^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ & \times \frac{(k_1 - a)_\beta (q + k_1 - a)_\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2m(q + 2k_1 - 2a)^\mu + m^2 \gamma^\mu}{[k_1^2 + xq^2 + zp_1^2 - (x + y)m^2 - (xq - zp_1)^2]^3} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Jetzt betrachtet man den Zähler. Terme, die linear in  $k_1$  sind, liefern aufgrund der Antisymmetrie von  $k_1$  keine Beiträge. Ebenso liefern Terme, die proportional zu  $\gamma^\mu$  sind, keine Beiträge zum anomalen magnetischen Moment (vgl. Kapitel 2.2.2). Dadurch bleibt nur noch der erste Term und ein Teil des zweiten Terms des Zählers übrig:

$$\left[ \underbrace{k_{1\beta}q_\alpha}_{a)} + \underbrace{k_{1\beta}k_{1\alpha}}_{b)} - \underbrace{k_{1\beta}a_\alpha}_{a)} - \underbrace{a_\beta q_\alpha}_{c)} - \underbrace{a_\beta k_{1\alpha}}_{a)} + \underbrace{a_\beta a_\alpha}_{c)} \right] \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2m(q - 2a)^\mu \quad (5.7)$$

Nun betrachtet man die einzelnen Koeffizienten des  $\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha$ -Terms:

- a) Diese Terme liefern keinen Beitrag, da sie proportional zu  $\gamma^\mu$  sind. Dies sieht man durch geschickte Ausnutzung der Relationen für die Dirac-Matrizen:

$$\begin{aligned} k_{1\beta}q_\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha &= \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \overbrace{\frac{1}{4} \eta_{\rho\nu} \eta^{\rho\nu}}^{\mathbb{1}} k_{1\beta}q_\alpha = \frac{1}{4} \eta_{\rho\nu} \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu (k_1 \cdot q) \\ &= \frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu (k_1 \cdot q) = -\frac{1}{2} \gamma^\mu (k_1 \cdot q) \propto \gamma^\mu \end{aligned} \quad (5.8)$$

- b) Durch Nutzung der Antikommutator-Relation  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_{1\beta}k_{1\alpha} \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha &= \left[ -\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha + 2\eta^{\beta\mu} \gamma^\alpha \right] k_{1\beta}k_{1\alpha} \\ &= \underbrace{k_{1\beta}k_{1\alpha} 2\eta^{\beta\mu} \gamma^\alpha}_{1)} - \underbrace{k_{1\beta}k_{1\alpha} \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha}_{2)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Term 1) liefert keinen Beitrag, da er proportional zu  $\gamma^\mu$  ist:

$$\begin{aligned} k_{1\beta}k_{1\alpha} 2\eta^{\beta\mu} \gamma^\alpha &= 2\gamma^\alpha \eta^{\beta\mu} \overbrace{\frac{1}{4} \eta^{\beta\alpha} \eta_{\beta\alpha}}^{\mathbb{1}} k_{1\beta}k_{1\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\alpha \eta^{\beta\mu} \eta_{\beta\alpha} k_1^2 \propto \gamma^\mu \end{aligned} \quad (5.10)$$

Term 2) ist proportional zu  $\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha = \gamma^\mu \gamma^\beta \eta^{\alpha\beta} \gamma_\beta$ . Für  $\alpha = \beta$  ist dies proportional zu  $\gamma^\mu$  und trägt nicht zu  $a_l$  bei. Für  $\alpha \neq \beta$  gibt es keinen Beitrag, da  $\eta^{\alpha\beta} = 0$  ist (vgl. A.2).

- c) Diese Terme lassen sich nicht weiter vereinfachen und tragen zu  $a_l$  bei.

Wenn  $a = xq - zp_1$  eingesetzt wird, erhält man insgesamt für den zu  $a_l$  beitragenden Zähler:

$$\left( -(xq - zp_1)_\beta q_\alpha + (xq - zp_1)_\beta (xq - zp_1)_\alpha \right) \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2m(q - 2xq + 2zp_1)^\mu \quad (5.11)$$

Mit der Kinematik  $q = p_2 - p_1$  folgt dann:

$$A \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 + B \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 + C \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 + D \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 - 2m(Ep_1 + Fp_2)^\mu \quad (5.12)$$

Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 A &= -x - z + x^2 + 2xz + z^2 , \\
 B &= x + z - x^2 - xz , \\
 C &= x - x^2 - xz , \\
 D &= -x + x^2 , \\
 E &= -1 + 2x + 2z , \\
 F &= 1 - 2x .
 \end{aligned}$$

Da rechts und links der Vertexfunktion die Dirac-Spinoren stehen, ist der nächste Schritt, den Zähler so umzuschreiben, dass man die Dirac-Gleichung (2.20) und (2.21) anwenden kann. Für die Terme mit den Koeffizienten  $A$ ,  $C$  und  $D$  erfolgt dies durch Addition einer Null. Für die Terme mit den Koeffizienten  $A$  und  $D$  folgt:

$$\begin{aligned}
 & A\psi_1\gamma^\mu\psi_1 + D\psi_2\gamma^\mu\psi_2 \\
 = & A\psi_1\gamma^\mu\psi_1 + Am\psi_1\gamma^\mu - Am\psi_1\gamma^\mu + D\psi_2\gamma^\mu\psi_2 + Dm\gamma^\mu\psi_2 - Dm\gamma^\mu\psi_2 \\
 = & A\underbrace{\psi_1\gamma^\mu(\psi_1 - m)}_{\cdot u_{p_1} \Rightarrow 0} + Am\psi_1\gamma^\mu + \underbrace{(\psi_2 - m)D\gamma^\mu\psi_2}_{\bar{u}_{p_2} \cdot \Rightarrow 0} + Dm\gamma^\mu\psi_2 \\
 = & m\left(A\psi_1\gamma^\mu + D\gamma^\mu\psi_2\right) \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

Der Term mit dem Koeffizienten  $C$  liefert keinen Beitrag, da er proportional zu  $\gamma^\mu$  ist:

$$\begin{aligned}
 C\psi_2\gamma^\mu\psi_1 &= C\psi_2\gamma^\mu\psi_1 + Cm\gamma^\mu\psi_1 - Cm\gamma^\mu\psi_1 \\
 &= \underbrace{(\psi_2 - m)C\gamma^\mu\psi_1}_{\bar{u}_{p_2} \cdot \Rightarrow 0} + Cm\gamma^\mu\psi_1 \\
 &= Cm\gamma^\mu \underbrace{(\psi_1 - m)}_{\cdot u_{p_1} \Rightarrow 0} + Cm^2\gamma^\mu \\
 &= Cm^2\gamma^\mu \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Für den Term mit dem Koeffizienten  $B$  muss man die Dirac-Matrizen mit Hilfe der Antikommutator-Relation so vertauschen, dass sie in der richtigen Reihenfolge stehen

$$\begin{aligned}
 \gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha &= \gamma^\beta(2\eta^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha\gamma^\mu) = \dots \\
 &= 2\gamma^\beta\eta^{\mu\alpha} - 2\eta^{\beta\alpha}\gamma^\mu + 2\gamma^\alpha\eta^{\beta\mu} - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta , \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

um dann analog nach Addition einer Null die Dirac-Gleichung anwenden zu können:

$$\begin{aligned}
B\psi_1\gamma^\mu\psi_2 &= 2B\psi_1p_2^\mu - \underbrace{2Bp_{1\beta}p_2^\beta\gamma^\mu}_{\propto\gamma^\mu} + 2B\psi_2p_1^\mu - B\psi_2\gamma^\mu\psi_1 \\
&= 2Bp_2^\mu \underbrace{(\psi_1 - m)}_{\cdot u_{p_1} \Rightarrow 0} + \underbrace{(\psi_2 - m)}_{\bar{u}_{p_2} \Rightarrow 0} 2Bp_1^\mu - \underbrace{(\psi_2 - m)}_{\bar{u}_{p_2} \Rightarrow 0} B\gamma^\mu\psi_1 \\
&\quad - Bm\gamma^\mu\psi_1 + 2Bm(p_2^\mu + p_1^\mu) \\
&= 2Bm(p_2^\mu + p_1^\mu) - Bm\gamma^\mu \underbrace{(\psi_1 - m)}_{\cdot u_{p_1} \Rightarrow 0} - \underbrace{Bm^2\gamma^\mu}_{\propto\gamma^\mu} \\
&= 2Bm(p_2 + p_1)^\mu
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Der gesamte Zähler lautet nun:

$$m \left( A\psi_1\gamma^\mu + D\gamma^\mu\psi_2 \right) + 2mB(p_2 + p_1)^\mu - 2m(Ep_1 + Fp_2)^\mu \tag{5.17}$$

Mit den „Diracologie“-Relationen aus A.6 erhält man für den Zähler:

$$\begin{aligned}
&2mi\sigma^{\mu\nu}p_{1\nu}(A + B - E) + 2mi\sigma^{\mu\nu}p_{2\nu}(-D - B + F) \\
&= 2mi\sigma^{\mu\nu}p_{1\nu}(1 - 2x + xz - 2z + z^2) + 2mi\sigma^{\mu\nu}p_{2\nu}(1 - 2x + xz - z)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Jetzt betrachtet man den Nenner der Vertexfunktion aus Gleichung (5.6). Mit der Kinematik und den „on-shell“-Bedingungen

$$q^2 = 0, \quad q \cdot p_1 = 0, \quad p_2 \cdot p_1 = m^2 \quad \text{und} \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2 \tag{5.19}$$

folgt für den Nenner:

$$\begin{aligned}
\left[ k_1^2 + m^2z - (x + y)m^2 - m^2z^2 \right]^3 &= \left[ k_1^2 - m^2 \underbrace{(x + y - z + z^2)}_{1-z} \right]^3 \\
&= \left[ k_1^2 - m^2(1 - z)^2 \right]^3 \\
&= \left[ k_1^2 - \Delta \right]^3, \quad \Delta = m^2(1 - z)^2
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Durch die Substitution  $k_1 = \sqrt{\Delta}k_1$ ,  $d^4k_1 = \Delta^2 d^4k_1$ , wird der Nenner zu

$$\Delta^3 [k_1^2 - 1]^3. \tag{5.21}$$

Für die gesamte Vertexfunktion erhält man:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = 4ie^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_1^2 - 1]^3} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx$$

$$\times \frac{2mi\sigma^{\mu\nu} \left[ p_{1\nu}(1 - 2x + xz - 2z + z^2) + p_{2\nu}(1 - 2x + xz - z) \right]}{m^2(1 - z)^2} \quad (5.22)$$

Die Lösung der  $k_1$ -Integration wird in Kapitel 5.1.2 besprochen. Nach Gleichung (5.33) folgt

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_1^2 - 1]^3} = -\frac{i}{2(4\pi)^2} . \quad (5.23)$$

Mit Hilfe von Mathematica kann die  $x$ - und  $z$ -Integration gelöst werden. Als Endergebnis erhält man für die Vertexfunktion:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \frac{4e^2 mi\sigma^{\mu\nu} (p_2 - p_1)_\nu}{(4\pi)^2 4m^2}$$

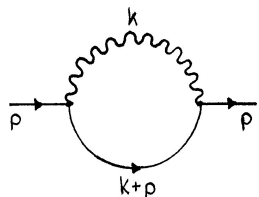
$$= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} , \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (5.24)$$

Vergleicht man dies mit (2.24) und (2.33) erhält man für den QED-Beitrag 1. Ordnung zum anomalen magnetischen Moment das berühmte Ergebnis von Schwinger:

$$a_l^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} . \quad (5.25)$$

### 5.1.2 Klassifizierung der Integrale

Bei der Berechnung von 1-Schleifen Feynman-Diagrammen treten Integrale vom Typ



$$\Rightarrow I(a, b) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2)^a ((k+p)^2 - m^2)^b} \quad (5.26)$$

auf. Um das Integral einfacher lösen zu können, wandelt man das Produkt im Nenner mit Hilfe der Feynman-Parametrisierung (vgl. A.5) in eine Summe um:

$$\begin{aligned}
 I(a, b) &= \\
 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{x_1^{a-1} x_2^{b-1}}{(x_1 k^2 + x_2 ((k+p)^2 - m^2))^{a+b}} \\
 &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_2)^{a-1} x_2^{b-1}}{(k^2 + 2x_2 k p)^{a+b}} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Dabei gilt allgemein die „on-shell“-Bedingung  $p^2 = m^2$ , die im zweiten Schritt benutzt wurde. Durch die Substitution  $k \rightarrow k - x_2 p$ ,  $dk \rightarrow dk$ , erhält man ein Integral, das unabhängig vom äußeren Impuls  $p$  ist

$$I(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_2)^{a-1} x_2^{b-1}}{(k^2 - x_2^2 m^2)^{a+b}}. \quad (5.28)$$

Man sieht, dass dadurch das  $k$ -Impulsintegral auf ein Integral der Form

$$I = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \alpha)^n} \quad (5.29)$$

gebracht werden kann. Dieses Integral ist für  $n \leq 2$  in  $D = 4$  Dimensionen divergent. Daher bedient man sich der dimensional Regularisierung (vgl. A.3 und [2, §2.3]). Man setzt  $D = 4 - 2\epsilon$ , wobei  $D$  so klein gewählt wird, dass das Integral konvergiert, und bildet anschließend den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$ . Die Divergenzen einzelner Integrale verschwinden so nicht, aber da man Summen von Integralen des selben Typs betrachtet, heben sich die divergenten Terme der einzelnen Integrale eventuell gegenseitig auf. Durch Ausführung der Wick-Rotation (vgl. A.7) kann das Integral (5.29) durch das  $D$ -dimensionale Kugelvolumen ausgedrückt werden [6, §7.5]:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \alpha)^n} &= \frac{i}{(-1)^n} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 + \alpha)^n} \\
 &= (-1)^n i \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk_E \frac{k_E^{D-1}}{(k_E^2 + \alpha)^n} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $d\Omega_D$  die Oberfläche der  $D$ -dimensionalen Einheitssphäre, gegeben durch

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (5.31)$$

Zur Lösung des  $k_E$ -Integrals wird die Substitution  $k_E \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{x} - \alpha}$  durchgeführt, um es auf die Form einer Beta-Funktion (vgl. A.4) zu bringen



$$\int_0^\infty dk_E \frac{k_E^{D-1}}{(k_E^2 + \alpha)^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^{n-\frac{n}{2}}} \int_0^1 dx x^{n-1-\frac{D}{2}} (1-x)^{\frac{D}{2}-1} . \quad (5.32)$$

Durch Anwenden der Definition der Beta-Funktion, kann man das  $x$ -Integral durch  $\Gamma$ -Funktionen ausdrücken und erhält insgesamt

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \alpha)^n} = (-1)^n i \frac{1}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\alpha^{n-\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} . \quad (5.33)$$

Hier erkennt man die Divergenz der Lösung für  $D = 4$  für  $n \leq 2$ , da die  $\Gamma$ -Funktion isolierte Pole bei  $\Gamma(z) \forall z \in [0, -1, -2, \dots]$  besitzt (vgl. [22, §7.2]).

Mit der Lösung der  $k$ -Integration aus Gleichung (5.33) erhält man für das Integral in Gleichung (5.28):

$$I(a, b) = \frac{(-1)^{a+b} i \Gamma(a + b - \frac{D}{2})}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{1}{m^{2a+2b-D}} \int_0^1 dx_2 (1-x_2)^{a-1} x_2^{-2a-b+D-1} \quad (5.34)$$

Das  $x$ -Integral kann wieder mit Hilfe der Beta-Funktion durch  $\Gamma$ -Funktionen ausgedrückt werden. Die Lösung des Integrals (5.26) ist somit

$$I(a, b) = \frac{(-1)^{a+b} i}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{m^{2a+2b-D}} \frac{\Gamma(a + b - \frac{D}{2}) \Gamma(D - 2a - b)}{\Gamma(b)\Gamma(D - a - b)} . \quad (5.35)$$

Wichtige Anwendungen und Spezialfälle der Lösung (5.35), die in dieser Arbeit genutzt werden, sind:

### 1. Skalarprodukte kürzen

Im Zähler des Integrals (5.26) können auch Skalarprodukte  $p \cdot k$  auftreten. Durch Umschreiben dieser in

$$p \cdot k = \frac{1}{2} \left[ (k+p)^2 - m^2 - k^2 \right] \quad (5.36)$$

kann das Integral auf eine Summe der Integrale der Form (5.26) zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} (p \cdot k) I(a, b) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p \cdot k}{(k^2)^a ((k+p)^2 - m^2)^b} \\ &= \frac{1}{2} [I(a, b-1) - I(a-1, b)] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Für höhere Potenzen der Skalarprodukte gilt dies analog.  
Bei der Umformung nutzt man dabei aus, dass gilt

$$k^2 I(a, b) = I(a - 1, b) . \quad (5.38)$$

## 2. Negative Exponenten

Durch die Umformungen in Gleichung (5.37) und (5.38) können Exponenten verschwinden, bzw. negative Exponenten in  $I(a, b)$  auftreten.

Für  $b = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} I(a, 0) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2)^a} = \frac{(-1)^a i}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{m^{2a-D}} \frac{\Gamma(a - \frac{D}{2}) \Gamma(D - 2a)}{\Gamma(0) \Gamma(D - a)} \\ &= 0 \quad \forall a \end{aligned} \quad (5.39)$$

Dies ist zu erkennen, indem man ausnutzt, dass die  $\Gamma$ -Funktion als  $\Gamma(n) = (n-1)!$  geschrieben werden kann (vgl. A.4). Es folgt dann

$$\frac{1}{\Gamma(b)} \Big|_{b=0} = \frac{b}{b\Gamma(b)} \Big|_{b=0} = \frac{b}{\Gamma(b+1)} \Big|_{b=0} = \frac{b}{b!} \Big|_{b=0} = 0 \quad (5.40)$$

Für  $b < 0$  folgt analog (vgl. [2, §2.3])

$$I(a, b < 0) = 0 \quad \forall a . \quad (5.41)$$

Mögliche Divergenzen der Lösung des Integrals  $I(a, b \leq 0)$  spielen hier keine Rolle, da der Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  zuletzt gebildet wird.

Des Weiteren können auch Integrale  $I(a \leq 0, b)$  auftreten.

Für  $a = 0$  folgt:

$$I(0, b) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k+p)^2 - m^2)^b} = \frac{(-1)^b i}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{m^{2b-D}} \frac{\Gamma(b - \frac{D}{2})}{\Gamma(b)} \quad (5.42)$$

Das im 1-Schleifen-Fall relevante Integral mit negativen Exponenten  $a$  ist  $I(-1, b)$ . Mit der Substitution  $k \rightarrow k - p$  folgt

$$I(-1, b) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-p)^2}{(k^2 - m^2)^b} . \quad (5.43)$$

Durch die Addition einer Null zu  $k^2 = (k^2 - m^2) + m^2$  folgt

$$\begin{aligned} I(-1, b) &= I(0, b-1) + 2m^2 I(0, b) - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{2k \cdot p}{(k^2 - m^2)^b} \\ &= I(0, b-1) + 2m^2 I(0, b) , \end{aligned} \quad (5.44)$$

wobei das Integral mit dem Skalarprodukt aufgrund der Antisymmetrie in  $k$  verschwindet.

### 5.1.3 1-Schleifen Rekursionsrelationen

Durch die Umformung bei negativen Exponenten  $a$  im Integral  $I(a, b)$  erkennt man, dass man alle Integrale  $I(a \leq 0, b)$  durch Linearkombinationen von Integralen  $I(0, b)$  ausdrücken kann, wobei  $b$  beliebig ist. Durch partielle Integration erhält man Rekursionsrelationen, wodurch auch Integrale  $I(a > 0, b \geq 0)$  auf Integrale  $I(0, b)$  zurückgeführt werden können. Vor allem bei der Berechnung von Integralen höherer Ordnungen ist diese Vorgehensweise sehr wichtig (vgl. Kapitel 5.2.2), da man mit Hilfe der Rekursionsrelationen komplizierte Integrale auf einfachere zurückführen kann. Deswegen wird dieses Vorgehen an dem 1-Schleifen Integral exemplarisch vorgeführt.

Durch partielle Integration von (5.26) erhält man [2, §2.3]

$$0 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{l_\mu}{(k^2)^a ((k+p)^2 - m^2)^b} , \quad (5.45)$$

wobei  $l \in \{k, p\}$ . Es ist üblich  $l = k$  zu wählen. Dadurch erhält man die Gleichung

$$(D - 2a - b) I(a, b) - b I(a - 1, b + 1) = 0 , \quad (5.46)$$

mit der zwei Integrale mit verschiedenen Werten für  $a$  in Verbindung gesetzt werden. Durch Auflösen von (5.46) nach  $I(a, b)$  kann der Exponent  $a$  um eins reduziert werden. Durch mehrfache Anwendung dieser Rekursionsrelation können so alle Integrale  $I(a > 0, b \geq 0)$  auf Integrale  $I(0, b)$  zurückgeführt werden. Es bleiben nur noch Integrale  $I(0, b)$  übrig. Nach der Verschiebung des Impulses um  $k \rightarrow k - p$ , um ein Integral zu erhalten, das unabhängig vom äußeren Impuls ist, erhält man

$$I(0, b) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2)^b} . \quad (5.47)$$

Es wurde bereits gezeigt, dass dieses Integral lösbar ist (vgl. (5.30)). Jetzt soll aber gezeigt werden, dass man es mit Hilfe der partiellen Integration auf das Integral  $I(0, 1)$

zurückführen kann. Durch partielle Integration von (5.47) erhält man

$$(d - 2b) I(0, b) + 2bm^2 I(0, b + 1) = 0 . \quad (5.48)$$

Wenn man diese Gleichung nach  $I(0, b + 1)$  auflöst, erhält man eine Rekursionsrelation, mit der man den Exponenten  $b$  um eins reduzieren kann.

Auf diese Weise kann man mit Hilfe der Rekursionsrelationen aus der partiellen Integration alle Integrale  $I(a, b)$  auf das Integral  $I(0, 1)$  zurückführen. Als Ergebnis für das Integral  $I(0, 1)$  erhält man nach Gleichung (5.30) und (5.33):

$$I(0, 1) = \frac{m^{D-2}}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (5.49)$$

Wendet man diese Methode auf die Integrale an, die in der Berechnung zum anomalen magnetischen Moment zur 1. Ordnung auftreten, lässt sich  $a_l^{(1)}$ ,  $l \in \{e, \mu, \tau\}$ , ausdrücken als (vgl. [2, §2.3])

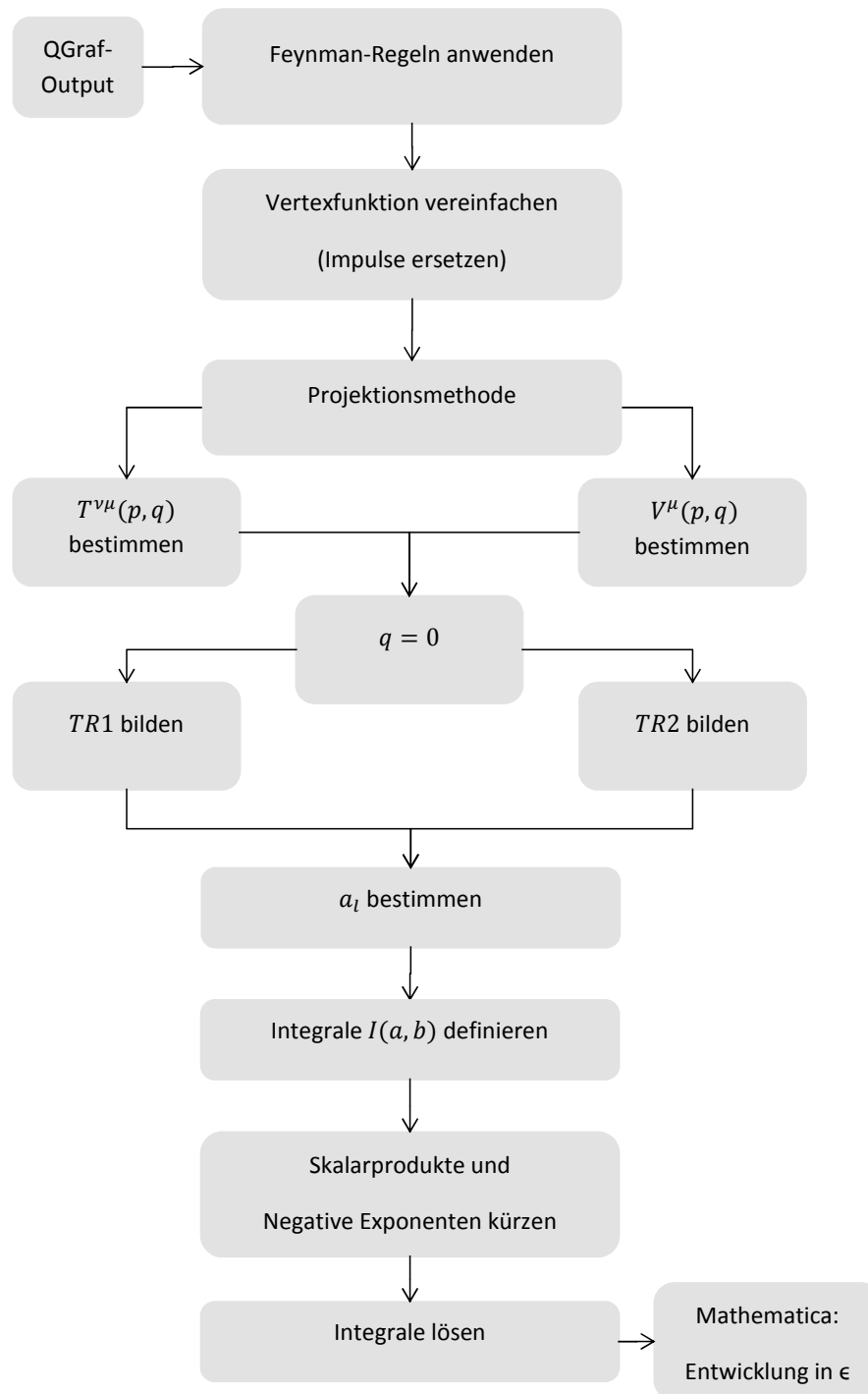
$$a_l^{(1)} = -\frac{\alpha (D - 5)(D - 2)(D - 4)}{\pi} \frac{2^D \pi^{\frac{D}{2}} I(0, 1)}{8(D - 3) (4\pi)^{\frac{D-4}{2}} m^2} . \quad (5.50)$$

Nach Einsetzen von  $D = 4 - 2\epsilon$  erhält man im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  ebenfalls

$$a_l^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} . \quad (5.51)$$

#### 5.1.4 Computergestützte Berechnung via Projektionsmethode

Auf der folgenden Seite sieht man den Programmablaufplan des Programms zur Berechnung des 1-Schleifen QED-Beitrages zum anomalen magnetischen Moment. Zur Programmierung wurde die Programmiersprache FORM verwendet. Im Weiteren werden besondere Programmteile erklärt.



### QGraf

QGraf ist ein Programm, welches zu einer gegebenen Anzahl an Vertices alle möglichen Verbindungsmöglichkeiten dieser angibt. Für drei Vertices der QED liefert QGraf nur folgende Möglichkeit:

```
[diag1] =
-vrtx(el(-1,p1),ph(3,k1-p1),po(1,-k1))*
vrtx(el(2,k1),ph(-3,p3),po(5,-k1-p3))*
vrtx(el(6,k1+p3),ph(4,-k1+p1),po(-2,-p2))*
prop(po(1,-k1),el(2,k1))*
prop(po(5,-k1-p3),el(6,k1+p3))*
prop(ph(3,k1-p1),ph(4,-k1+p1))
```

Mit „*vrtx*“ werden die Vertices bezeichnet und „*prop*“ gibt an, welche Vertices verbunden werden. Man erkennt, dass *[diag1]* gerade das Feynman-Diagramm aus Abb. 5.1 darstellt, wobei die internen Impulse von QGraf anders benannt wurden.

### Projektionsmethode

Für die Projektionsmethode müssen die Impulse wie folgt verschoben werden (vgl. Kapitel 2.2.3):

$$q = p_2 - p_1, \quad P = p_1 + p_2, \quad p = \frac{P}{2} \quad (5.52)$$

Wobei  $p_1$  der Impuls des einlaufenden Teilchens,  $p_2$  der Impuls des auslaufenden Teilchens und  $q$  der des externen Photons ist. Die Schleifen-Impulse verschiebt man so, dass sie nur noch von  $k$  und den äußeren Impulsen  $p$  und  $q$  abhängen. Dabei ist  $k$  der Impuls des virtuellen Photons, über den integriert wird. Bei der Verschiebung der Impulse verwendet man die Impulserhaltung an jedem Vertex. So erhält man eine Vertexfunktion, die nur noch von den Impulsen  $q$ ,  $p$  und  $k$  abhängt:

```
[diag1]=
+G(-k,0)*G(-1/2*q-p-k,Me)*G(-1/2*q+p+k,Me)*(-lepline(m3,kMe+1/2*q
+p+k,me3,kMe-1/2*q+p+k,m3))
```

Dabei stellen die Funktionen

$$G(k, Me) = \frac{1}{(k^2 - Me^2)^2} \quad (5.53)$$

den Nenner dar und *lepline* den Zähler

$$\begin{aligned} & lepline(m3, kMe + 1/2 * q + p + k, me3, kMe - 1/2 * q + p + k, m3) \\ & = \gamma^{m3} \left( kMe + \frac{1}{2}q + p + k \right) \gamma^{me3} \left( kMe - \frac{1}{2}q + p + k \right) \gamma^{m3} . \end{aligned} \quad (5.54)$$

### $T^{\nu\mu}(p)$ und $V^\mu(p)$ bestimmen

Man bestimmt  $T^{\nu\mu}(p)$  aus der Vertexfunktion, indem man diese nach dem äußeren Impuls  $q_\nu$  ableitet:

$$T^{\nu\mu}(p) = \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Gamma^\mu(P, q) |_{q=0} \quad (5.55)$$

Im Programm wurde dies durch Multiplikation der Vertexfunktion mit einem Faktor  $dq$  von links umgesetzt, der die Ableitung darstellt. Die Funktion  $lepline$  wurde als nicht kommutierend definiert und die Funktion  $G$  wird durch die Funktion  $[G]$  ersetzt, die als nicht kommutierend definiert ist. Anschließend vertauscht man  $dq$  mit  $G$  und  $lepline$ . Um die Funktion  $lepline$  abzuleiten, wird diese zuerst vereinfacht, indem man die Summen im Argument von  $lepline$  aufteilt. Diese Vorgehensweise wird auch benötigt, um  $lepline$  in Dirac-Matrizen umschreiben zu können, über die man die Spur bildet.

```
f [G], dq, f;
L T=[diag1];

#message T is derivative of [diag] with respect to q(nu)
* derivate T

id G(?a)=[G](?a);

Multiply left dq;
.sort

repeat id dq*[G](p?,?b) = -([G](p,?b)^2)*2*p(nu)*f(p)+[G](p,?b)*dq;

argument f;
id q?{k,p}=0;
endargument;

id f(0)=0;
id f(-1/2*q)=-1/2;
id f(?a)=1/(1-1); *stops if there is any f left
.sort
```

```

** have to split args like p+k to make g_ happy
id lepline?{leploop,lepline}(?a)=lepline(?a,xi);
repeat id lepline?{leploop,lepline}(m1?,?a)=lepline(?a,m1);
id lepline?{leploop,lepline}(xi,?a)=lepline(?a);
** undo vector-mass trick: call kMe Me
repeat id lepline?{leploop,lepline}(?a,kMe,?c)=Me*lepline(?a,?c);

id dq*lepline(?a,q,?b,q,?c)=lepline(?a,nu,?b,q,?c)+lepline(?a,q,?b,nu,?c);
id dq*lepline(?a, q, ?b)=lepline(?a,nu,?b);

id dq=0;

id [G](?a)=G(?a);

```

Im nächsten Schritt wird  $V^\mu(p)$  deklariert. Anschließend wird in  $T^{\nu\mu}$  und  $V^\mu q = 0$  gesetzt. Dann werden die Spuren  $TR1$  und  $TR2$  über die Dirac-Matrizen von  $T^{\nu\mu}$  und  $V^\mu$  gebildet (vgl. (2.35)). Nach der Formel (2.35) wird aus  $TR1$  und  $TR2$  das anomale magnetische Moment  $a_l$  bestimmt.

### Mathematica

Nach der Definition der Integrale  $I(a, b)$ , wobei die erste Zahl im Argument von  $G$  die Potenz ist,

```
id G(s1?,k,0)*G(s2?,p+k,Me)=I(s1,s2);
```

werden die Skalarprodukte und negativen Exponenten wie in Kapitel 5.1.2 beschrieben gekürzt. Mit Hilfe von Mathematica bildet man in der bekannten Lösung (5.35) der Integrale  $I(a, b)$  den Limes der dimensional Regularisierung  $\epsilon \rightarrow 0$  und erhält, nach Multiplikation der Vorfaktoren, das bekannte Ergebnis

$$a_l^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} . \quad (5.56)$$



## 5.2 Beitrag 2. Ordnung

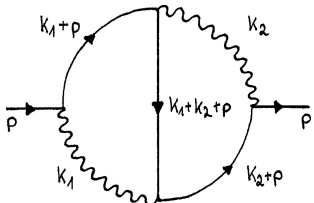
Zum 2-Schleifen QED-Beitrag des anomalen magnetischen Moments tragen die Diagramme aus Abb. 3.2 bei. Diese Diagramme lassen sich mit QGraf für fünf Vertices in der gleichen Reihenfolge wie in Abb. 3.2 reproduzieren. Wandelt man den QGraf-Output mit Hilfe der Feynman-Regeln (vgl. A.1) in die Streuamplitude um, so erkennt man, dass sich die Diagramme aus Abb. 3.2 2) und Abb. 3.2 3) nur im Vorzeichen unterscheiden und somit, wie in Kapitel 3.1.2 erklärt, keinen Beitrag liefern.

Bevor die Besonderheiten des Programms zur Berechnung der 2-Schleifen QED-Beiträge zum anomalen magnetischen Moment genauer erklärt werden, werden die in der Berechnung benötigten strukturellen und mathematischen Grundlagen dargelegt.

### 5.2.1 Klassifizierung der Integrale

Bei der Berechnung von 2-Schleifen Feynman-Diagrammen treten Integrale auf, die in zwei Integralklassen unterteilt werden können:

1. *Integrale mit drei massiven und zwei masselosen Propagatoren*



$$\Rightarrow N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

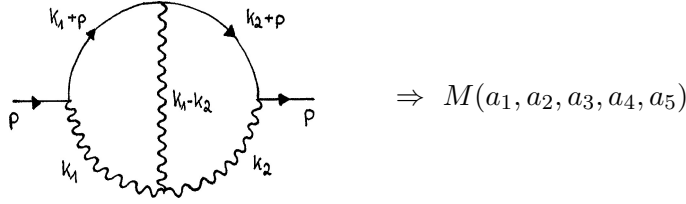
$$= \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D}$$

$$\times \frac{1}{(k_1^2)^{a_1} (k_2^2)^{a_2} ((k_1 + p)^2 - m^2)^{a_3} ((k_2 + p)^2 - m^2)^{a_4} ((k_1 + k_2 + p)^2 - m^2)^{a_5}}$$
(5.57)

Dieses Integral ist symmetrisch unter einer 180° Drehung der Schleife, d.h. unter gleichzeitigem Austausch der zwei massiven Propagatoren  $k_1 + p$  und  $k_2 + p$ , der Kürze halber im Weiteren mit den Exponenten  $a_3$  und  $a_4$  bezeichnet, und der zwei masselosen Propagatoren  $a_1$  und  $a_2$ :

$$N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = N(a_2, a_1, a_4, a_3, a_5) \quad (5.58)$$

2. Integrale mit zwei massiven und drei masselosen Propagatoren

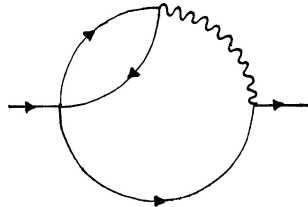


$$= \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_1^2)^{a_1} (k_1 - k_2)^{2a_2} (k_2^2)^{a_3} ((k_1 + p)^2 - m^2)^{a_4} ((k_2 + p)^2 - m^2)^{a_5}} \quad (5.59)$$

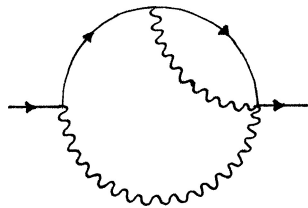
Dieses Integral ist symmetrisch unter einer vertikalen Spiegelung der Schleife an dem internen Photonpropagator, d.h. unter gleichzeitigem Austausch der zwei massiven Propagatoren  $a_4$  und  $a_5$  und der zwei masselosen Propagatoren  $a_1$  und  $a_3$ :

$$M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = M(a_3, a_2, a_1, a_5, a_4) \quad (5.60)$$

Die Integrale, die aus den Feynman-Diagrammen aus Abb. 3.2 1), 5) und 6) folgen, gehören der Integralklasse  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  an. Es können auch Integrale mit weniger Propagatoren auf die Integralklassen  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  und  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  zurückgeführt werden. Die Feynman-Diagramme aus Abb. 3.2 2), 3) und 9) besitzen drei massive und nur einen masselosen Propagator



und spiegeln somit Integrale vom Typ  $N(0, a_2, a_3, a_4, a_5)$  wider. Die Feynman-Diagramme aus Abb. 3.2 4), 7) und 8) besitzen zwei massive und zwei masselose Propagatoren.



Sie können sowohl als Integral  $N(a_1, a_2, a_3, 0, a_5)$  als auch als Integral  $M(a_1, a_2, 0, a_4, a_5)$  geschrieben werden. Man erkennt, dass die zwei Integralklassen über

$$N(a_1, a_2, a_3, 0, a_5) = M(a_1, a_2, 0, a_3, a_5) \quad (5.61)$$

zusammenhängen, wenn man den Impuls  $k_2 \rightarrow k_2 - k_1$  in  $N(a_1, a_2, a_3, 0, a_5)$  verschiebt. In der Berechnung ist es günstig diese Diagramme als Integrale vom Typ  $M(a_1, a_2, 0, a_4, a_5)$  zu schreiben, da diese auf einfachere Integrale zurückzuführen sind. Dies wird im folgendem Kapitel beschrieben.

### 5.2.2 2-Schleifen Rekursionsrelationen

Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man die Identität (vgl. [23])

$$\int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{\partial}{\partial k^\mu} [q^\mu f(k_1, k_2, p)] = 0, \quad (5.62)$$

wobei  $k \in \{k_1, k_2\}$ ,  $q \in \{k_1, k_2, p\}$  und  $f$  allgemein eine skalare Funktion in  $k_1$ ,  $k_2$  und  $p$  sein kann und hier  $f \in \{N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\}$  ist. Mit Hilfe dieser Identität erhält man jeweils sechs Rekursionsrelationen für  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  und  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ .

Für  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  folgen diese Rekursionsrelationen:

$$(2a_1 + a_3 + a_5 - D + a_3 \mathbf{3}^+ \mathbf{1}^- + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{1}^- - \mathbf{4}^-]) \cdot N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.63)$$

$$(a_5 - a_3 + a_1 \mathbf{1}^+ [\mathbf{5}^- - \mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-] + a_3 \mathbf{3}^+ [\mathbf{5}^- - \mathbf{2}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^-]) \cdot N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.64)$$

$$(2a_2 + a_4 + a_5 - D + a_4 \mathbf{4}^+ \mathbf{2}^- + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^-]) \cdot N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.65)$$

$$(a_5 - a_4 + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{5}^- - \mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-] + a_4 \mathbf{4}^+ [\mathbf{5}^- - \mathbf{1}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{1}^- - \mathbf{4}^-]) \cdot N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.66)$$

$$(a_3 - a_1 + a_1 \mathbf{1}^+ \mathbf{3}^- + a_3 \mathbf{3}^+ [2 - \mathbf{1}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [2 + \mathbf{3}^- + \mathbf{4}^- - \mathbf{1}^- - \mathbf{2}^-]) \cdot N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.67)$$

$$(a_4 - a_2 + a_2 \mathbf{2}^+ \mathbf{4}^- + a_4 \mathbf{4}^+ [2 - \mathbf{2}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [2 + \mathbf{4}^- + \mathbf{3}^- - \mathbf{2}^- - \mathbf{1}^-]) \cdot N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.68)$$

Für  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  folgen analog diese Rekursionsrelationen:

$$(2a_1 + a_2 + a_4 - D + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{1}^- - \mathbf{3}^-] + a_4 \mathbf{4}^+ \mathbf{1}^-) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.69)$$

$$(a_2 - a_1 + a_1 \mathbf{1}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^-] + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{3}^- - \mathbf{1}^-] + a_4 \mathbf{4}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{1}^- - \mathbf{5}^-]) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.70)$$

$$(2a_3 + a_2 + a_5 - D + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{3}^- - \mathbf{1}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ \mathbf{3}^-) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.71)$$

$$(a_2 - a_3 + a_3 \mathbf{3}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{1}^-] + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{1}^- - \mathbf{3}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-]) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.72)$$

$$(a_4 - a_1 + a_1 \mathbf{1}^+ \mathbf{4}^- + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{4}^- + \mathbf{3}^- - \mathbf{1}^- - \mathbf{5}^-] + a_4 \mathbf{4}^+ [2 - \mathbf{1}^-]) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.73)$$

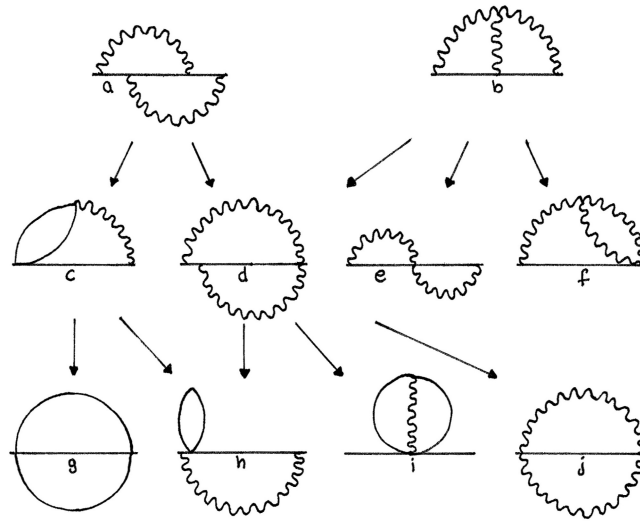
$$(a_5 - a_3 + a_3 \mathbf{3}^+ \mathbf{5}^- + a_2 \mathbf{2}^+ [\mathbf{5}^- + \mathbf{1}^- - \mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [2 - \mathbf{3}^-]) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.74)$$

Dabei bedeutet  $\mathbf{1}^\pm N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \equiv N(a_1 \pm 1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  usw. Zur Vereinfachung wurde in den Rekursionsrelationen die Masse  $m = 1$  gesetzt und muss anschließend in der Berechnung nach der Rekursion noch multipliziert werden. Jeweils zwei weitere Rekursionsrelationen können durch Differentiation nach  $p$  erhalten werden.

Mit Hilfe der Rekursionsrelation (5.65) für  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  und der Rekursionsrelation [23]

$$(2a_2 + a_1 + a_4 - D + a_1 \mathbf{1}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{3}^-] + a_4 \mathbf{4}^+ [\mathbf{2}^- - \mathbf{5}^-]) \cdot M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0 \quad (5.75)$$

für  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ , welche man durch Addition der Rekursionsrelationen (5.69) und (5.70) erhält, lassen sich die meisten Integrale auf einfachere Integrale zurückführen. Der schematische Ablauf der Rekursion der Integralklassen  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  und  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  mit Hilfe der Rekursionsrelationen (5.65) und (5.75) ist in Abb. 5.2a und 5.2b dargestellt. Diagramm 5.2a wird mit der Rekursionsrelation (5.65) auf die Diagramme 5.2c und 5.2d zurückgeführt. Über die Beziehung (5.61) können die Diagramme 5.2d auf  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  Integrale zurückgeführt werden. Diagramm 5.2b



**Abb. 5.2:** Schematische Darstellung der Rekursion der Integrale vom Typ a)  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  und b)  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

wird mit der Rekursionsrelation (5.75) auf die Diagramme 5.2d, 5.2e und 5.2f zurückgeführt. Die Diagramme 5.2e und 5.2f sind Produkte von 1-Schleifen Diagrammen und können gelöst werden. Diagramm 5.2c ist invariant unter Austausch der zwei oberen massiven Linien:  $N(0, a_2, a_3, a_4, a_5) = N(0, a_2, a_5, a_4, a_3)$ . Unter Ausnutzung dieser Symmetrie und mehrfacher Anwendung der Rekursionsrelation (5.65) erhält man die Diagramme 5.2g und 5.2h. Durch Anwendung der Rekursionsrelation (5.75) auf Diagramm 5.2d kann dieses auf die Diagramme 5.2h, 5.2i und 5.2j zurückgeführt werden.

### 5.2.3 Masterintegrale

Nach der Rekursion bleiben die Masterintegrale 5.2e bis 5.2j aus Abb. 5.2 übrig. Bei deren Lösung werden die Symmetrien der Integralklassen (5.58) und (5.60) berücksichtigt.

#### 1. Integral 5.2e

Das Integral aus diesem Diagramm stellt ein Produkt von zwei 1-Schleifen Integralen dar:

$$M(a_1, 0, a_3, a_4, a_5) = I(a_1, a_4)I(a_3, a_5) \quad (5.76)$$

Auch hier besteht eine triviale Verbindung zwischen den Integralklassen:

$$N(a_1, a_2, a_3, a_4, 0) = M(a_1, 0, a_2, a_3, a_4) \quad (5.77)$$

Die Lösung der Integrale  $I(a, b)$  ist aus Gleichung (5.35) bekannt.

2. *Integral 5.2f*

Dieses Integral lässt sich auch auf eine Kombination von zwei 1-Schleifen Integralen zurückführen (vgl. [23]). Dieses Integral kommt jedoch in der Rekursion der 2-Schleifen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment nicht vor, da kein Diagramm 2. Ordnung mit drei masselosen Propagatoren existiert (vgl. Abb. 3.2). Daher wird auf die Lösung nicht weiter eingegangen.

3. *Integral 5.2g: Das Sunset-Diagramm*

Das Sunset-Diagramm repräsentiert Integrale vom Typ  $N(0, 0, a_3, a_4, a_5)$ . Diese Integrale lassen sich nicht einfach lösen. Das Ziel ist es daher, diese Integrale auf Produkte von zwei 1-Schleifen Integralen und einem bekannten 2-Schleifen Integral zurückzuführen.

Dies erfolgt mit Hilfe der zwei Rekursionsrelationen [23]

$$\begin{aligned} & a_3 N(-1, 0, a_3 + 1, a_4, a_5) \\ &= [2D - a_3 - 2a_4 - 2a_5 - 2a_4 \mathbf{4}^+ - 2a_5 \mathbf{5}^+] N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) , \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} & \left( a_3 + a_4 + a_5 - \frac{3D}{2} \right) N(-1, 0, a_3, a_4, a_5) \\ &= \left( 2a_3 + a_4 + a_5 - 2D + a_4 \mathbf{4}^+ [\mathbf{3}^- - \mathbf{5}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-] \right. \\ & \left. + \left[ a_3 + a_4 + a_5 - \frac{3D}{2} \right] \mathbf{3}^+ \right) N(0, 0, a_3, a_4, a_5) , \end{aligned} \quad (5.79)$$

die man durch Kombination der acht Rekursionsrelationen für  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  erhält. Nach Verschiebung von  $a_3 \rightarrow a_3 - 1$  in der Rekursionsrelation (5.78) und Eliminierung von  $N(-1, 0, a_3, a_4, a_5)$  durch Einsetzen von (5.78) in (5.79) erhält man die Gleichung

$$0 = \sum_i P_i(D, a_3, a_4, a_5) O_i(\mathbf{3}^\pm, \mathbf{4}^\pm, \mathbf{5}^\pm) N(0, 0, a_3, a_4, a_5) . \quad (5.80)$$

Dabei sind die  $P_i$  rationale Funktionen der Dimension  $D$  und der Exponenten  $a_3, a_4$  und  $a_5$  und die  $O_i$  Operatoren, die Kombinationen der Operatoren  $\mathbf{3}^\pm, \mathbf{4}^\pm$  und  $\mathbf{5}^\pm$  enthalten. Mit Gleichung (5.80) kann man Integrale vom Typ  $N(0, 0, a_3, a_4, a_5)$  mit verschiedenen Exponenten  $a_3, a_4$  und  $a_5$  in Verbindung setzen und so auf Produkte von zwei 1-Schleifen Integralen  $I(0, 1)^2$  und das bekannte 2-Schleifen Integral  $N(0, 0, 1, 1, 1)$  zurückführen. Dies macht man mit Hilfe des Laporta-Algorithmus. Die Idee des Laporta-Algorithmus ist es Tupel  $\{a_3, a_4, a_5\}$  in Gleichung (5.80) einzusetzen und nach dem schwersten Integral umzuformen. In die so erhaltene Gleichung setzt man dann das Tupel  $\{a_3, a_4, a_5\}$  ein und hat das gesuchte Integral auf diese Weise durch leichtere Integrale ausgedrückt.

Dieses Vorgehen wiederholt man mit allen möglichen Tupeln  $\{a_3, a_4, a_5\}$  zu einer bestimmten Tupelsumme  $s = a_3 + a_4 + a_5$  und anschließend zur nächstniedrigeren Tupelsumme usw., wobei berücksichtigt wird, dass das Integral  $N(0, 0, a_3, a_4, a_5)$  invariant unter Permutation von  $a_3, a_4$  und  $a_5$  ist. Auf diese Weise lassen sich die Integrale  $N(0, 0, a_3, a_4, a_5)$  ausdrücken als

$$N(0, 0, a_3, a_4, a_5) = P_1(D)N(0, 0, 1, 1, 1) + P_2(D) \underbrace{N(0, 0, 0, 1, 1)}_{I(0,1)^2}, \quad (5.81)$$

wobei  $P_1(D)$  und  $P_2(D)$  wieder rationale Funktionen von  $D$  sind. Auf die genauere Beschreibung des Laporta-Algorithmus wird hier verzichtet, da dieser nicht angewendet wird, sondern mit dem im Rahmen dieser Arbeit angefertigten Programm nur auf die Anwendung hingearbeitet wurde. Die genaue Beschreibung findet man in [24].

Die Entwicklung des Integrals  $N(0, 0, 1, 1, 1)$  in  $\epsilon = \frac{4-D}{2}$  ist bekannt und liefert [2, §2.4]

$$N(0, 0, 1, 1, 1) = \Gamma(1 + \epsilon)^2 m^{2-4\epsilon} \left[ -\frac{3}{2\epsilon^2} - \frac{17}{4\epsilon} - \frac{59}{8} + \left( -\frac{4\pi^2}{3} - \frac{65}{16} \right) \epsilon + \left( 8\pi^2 \ln(2) - 28\zeta(3) + \frac{1117}{32} - \frac{26\pi^2}{3} \right) \epsilon^2 \right]. \quad (5.82)$$

Ein anderer Lösungsansatz ist, das Integral  $N(0, 0, 1, 1, 1)$  mit Hilfe der Rekursionsrelationen aus Kapitel 5.2.2 auf das analytisch bekannte Integral [25]

$$N(1, 1, 1, 1, 1) = \pi^2 \ln(2) - \frac{3}{2}\zeta(3) \quad (5.83)$$

und andere bekannte Masterintegrale zurückzuführen (vgl. [23]).

#### 4. Integral 5.2h

Durch Verschiebung der Impulse lässt sich dieses Integral mit einem masselosen und zwei massiven Propagatoren als ein Produkt von zwei 1-Schleifen Integralen schreiben:

$$N(0, a_2, 0, a_4, a_5) \stackrel{k_1 \rightarrow k_1 - k_2}{=} M(0, 0, a_2, a_5, a_4) = I(a_2, a_4)I(0, a_5) \quad (5.84)$$

5. Integral 5.2i

Die Lösung dieses Integrals ist bekannt [23]:

$$\begin{aligned}
 & N(0, a_2, a_3, 0, a_5) \stackrel{k_2 \rightarrow k_2 - k_1}{=} M(0, a_2, 0, a_3, a_5) \\
 & = (-1)^{a_2 + a_3 + a_5 + 1} \frac{\Gamma(a_2 + a_3 - \frac{D}{2}) \Gamma(a_2 + a_5 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - a_2) \Gamma(a_2 + a_3 + a_5 - D)}{\Gamma(a_3) \Gamma(a_5) \Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(2a_2 + a_3 + a_5 - D)}
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

6. Integral 5.2j

Dieses Integral mit einem massiven und zwei masselosen Propagatoren kann in eine  $k_1$ - und eine  $k_2$ -Integration unterteilt werden, wobei die  $k_2$ -Integration auch von  $k_1$  abhängt:

$$\begin{aligned}
 & N(a_1, a_2, 0, 0, a_5) \stackrel{k_1 \rightarrow k_1 - k_2}{=} M(0, a_1, a_2, a_5, 0) \\
 & = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k_1 + p)^2 - m^2)^{a_5}} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_1 - k_2)^{2a_1} (k_2^2)^{a_2}}
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

Die  $k_2$ -Integration kann nach Feynman-Parametrisierung (vgl. A.5) und Wick-Rotation (vgl. A.7) analog zum Integral  $I(a, b)$  in Kapitel 5.1.2 mit Hilfe der Beta-Funktion gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_1 - k_2)^{2a_1} (k_2^2)^{a_2}} \\
 & = \frac{1}{(k_1^2)^{a_1 + a_2 - \frac{D}{2}}} \frac{(-1)^{\frac{D}{2}} i \Gamma(a_1 + a_2 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - a_1) \Gamma(\frac{D}{2} - a_2)}{2^D \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \Gamma(D - a_1 - a_2)}
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Anschließend hat die  $k_1$ -Integration wieder die bekannte Form  $I(a, b)$ . Als Lösung des gesamten Integrals folgt

$$\begin{aligned}
 M(0, a_2, a_3, a_4, 0) & = \frac{(-1)^{a_2 + a_3 + a_4 + 1}}{(4\pi)^D (m^2)^{a_2 + a_3 - D}} \frac{\Gamma(a_2 + a_3 - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - a_2) \Gamma(\frac{D}{2} - a_3)}{\Gamma(a_2) \Gamma(a_3) \Gamma(a_4)} \\
 & \times \frac{\Gamma(a_2 + a_3 + a_4 - D) \Gamma(2D - 2a_2 - 2a_3 - a_4)}{\Gamma(D - a_2 - a_3) \Gamma(\frac{3D}{2} - a_2 - a_3 - a_4)}.
 \end{aligned} \tag{5.88}$$



### 5.2.4 Skalarprodukte und negative Exponenten kürzen

Auch bei der Berechnung von 2-Schleifen Beiträgen treten nach Anwendung der Projektionsmethode Skalarprodukte im Zähler der Integrale auf. Die Skalarprodukte  $k_1 \cdot p$  und  $k_2 \cdot p$  können analog zum 1-Schleifen Beitrag nach der Ergänzung aus Gleichung (5.36) mit dem Nenner gekürzt werden. Die Skalarprodukte  $k_1^2$  und  $k_2^2$  können direkt mit dem Nenner gekürzt werden. Des Weiteren gibt es Skalarprodukte  $k_1 \cdot k_2$ , welche je nach Integralklasse unterschiedlich erweitert werden. Für die Integralklasse  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  erweitert man

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( (k_1 + k_2 + p)^2 - m^2 \right) - k_1^2 - 2k_1 \cdot p - 2k_2 \cdot p - k_2^2 \right]. \quad (5.89)$$

Für die Integralklasse  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  erweitert man

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2} \left[ (k_1 - k_2)^2 - k_1^2 - k_2^2 \right]. \quad (5.90)$$

Durch diese Erweiterungen werden die Skalarprodukte zu Termen, die mit dem Nenner gekürzt werden können.

Auf diese Weise können negative Exponenten in den Integralen auftreten:

#### 1. Produkt von zwei 2-Schleifen Integralen

Diejenigen Integrale mit negativen Exponenten, die direkt auf ein Produkt von zwei 1-Schleifen Integralen zurückgeführt werden können, werden anschließend nach den Methoden aus Kapitel 5.1.2 gekürzt.

#### 2. Negative masselose Propagatoren

Bei der Berechnung treten außerdem Integrale vom Typ  $M(0, -1, a_3, a_4, a_5) = N(-1, a_3, 0, a_5, a_4)$  auf. Durch die Substitution  $k_1 \rightarrow k_1 - p$  kann das Integral auf Produkte von zwei 1-Schleifen Integralen zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} M(0, -1, a_3, a_4, a_5) &= \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1 - p - k_2)^2}{(k_2^2)^{a_3} (k_1^2 - m^2)^{a_4} ((k_2 + p)^2 - m^2)^{a_5}} \\ &= \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1^2 - m^2) - 2k_1 p + 2m^2 - 2k_1 k_2 + ((k_2 + p)^2 - m^2)}{(k_2^2)^{a_3} (k_1^2 - m^2)^{a_4} ((k_2 + p)^2 - m^2)^{a_5}} \\ &= I(0, a_4 - 1)I(a_3, a_5) + 2m^2 I(0, a_4)I(a_3, a_5) + I(0, a_4)I(a_3, a_5 - 1) \quad (5.91) \end{aligned}$$

Die Terme, die proportional zu  $k_1$  sind, liefern aufgrund der Antisymmetrie in  $k_1$  keinen Beitrag.

Des Weiteren treten Integrale vom Typ  $M(-1, a_2, a_3, 0, a_5)$  auf. Analog kann dieses Integral durch die Verschiebung des Impulses  $k_1 \rightarrow k_1 + k_2$  auf Produkte von zwei 1-Schleifen Integralen zurückgeführt werden:

$$M(-1, a_2, a_3, 0, a_5) = I(a_2 - 1, 0)I(a_3, a_5) + I(a_2, 0)I(a_3 - 1, a_5) \quad (5.92)$$

### 3. Negative massive Propagatoren

Auch bei den massiven Propagatoren können negative Exponenten auftreten. Das sind Integrale vom Typ  $N(0, a_2, -1, a_4, a_5)$  und  $N(a_1, 0, a_3, a_4, -1)$ . Für das Integral  $N(0, a_2, -1, a_4, a_5)$  erhält man nach der Substitution  $k_1 \rightarrow k_1 - k_2 - p$ :

$$\begin{aligned} N(0, a_2, -1, a_4, a_5) &= \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1 - k_2)^2 - m^2}{(k_2^2)^{a_2} ((k_2 + p)^2 - m^2)^{a_4} (k_1^2 - m^2)^{a_5}} \\ &= I(0, a_5 - 1)I(a_2, a_4) + I(0, a_5)I(a_2 - 1, a_4) \end{aligned} \quad (5.93)$$

Auch hier verschwindet wieder der Term proportional zu  $k_1$  aufgrund von Antisymmetrie in  $k_1$ .

Analog erhält man für  $N(a_1, 0, a_3, a_4, -1)$  mit der Substitution  $k_2 \rightarrow k_2 - p$

$$N(a_1, 0, a_3, a_4, -1) = I(a_1 - 1, a_3)I(0, a_4) + I(a_1, a_3)I(0, a_4 - 1) . \quad (5.94)$$

### 4. Sunset-Integrale $N(-1, 0, a_3, a_4, a_5)$

In der Rekursion können auch Integrale vom Typ  $N(-1, 0, a_3, a_4, a_5)$  auftauchen. Mit der nach  $N(-1, 0, a_3, a_4, a_5)$  aufgelösten Rekursionsrelation (5.79)

$$\begin{aligned} &N(-1, 0, a_3, a_4, a_5) \\ &= \left( 2a_3 + a_4 + a_5 - 2D + a_4 \mathbf{4}^+ [\mathbf{3}^- - \mathbf{5}^-] + a_5 \mathbf{5}^+ [\mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{3}^+ \left[ a_3 + a_4 + a_5 - \frac{3D}{2} \right] \right) \frac{N(0, 0, a_3, a_4, a_5)}{a_3 + a_4 + a_5 - \frac{3D}{2}} \end{aligned} \quad (5.95)$$

lassen sich alle Integrale vom Typ  $N(-1, 0, a_3, a_4, a_5)$  auf Summen von Sunset-Integralen  $N(0, 0, a_3, a_4, a_5)$  zurückführen.

## 5. Weitere negative Exponenten

Neben den bereits behandelten Klassen von Integralen mit negativen Exponenten treten weitere Integrale mit negativen Exponenten auf, die nicht auf diese Weisen gelöst werden können. Für diese Integrale muss man sich aller Rekursionsrelationen bedienen und mit ihnen ein lineares Gleichungssystem aufstellen, das die Integrale auf Summen von Produkten von 1-Schleifen Integralen und den bekannten Masterintegralen zurückführt. Wichtig bei der Lösung des linearen Gleichungssystems ist es, dieses mit Hilfe der Symmetrien der Integralklassen zu vereinfachen.

Die Rekursion dieser Integrale kann zum Beispiel mit Mathematica umgesetzt werden. Das zugehörige Mathematica-Notebook für die Rekursion der Integrale vom Typ  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  findet man in Anhang B. Für die Integralklasse  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  lassen sich die Symmetrien

$$\begin{aligned} N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= N(a_2, a_1, a_4, a_1, a_5) , & \text{falls } a_1 < a_2 , \\ N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= N(a_2, a_1, a_4, a_1, a_5) , & \text{falls } a_1 = a_2 \text{ und } a_3 < a_4 , \\ N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= N(a_1, a_2, a_5, a_4, a_3) , & \text{falls } a_1 = 0 \text{ und } a_3 < a_5 , \\ N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= N(a_1, a_2, a_3, a_5, a_4) , & \text{falls } a_2 = 0 \text{ und } a_4 < a_5 , \end{aligned}$$

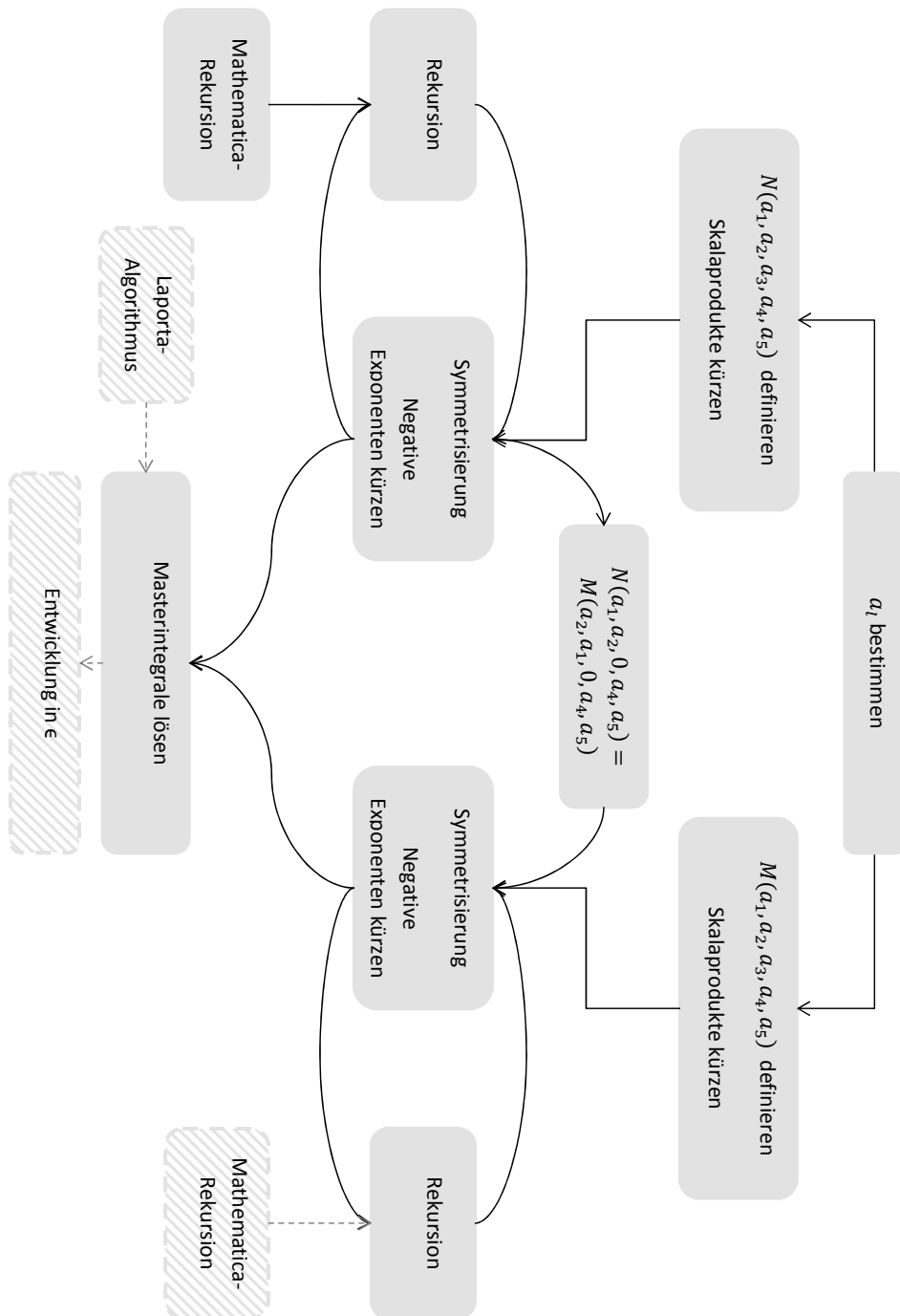
finden. Die optionalen Einschränkungen zur Anwendung der Symmetrien werden gemacht, damit nur bestimmte Integrale symmetrisiert werden, da die Symmetrisierung aller Integrale keine Vereinfachung des Gleichungssystems liefern würde. Nach der Anwendung der Symmetrien auf das lineare Gleichungssystem lässt man dieses lösen und drückt die gesuchten Integrale anschließend durch die bekannten Masterintegrale und Produkte von 1-Schleifen Integralen aus. Bei der Lösung des Gleichungssystems können Integrale auftauchen, die sich nicht auf die bekannten Integrale zurückführen lassen. Um diese Integrale auch lösen zu können, müsste man dem Mathematica-Notebook mehr Informationen geben, wie zum Beispiel Integrale höherer Tupelsumme zur Rekursion zur Verfügung stellen. Dies würde einen größeren Rechenaufwand bedeuten und dadurch mehr Zeit beanspruchen. Es ist daher praktischer nur die benötigten Integrale vollständig zu rekursieren. Typische Beispiele für auf diese Weise vollständig rekursierte Integrale sind

$$N(1, 1, -2, 1, 2) = \frac{D}{2} \overbrace{N(0, 0, 1, 1, 0)}^{I(0,1)^2} - \frac{(-4 + D)(-3 + D)}{-2 + D} \overbrace{N(1, 1, 0, 0, 1)}^{\text{Master 5.2j}} , \quad (5.96)$$

$$N(-1, -1, 1, 2, -1) = \frac{16(-3 + D)^2(2 + D)}{(-2 + D)^2} \underbrace{N(1, 1, 1, 1, 0)}_{I(1,1)^2} . \quad (5.97)$$

Die so rekursierten Integrale werden anschließend dem Programm (vgl. Kapitel 5.2.5) übergeben, das diese löst. Für Integrale vom Typ  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  erfolgt die Rekursion analog nach Austausch der Rekursionsrelationen und Symmetrien (vgl. Anhang B).

5.2.5 Computergestützte Berechnung via Projektionsmethode



Auf der vorherigen Seite sieht man den Programmablaufplan, der die Erweiterung des Programms zur Berechnung des 2-Schleifen Beitrages zum anomalen magnetischen Moment darstellt. Die gestrichelten Programmteile wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht umgesetzt. Der Ablauf des Programms ist bis zur Bestimmung von  $a_l$  über die Projektionsmethode analog zur Berechnung des 1-Schleifen Beitrages. Folgende Unterschiede sind jedoch zu beachten (vgl. Kapitel 5.1.4):

- Bei 2-Schleifen Diagrammen treten Leptonenschleifen auf (vgl. Abb. 3.2 9)), über die separat die Spur gebildet werden muss.
- Die Vertexfunktion der 2-Schleifen Diagramme hängt von zwei internen Photonenimpulsen  $k_1$  und  $k_2$  anstatt von nur einem internen Photonenimpuls  $k$  ab.

Die Integrale können dadurch in die in Kapitel 5.2.1 besprochenen Integralklassen unterteilt werden:

```
repeat id G(s1?,k1,0)*G(s2?,k2,0)*G(s3?,k1+p,Me)*G(s4?,k2+p,Me)
*G(s5?,k1+k2+p,Me)=N(s1,s2,s3,s4,s5);
repeat id G(s1?,k1,0)*G(s2?,k1-k2,0)*G(s3?,k2,0)*G(s4?,k1+p,Me)
*G(s5?,k2+p,Me)=M(s1,s2,s3,s4,s5);
```

Anschließend werden die Integrale symmetrisiert ((5.58), (5.60)), wodurch sich einige Terme vereinfachen.

Da man zwei Integralklassen behandeln muss, wird das Zurückführen der Integrale auf die bekannten Masterintegrale komplizierter als im 1-Schleifen Fall. Um die Integrale auf die bekannten Masterintegrale (vgl. Kapitel 5.2.3) zurückzuführen, benötigt man die Rekursionsrelationen (5.65) und (5.75).

Für die Integralklasse  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  wurde das, unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 5.2.4 für den Umgang mit negativen Exponenten, wie folgt umgesetzt:

```
repeat;
[... ]
* masterint h
* shift k1->k1-k2
  id N(s1?,s2?{0,-1},s3?!{0,-1,-2},s4?{0,-1,-2},s5?)
  =N(s2,s1,s4,s3,s5);
  id N(0,s2?,0,s4?,s5?)=I(s2,s4)*I(0,s5);
  id N(0,s2?,-1,s4?,s5?)=I(0,s5-1)*I(s2,s4)+I(0,s5)*I(s2-1,s4);
  id N(-1,s2?,0,s4?,s5?)=I(0,s5-1)*I(s2,s4)
  +2*Me^2*I(0,s5)*I(s2,s4)+I(0,s5)*I(s2,s4-1);

* 2*1-loop int
```

```

id N(s1?,s2?,s3?,s4?,0)=I(s1,s3)*I(s2,s4);
id N(0,s2?,s3?,s4?,-1)=N(s2,0,s4,s3,-1);
id N(s1?,0,s3?,s4?,-1)=I(s1-1,s3)*I(0,s4)+I(s1,s3)*I(0,s4-1);

* masterint j
  id N(s1?,s2?,0,0,s5?)=M(0,s1,s2,s5,0);

* masterint i
  id N(s1?,0,0,s4?,s5?)=M(0,s1,0,s5,s4);
  id N(0,s2?,s3?,0,s5?)=M(0,s2,0,s3,s5);

* define int d for recurrence
* shift k1->k1-k2
  id N(s1?,s2?,s3?,0,s5?)=N(s2,s1,0,s3,s5);
  id N(s1?,s2?,0,s4?,s5?)=M(s2,s1,0,s4,s5);

* N symm in exchange of a1+a2 and a3+a4
  id N(s1?pos_,s2?{,0},s3?,s4?pos0_,s5?)=N(s2,s1,s4,s3,s5);
  id N(s1?pos_,s2?pos_,s3?neg_,s4?!{,0},s5?)=N(s2,s1,s4,s3,s5);
  id N(s1?pos_,s2?{-1},s3?,s4?,s5?)=N(s2,s1,s4,s3,s5);

* recurrence of int c to ints g and h
  id N(s1?!{-3},s2?pos_,s3?pos0_,s4?,s5?)=
(s5*N(s1,s2,s3-1,s4,s5+1)-s5*N(s1,s2-1,s3,s4,s5+1)
-s4*N(s1,s2-1,s3,s4+1,s5))*W(1,2*s2+s4+s5-d);

* recurrence of a1=-1
  id N(0,-1,s3?,s4?,s5?)=N(-1,0,s4,s3,s5);
  id N(-1,0,s3?,s4?,s5?)=W(1,s3+s4+s5-3*d/2)*((2*s3+s4+s5-2*d)
*N(0,0,s3,s4,s5)+s4*(N(0,0,s3-1,s4+1,s5)-N(0,0,s3,s4+1,s5-1))
+s5*(N(0,0,s3-1,s4,s5+1)-N(0,0,s3,s4-1,s5+1))
+(s3+s4+s5-3*d/2)*N(0,0,s3-1,s4,s5));

endrepeat;

```

Mit  $W(a, b) = \frac{a}{b}$  wird eine rationale Funktion in der Programmiersprache FORM umgesetzt. Diese Schleife wird so lange ausgeführt, bis keines der Programm-Teile Umformungen vornimmt. Der limitierende Faktor ist die Rekursion,

\* recurrence of int c to ints g and h

die ausgeführt wird, so lange  $s_1 \neq -3$ ,  $s_2 > 0$  und  $s_3 \geq 0$  sind. Diese Begrenzung ist sinnvoll, da bei weiterer Ausführung der Rekursion die Integrale komplizierter statt

einfacher werden würden. Die dann noch ungelösten Integrale, die typischerweise negative Exponenten aufweisen, können mit Hilfe aller Rekursionsrelationen, wie in Kapitel 5.2.4 beschrieben, mit Mathematica auf bekannte Integrale zurückgeführt werden. Die rekursierten Integrale werden anschließend in das Programm geschrieben. Im gezeigten Programmausschnitt wird die Einbindung der mit Mathematica rekursierten Integrale durch

[...]

angedeutet.

Auf diese Weise werden alle Integrale bis auf das Masterintegral  $N(0, 0, a_3, a_4, a_5)$ , welches an das Programm anschließend noch dem Laporta-Algorithmus übergeben werden müsste, mit dem Programm gelöst.

Die Integrale vom Typ  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  werden analog gelöst. Mit dem angefertigten Programm werden sie jedoch noch nicht vollständig auf die bekannten Masterintegrale zurückgeführt. Nach der Rekursion mit dem Programm bleiben noch Integrale mit negativen Exponenten übrig, die mittels aller Rekursionsrelationen auf die bekannten Masterintegrale zurückgeführt werden müssten. Dies erfolgt analog zur Rekursion der Integralklasse  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  (vgl. Anhang B). Für die Integralklasse  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  müssten allerdings viel mehr Fälle berücksichtigt werden, was auf der einen Seite zu einem viel größeren Rechenaufwand und auf der anderen Seite zu keinen neuen Erkenntnissen führen würde, weswegen die Rekursion dieser Integrale im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt wurde.

Wenn alle Integrale gelöst wurden, würde man den Limes der dimensional Regularisierung  $\epsilon \rightarrow 0$  bilden und erhält, nach Multiplikation der Vorfaktoren, die gesuchten 2-Schleifen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment.

## 6 Fazit

Im ersten Teil dieser Arbeit wurden die theoretischen Grundlagen zum Verständnis des anomalen magnetischen Moments besprochen. Ebenso wurde ein Überblick über das aktuelle Experiment zur Bestimmung von  $a_\mu$  gegeben. Dieses Experiment liefert einen Wert, der genauer ist als der theoretische Wert. Die theoretische Unsicherheit hängt maßgeblich von der Unsicherheit der hadronischen Beiträge ab, deren Genauigkeit in Zukunft verbessert werden muss.

Zwischen dem theoretisch und dem experimentell bestimmten Wert für  $a_\mu$  besteht eine Diskrepanz von  $\sim 3,5\sigma$ , welche nicht mit dem SM erklärt werden kann. Mögliche Modelle für neue Physik, die die Diskrepanz  $\Delta a_\mu$  erklären sollen, könnten mit Hilfe der Diskrepanz  $\Delta a_e$  auf ihre Konsistenz geprüft werden. Dafür ist eine genauere Bestimmung der Feinstrukturkonstante unabhängig von  $a_e$  und genauere experimentelle und theoretische Werte für  $a_e$  und  $a_\mu$  notwendig.

Im letzten Teil dieser Arbeit wurden die Methoden zur theoretischen Berechnung des anomalen magnetischen Moments besprochen. Es wurde gezeigt, dass die Projektionsmethode effizienter in der Berechnung der Beiträge ist als die Methode durch die Vertauschung der Dirac-Matrizen. Am Beispiel der Projektionsmethode wurden die Beiträge mit Hilfe eines Computerprogramms berechnet. Das Programm zur Lösung der 1-Schleifen QED-Beiträge konnte auf die Lösung der 2-Schleifen QED-Beiträge übertragen werden. Dies lässt vermuten, dass man es nach leichter Anpassung auch für die Berechnung höherer Ordnungen benutzen könnte. Einige Integrale der Integralklasse  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  mit negativen Exponenten werden mit dem Programm noch nicht vollständig gelöst. Sie müssten noch mittels aller Rekursionsrelationen auf die bekannten Masterintegrale zurückgeführt werden. Dies bedeutet einen großen Rechenaufwand, der sich bei der Berechnung höherer Ordnungen noch steigern wird.

Ein weiteres Problem bei der Berechnung von Beiträgen höherer Ordnungen wird die Berechnung der Masterintegrale sein, da diese von Hand gelöst werden müssen. Bereits zur 3. Ordnung existieren 17 Masterintegrale (vgl. [26]), deren Anzahl mit der Ordnung steigt und die mit steigender Ordnung komplizierter werden. Dies wird ausschlaggebend dafür sein, dass bis jetzt nur die Beiträge bis zur 3. Ordnung und nur einige Feynman-Diagramme der 4. Ordnung analytisch berechnet wurden und die weiteren Beiträge der 4. und 5. Ordnung zur Zeit nur numerisch bekannt sind. Ein zukünftiges Ziel wird es sein, sowohl mehr Diagramme analytisch berechnen zu können als auch die numerischen Methoden zu verbessern. Um den Experimenten der nächsten Generation ([11], [10]) in ihrer Genauigkeit standzuhalten, wird es ebenfalls notwendig sein, Beiträge höherer Ordnungen zu berechnen oder diese zumindest vage abschätzen zu können.



# A Appendix

## A.1 Feynman-Regeln der QED

Die Feynman-Regeln sind ein Formalismus, mit dem die Amplitude  $\mathcal{M}$  eines quantenfeldtheoretischen Prozesses aus einer grafischen Darstellung berechnet werden kann. Zu einer gegebenen Ordnung in der störungstheoretischen Berechnung kann die Amplitude als Summe aus Teilamplituden geschrieben werden. Jede Teilamplitude wird dabei durch ein Feynman-Diagramm repräsentiert. Jeder Teil eines Feynman-Diagramms liefert wiederum einen Beitrag. Multipliziert liefern diese Beiträge die Teilamplitude (vgl. [1]).

Zur Berechnung der Amplitude  $\mathcal{M}$  in der QED gelten folgende Feynman-Regeln in natürlichen Einheiten ( $c = 1$ ) [5],[1]:

### Externe Linien

Spin-0-Teilchen  
mit Impuls  $p$ :

$$\begin{array}{c} \vec{p} \\ \text{---} \end{array} = 1$$

Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen  
mit Impuls  $p$ , Spin  $\sigma$  :

$$\begin{array}{c} \vec{p}, \sigma \\ \text{---} \end{array} = \begin{cases} u_p(\sigma), & \text{einlaufendes Teilchen} \\ \bar{u}_p(\sigma), & \text{auslaufendes Teilchen} \end{cases}$$

Spin- $\frac{1}{2}$ -Antiteilchen  
mit Impuls  $p$ , Spin  $\sigma$  :

$$\begin{array}{c} \vec{p}, \sigma \\ \text{---} \end{array} = \begin{cases} \bar{v}_p(\sigma), & \text{einlaufendes Antiteilchen} \\ v_p(\sigma), & \text{auslaufendes Antiteilchen} \end{cases}$$

Spin-1-Teilchen  
mit Impuls  $p$ ,  
Polarisation  $\lambda$ :

$$\begin{array}{c} \vec{p}, \lambda, \mu \\ \text{~~~~~} \end{array} = \epsilon_{(\lambda)}^\mu(p)$$

### Vertex-Faktor

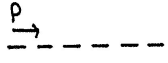
Der QED-Vertex ist der Lagrangedichte der QED folgend ein 3-Teilchen-Vertex aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und einem Spin-1-Teilchen. An jedem Vertex gilt die Energie-Impuls-Erhaltung. Für ein einfach negativ ( $Q = -e$ ) geladenes Teilchen wie das Elektron oder Myon gilt:

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = -iQ\gamma^\mu = ie\gamma^\mu$$

## Propagatoren

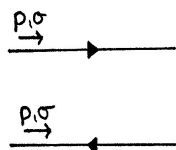
Propagatoren oder innere Linien entsprechen virtuellen (Anti-)Teilchen, die der Energie-Impuls-Beziehung  $p^2 = m^2$  nicht genügen und somit „off-shell“ sind.

Spin-0-Teilchen  
mit Impuls  $p$ :



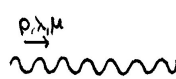
$$= \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Spin- $\frac{1}{2}$ -(Anti-)Teilchen  
mit Impuls  $p$ , Spin  $\sigma$  :



$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

Spin-1-Teilchen  
mit Impuls  $p$ ,  
Polarisation  $\lambda$ :



$$= \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 - m^2}$$

## Weitere Regeln

- *Globale Energie-Impuls-Erhaltung*
- *Integration über die Impulse der internen Linien:*  
Über jeden nicht bestimmten Impuls  $p$  einer internen Linie wird mit dem Integrationsmaß  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  integriert.
- *Antisymmetrisierung (I):*  
Für jede geschlossene Fermionenschleife muss die Spur über ihre Dirac-Matrizen gebildet werden und mit einem Faktor  $(-1)$  multipliziert werden.
- *Gesamtphase:*  
Es ist üblich das Ergebnis noch mit  $i$  zu multiplizieren, um die Teilamplitude  $\delta\mathcal{M}$  zu erhalten.
- *Antisymmetrisierung (II):*  
Zwei Diagramme, die sich nur durch den Austausch zweier externer Fermionen-Linien unterscheiden, werden voneinander subtrahiert.

## A.2 Metrischer Tensor und Dirac-Matrizen

Für den metrischen Tensor in  $D = 4$  Dimensionen gilt:

$$\begin{aligned}\eta^{00} &= -\eta^{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \\ \eta^{\mu\nu} &= 0, \quad \mu \neq \nu \\ \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu &= \gamma_\mu\end{aligned}$$

Für die Dirac-Matrizen, die die Antikommutator-Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

erfüllen, gelten in  $D = 4$  Dimensionen folgende Relationen [22]:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma_\mu &= \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 4\mathbb{1}_{4\times 4} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4\eta^{\nu\rho} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\end{aligned}$$

Für die Spuren über die Dirac-Matrizen gilt:

$$\begin{aligned}\text{Sp}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu} \\ \text{Sp}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ \text{Sp}(\gamma^\alpha \cdots \gamma^\sigma) &= 0, \quad \#(\gamma^\alpha \cdots \gamma^\sigma) \text{ ungerade}\end{aligned}$$

Des Weiteren definiert man die Matrix

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

die den Beziehungen

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

genügt.

## A.3 Dimensionale Regularisierung

Für die Generalisierung vom 4-dimensionalen zu einem  $D$ -Dimensionalen Raum,  $D \in \mathbb{N}$ , gelten einige Veränderungen [14, §10.3]:

Für den metrischen Tensor in  $D$ -Dimensionen gilt:

$$\begin{aligned}\eta^{00} &= -\eta^{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, D-1 \\ \eta^{\mu\nu} &= 0, \quad \mu \neq \nu \\ \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} &= D\mathbb{1}_{D\times D}\end{aligned}$$

Analog wird ein 4-Vektor  $k^\mu$  zu einem Vektor mit  $D$  Komponenten

$$k^\mu \equiv (k^0, k^1, \dots, k^{D-1}),$$

$$k^2 = k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (k^i)^2$$

und [6, §7.5]

$$k^\mu k^\nu = \frac{1}{D} k^2 \eta^{\mu\nu}.$$

Das Integrationsmaß verändert sich zu

$$d^4 k \longrightarrow d^D k$$

Für die Dirac-Matrizen folgt aus der allgemein gültigen Antikommutator-Relation:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = D \mathbb{1}_{D \times D} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(D-2) \gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= (D-4) \gamma^\nu \gamma^\rho + 4 \eta^{\nu\rho} \end{aligned}$$

Die Spuren der Dirac-Matrizen in  $D$ -Dimensionen müssen in diesem Fall nicht gesondert behandelt werden, da diese Relationen im Limes  $D = 4 - 2\epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , nicht singular werden und somit nur ihr Verhalten bei  $D = 4$  in die endgültigen Resultate der Rechnungen eingeht.

## A.4 Funktionen

### Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

### $\Gamma$ -Funktion

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} dt t^{n-1} e^{-t}$$

Die Funktionalgleichung lautet

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich die  $\Gamma$ -Funktion auch darstellen als

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

### Beta-Funktion

Die Beta-Funktion ist definiert als

$$B(\alpha, \beta) \equiv \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

## A.5 Feynman-Parametrisierung

Die Feynman-Parametrisierung wird genutzt, um einen Nenner mit mehreren Faktoren in ein Polynom umzuschreiben. Dies vereinfacht im Allgemeinen die Integration über eine solche Funktion.

Für einen einfachen Fall mit zwei Faktoren im Nenner gilt die Identität [6, §6.3]:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 -xdy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2} \quad (\text{A.5.1})$$

Durch mehrfache Differentiation kann die allgemeine Formel [6, §6.3]

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{m_i-1}}{[\sum_{i=1}^n x_i A_i]^{\sum_{i=1}^n m_i}} \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n m_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(m_i)} \quad (\text{A.5.2})$$

hergeleitet werden.

## A.6 „Diracologie“

Um Gleichung (5.17) in die Form (5.18) umschreiben zu können und so eine Ähnlichkeit zu den Koeffizienten vor den Formfaktoren in (2.24) zu erhalten, benutzt man die Antikommutator-Relation der Dirac-Matrizen, die Dirac-Gleichung (2.20) und (2.21) und  $\sigma^{\nu\mu} = \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = -\sigma^{\mu\nu}$ .

Für  $p_1$  folgt:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu m &= \gamma^\mu \not{p}_1 = \gamma^\mu p_{1\nu} \gamma^\nu \\ &= p_{1\nu} \frac{1}{2} \left( \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \\ &= p_{1\nu} \frac{1}{2} (2\eta^{\mu\nu} - 2i\sigma^{\mu\nu}) \\ &= p_1^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu} \\ \Rightarrow p_1^\mu &= i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu} + \gamma^\mu m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \not{p}_1 \gamma^\mu &= p_{1\nu} \gamma^\nu \gamma^\mu \\ &= p_{1\nu} \frac{1}{2} \left( \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} + [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \right) \\ &= p_1^\mu + \frac{\not{p}_1 \gamma^\mu}{2} - \frac{\gamma^\mu \not{p}_1}{2} \\ \Leftrightarrow \not{p}_1 \gamma^\mu &= 2p_1^\mu - \gamma^\mu \not{p}_1 \\ \Rightarrow \not{p}_1 \gamma^\mu &= 2i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu} + \gamma^\mu m \end{aligned}$$

Für  $p_2$  folgt:

$$\begin{aligned}
 m\gamma^\mu &= \not{p}_2 \gamma^\mu = p_{2\nu} \gamma^\nu \gamma^\mu \\
 &= p_{2\nu} \frac{1}{2} \left( \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} + [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \right) \\
 &= p_{2\nu} \frac{1}{2} (2\eta^{\nu\mu} - 2i\sigma^{\nu\mu}) \\
 &= p_2^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_{2\nu} \\
 \Rightarrow p_2^\mu &= -i\sigma^{\mu\nu} p_{2\nu} + m\gamma^\mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \not{p}_2 &= \gamma^\mu p_{2\nu} \gamma^\nu \\
 &= p_{2\nu} \frac{1}{2} \left( \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \\
 &= p_2^\mu + \frac{\gamma^\mu \not{p}_2}{2} - \frac{\not{p}_2 \gamma^\mu}{2} \\
 \Leftrightarrow \gamma^\mu \not{p}_2 &= 2p_2^\mu - \not{p}_2 \gamma^\mu \\
 \Rightarrow \gamma^\mu \not{p}_2 &= -2i\sigma^{\mu\nu} p_{2\nu} + m\gamma^\mu
 \end{aligned}$$

Wenn nun die Terme proportional zu  $\gamma^\mu$  vernachlässigt werden, erhält man die Ersetzungen:

$$\begin{aligned}
 p_1^\mu &\longrightarrow i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu} \\
 \not{p}_1 \gamma^\mu &\longrightarrow 2i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu} \\
 p_2^\mu &\longrightarrow -i\sigma^{\mu\nu} p_{2\nu} \\
 \gamma^\mu \not{p}_2 &\longrightarrow -2i\sigma^{\mu\nu} p_{2\nu}
 \end{aligned}$$

## A.7 Wick-Rotation

Mit Hilfe der Wick-Rotation wird von der Minkowski-Metrik, in welcher die angewandten Feynman-Regeln konstituiert sind, in die Euklidische Metrik transformiert. Dadurch lassen sich bestimmte Integrale einfacher lösen. Man transformiert dafür [6, §6.3]:

$$k^0 \equiv ik_E^0 \Rightarrow \mathbf{k} = i\mathbf{k}_E \tag{A.7.1}$$

---

## B Mathematica-Notebook der Rekursion

Um die mit dem Programm zur Berechnung der 2-Schleifen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment noch nicht gelösten Integrale vom Typ  $N(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  mit teilweise negativen Exponenten zu rekursieren, reicht es aus 5-Tupel der Zahlenmenge  $\{-1, 0, 1, 2\}$  zu bilden. Auf diese 5-Tupel werden die Rekursionsrelationen und Symmetrien angewendet und das so entstandene Gleichungssystem wird gelöst. Anschließend löst man das Gleichungssystem nach den Masterintegralen auf. Dies wurde mit freundlicher Unterstützung von Prof. Dr. York Schröder mit Mathematica folgendermaßen umgesetzt:

```
01[{a1_, a2_, a3_, a4_, a5_}] :=
  0 == (2*a1 + a3 + a5 - dd)*n[a1, a2, a3, a4, a5] +
    a3*n[a1 - 1, a2, a3 + 1, a4, a5] +
    a5*(n[a1 - 1, a2, a3, a4, a5 + 1] - n[a1, a2, a3, a4 - 1, a5 + 1]);
02[{a1_, a2_, a3_, a4_, a5_}] :=
  0 == (a5 - a3)*n[a1, a2, a3, a4, a5] +
    a1*(n[a1 + 1, a2, a3, a4, a5 - 1] -
      n[a1 + 1, a2, a3 - 1, a4, a5] -
      n[a1 + 1, a2, a3, a4 - 1, a5]) +
    a3*(n[a1, a2, a3 + 1, a4, a5 - 1] -
      n[a1, a2 - 1, a3 + 1, a4, a5]) +
    a5*(n[a1, a2 - 1, a3, a4, a5 + 1] - n[a1, a2, a3 - 1, a4, a5 + 1]);
03[{a1_, a2_, a3_, a4_, a5_}] :=
  0 == (2*a2 + a4 + a5 - dd)*n[a1, a2, a3, a4, a5] +
    a4*n[a1, a2 - 1, a3, a4 + 1, a5] +
    a5*(n[a1, a2 - 1, a3, a4, a5 + 1] - n[a1, a2, a3 - 1, a4, a5 + 1]);
04[{a1_, a2_, a3_, a4_, a5_}] :=
  0 == (a5 - a4)*n[a1, a2, a3, a4, a5] +
    a2*(n[a1, a2 + 1, a3, a4, a5 - 1] -
      n[a1, a2 + 1, a3 - 1, a4, a5] -
      n[a1, a2 + 1, a3, a4 - 1, a5]) +
    a4*(n[a1, a2, a3, a4 + 1, a5 - 1] -
      n[a1 - 1, a2, a3, a4 + 1, a5]) +
    a5*(n[a1 - 1, a2, a3, a4, a5 + 1] - n[a1, a2, a3, a4 - 1, a5 + 1]);
05[{a1_, a2_, a3_, a4_, a5_}] :=
  0 == (a3 - a1)*n[a1, a2, a3, a4, a5] +
    a1*n[a1 + 1, a2, a3 - 1, a4, a5] +
    a3*(2*n[a1, a2, a3 + 1, a4, a5] - n[a1 - 1, a2, a3 + 1, a4, a5]) +
    a5*(n[a1, a2, a3 - 1, a4, a5 + 1] +
      n[a1, a2, a3, a4 - 1, a5 + 1] - n[a1 - 1, a2, a3, a4, a5 + 1] -
      n[a1, a2 - 1, a3, a4, a5 + 1] + 2*n[a1, a2, a3, a4, a5 + 1]);
```

```

O6[{a1_, a2_, a3_, a4_, a5_}] :=
  0 == (a4 - a2)*n[a1, a2, a3, a4, a5] +
    a2*n[a1, a2 + 1, a3, a4 - 1, a5] +
    a4*(2*n[a1, a2, a3, a4 + 1, a5] - n[a1, a2 - 1, a3, a4 + 1, a5]) +
    a5*(n[a1, a2, a3 - 1, a4, a5 + 1] +
      n[a1, a2, a3, a4 - 1, a5 + 1] - n[a1 - 1, a2, a3, a4, a5 + 1] -
      n[a1, a2 - 1, a3, a4, a5 + 1] + 2*n[a1, a2, a3, a4, a5 + 1]);
symm1 = {n[a_, b_, c_, d_, e_] /; a < b -> n[b, a, d, c, e]} ;
symm2 = {n[a_, b_, c_, d_, e_] /; (a == b && c < d) ->
  n[b, a, d, c, e]} ;
symm3 = {n[a_, b_, c_, d_, e_] /; (a == 0 && c < e) ->
  n[a, b, e, d, c]} ;
symm4 = {n[a_, b_, c_, d_, e_] /; (b == 0 && d < e) ->
  n[a, b, c, e, d]} ;
symm = Join[symm1, symm2, symm3, symm4];
min = -1; max = 2; length = 5;
input = Tuples[Range[min, max, 1], length];

(* solve linear system *)
eqs1 = Map[O1, input] /. symm;
eqs2 = Map[O2, input] /. symm;
eqs3 = Map[O3, input] /. symm;
eqs4 = Map[O4, input] /. symm;
eqs5 = Map[O5, input] /. symm;
eqs6 = Map[O6, input] /. symm;
eqs = Join[eqs1, eqs2, eqs3, eqs4, eqs5, eqs6] /. symm;
eqs = DeleteCases[eqs, True];
vars = Variables[eqs][[All, 2]] /. dd -> Pi];
vars = Map[# /.
  n[abs_, tot_, a_, b_, c_, d_, e_] -> n[a, b, c, d, e] &,
  Sort[Map[# /.
    n[a_, b_, c_, d_, e_] ->
      n[Abs[a] + Abs[b] + Abs[c] + Abs[d] + Abs[e],
        a + b + c + d + e, a, b, c, d, e] &, vars]]];
Off[Solve::svars];
sol = Solve[eqs, vars] /. symm;
sol = Collect[sol, n[___], Factor];

(* analyze solution *)
(* ints that reduce to zero *)
solZero = Select[sol[[1]], #[[2]] == 0 &];
Print["solZero: ", Length[solZero], "rels that reduce to zero"];

```



---

```

sol = Complement[sol[[1]], solZero];
(* master int candidates *)
rhs = Variables[sol[[All, 2]] /. dd -> Pi];
(* select master ints *)
masters =
  Select[rhs, Not[MemberQ[{min, max} length, (# /. n -> Plus)]] &];
(* pick rels which are fully reduced only *)
killMasters = Map[# -> 0 &, masters];
solRels =
  Select[Complement[sol, solZero], (#[[2]] /. killMasters) == 0 &];
Print["solRels: ", Length[solRels], "rels that reduce to masters ",
  masters];
(* pick rels which are not fully reduced only *)
solFail = Complement[sol, solZero, solRels];
Print["solFail: ", Length[solFail],
  "rels that reduce to masters plus ", Complement[rhs, masters]];
(* print statistics *)
Map[Length, {sol, eqs, vars, rhs, solZero, solRels, solFail}]

(* basis change; pick some new set of master ints *)
newMasters = {n[0, 0, 1, 1, 0], n[0, 0, 1, 1, 1], n[0, 1, 1, 1, 0],
  n[1, 1, 0, 0, 1]};
(* determine basis change rels *)
basisChange =
  Solve[newMasters == (newMasters /. solRels), masters][[1]];
basisChange = Collect[basisChange, n[___], Factor]
(* apply to solution *)
solRels2 = solRels /. basisChange;
solRels2 = Collect[solRels2, n[___], Factor]

```

Die Rekursion der verbleibenden Integrale vom Typ  $M(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  mit teilweise negativen Exponenten erfolgt analog, indem man die Rekursionsrelationen durch die Rekursionsrelationen aus den Gleichungen (5.69)-(5.74) und die Symmetrierelationen ersetzt. Bei den auftauchenden Integralen reichen nicht mehr 5-Tupel der Zahlenmenge  $\{-1, 0, 1, 2\}$  aus, sondern man müsste 5-Tupel der Zahlenmenge  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  bilden.

---

## C Literaturverzeichnis

- [1] N. Borghini, Vorlesungsskript: *Grundlagen der Elementarteilchenphysik*, Universität Bielefeld, WS 12/13, <http://www.physik.unibielefeld.de/borghini/Teaching/Teilchenphysik/Teilchen.pdf>.
- [2] K. Melnikov, A. Vainshtein, *Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment* (2006).
- [3] E. de Rafael, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **234** (2013) 193 [arXiv:1210.4705 [hep-ph]].
- [4] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **76** (1949) 790.
- [5] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd Edition (2008).
- [6] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (1995).
- [7] R. Barbieri and E. Remiddi, Phys. Lett. B **49** (1974) 468; Nucl. Phys. B **90** (1975) 233.
- [8] F. Jegerlehner and A. Nyffeler, Phys. Rept. **477** (2009) 1 [arXiv:0902.3360 [hep-ph]].
- [9] C. Gnendiger, D. Stöckinger and H. Stöckinger-Kim, arXiv:1306.5546 [hep-ph].
- [10] B. Lee Roberts (Fermilab P989 Collaboration), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **218** (2011) 237.
- [11] H. Inuma (J-PARC New g-2/EDM experiment Collaboration), J. Phys. Conf. Ser. **295**, 012032 (2011).
- [12] S. Eidelman and M. Passera, Mod. Phys. Lett. A **22** (2007) 159 [hep-ph/0701260].
- [13] G. F. Giudice, P. Paradisi and M. Passera, JHEP **1211** (2012) 113 [arXiv:1208.6583 [hep-ph]].
- [14] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory, 2nd Edition* (2010).
- [15] A. Petermann, Helv. Phys. Acta **30** (1957) 407.
- [16] C. M. Sommerfield, Phys. Rev. **107** (1957) 328.
- [17] S. Laporta and E. Remiddi, Phys. Lett. B **379** (1996) 283 [hep-ph/9602417].
- [18] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111807 [arXiv:1205.5368 [hep-ph]].
- [19] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111808 [arXiv:1205.5370 [hep-ph]].

- 
- [20] D. Hanneke, S. F. Hoogerheide and G. Gabrielse, arXiv:1009.4831 [physics.atom-ph].
- [21] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition
- [22] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* (2010).
- [23] N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe and K. Schilcher, Z. Phys. C **48** (1990) 673.
- [24] S. Laporta, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 5087 [hep-ph/0102033].
- [25] D. J. Broadhurst, Z. Phys. C **47** (1990) 115.
- [26] S. Laporta and E. Remiddi, in *Lepton Dipole Moments*, ed. B. L. Roberts, W. J. Marciano, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 20 (2010) 119

## Danksagung

Zuerst bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. York Schröder, der für mich immer zu erreichen war und mir bei Fragen und Problemen stets sofort geholfen hat.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinen Freunden, insbesondere bei Ayse und Johanna, für die tollen letzten drei Jahre bedanken.

Zuletzt möchte ich noch meiner Familie danken, die mich immer in dem was ich tat, ermutigt hat und es mir auch finanziell ermöglicht hat, zu studieren. Besonderer Dank gilt auch meinem Freund für seine Unterstützung vor allem in der Zeit meiner Bachelorarbeit.

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den 9. September 2013