

Gluon–Plasma
und
thermisches Variationsverfahren

York Schröder

Diplomarbeit
am Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

14. April 2006

für Sanne

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 QCD und Gluon-Plasma	3
1.1 Eichsymmetrie und Lagrangedichte	4
1.2 Pfadintegral-Formulierung	5
1.3 BRS-Invarianz in linearen Eichungen	8
1.4 Resultate der Störungstheorie im Hochtemperaturlimes	9
Teil I: Thermische Ward-Identitäten	12
2 Ward-Identitäten für Gluon-Greensfunktionen	14
2.1 Eine allgemeine Identität	14
2.2 Gluon-Propagator	16
2.2.1 In $\mathcal{O}(1)$	16
2.2.2 Exakt	17
2.3 Gluon-3-Vertex in $\mathcal{O}(1)$	18
2.4 Gluon-4-Vertex in $\mathcal{O}(1)$	20
2.5 Ausblick	22
Teil II: Variationsverfahren	24
3 Das Variationsverfahren	26
3.1 Feynmans Herleitung	27
3.2 Besonderheiten bei Eichtheorien	28
4 Die <i>Trial</i>-Theorie in kovarianten Eichungen	31
4.1 Berechnung der Zustandssumme	33
4.2 Thermisches Mittel	35

5	Variationsfunktional in kovarianten Eichungen	37
5.1	Minimierung	41
5.1.1	Kleine Kopplung	43
5.1.2	Weiche Plasmon-Frequenz	44
5.2	Numerische Auswertung	45
6	Andere Eichfixierungen	47
6.1	Mischeichung	47
6.1.1	<i>Trial</i> -Theorie, Zustandssumme, Propagator	48
6.1.2	Variationsfunktional und Minimierung	49
6.1.3	Coulomb-Eichung	53
6.2	Eine axiale Eichung: TAG	54
7	Variation nach Stärke der Gluon-Selbstenergie	56
7.1	<i>Trial</i> -Theorie mit $\Pi_{t,\ell}$	56
7.2	Auswertung	57
8	Versuch der Quantisierung im Fock-Raum	60
8.1	Hamilton'sche Formulierung der Variationsmethode	60
8.2	Der physikalische Hilbertraum	63
8.3	Kanonische Quantisierung der <i>Trial</i> -Theorie	65
8.4	Hamiltonian, Zustandssumme und Propagator	69
8.5	Variationsfunktional und Minimierung	71
	Zusammenfassung	75
A	Frequenzsummen	77
A.1	Methode	77
A.2	Konstante Massen	78
B	Hoch-T-Näherungen	80
B.1	Konstante Massen	81
B.2	„ λ -Fall“	83
C	Matrix-Darstellungen	86
D	Auswertung der Quantisierungsregeln	88

Einleitung

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Teile, die an sich sehr verschiedene Gebiete behandeln. Eine Gemeinsamkeit läßt sich jedoch voranstellen: Es wird dasselbe physikalische System untersucht, nämlich ein System von Gluonen im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad, das sogenannte Gluon-Plasma. Daher werden die Grundlagen dieses Systems im ersten Kapitel behandelt, welches den beiden Teilen I,II voransteht.

In **Teil I** werden Ward-Identitäten für (BP-resummierte) Gluon-Greensfunktionen aus der BRS-Invarianz der Wirkung hergeleitet, von denen bei Rechnungen zur Selbstenergie, Plasmafrequenz etc. im Rahmen der Störungstheorie häufig Gebrauch gemacht wird. Dabei geht es weniger um Originalität der Ergebnisse als vielmehr um eine nachvollziehbare Darstellung ihrer Herleitung, welche so in der Literatur meines Wissens nach nicht existiert.

In **Teil II** wird ein Formalismus getestet, welcher geeignet sein könnte, der Theorie weitere exakt gültige Resultate abzuringen. Inspiriert von der relativ einfachen Struktur der „wahren“ (d.h. BP-resummierten) nullten Näherung, wird (auf dem Testgelände eines Variationsfunktionals für die Freie Energie) versucht, die dynamisch generierten thermischen Massen mit einer massiven abelschen Theorie zu simulieren.

Jedem der zwei Teile ist eine kurze separate Einleitung (S.14 bzw. S.26) vorangestellt, wohingegen die Zusammenfassung der gesamten Arbeit auf Seite 75 zu finden ist.

Kapitel 1

QCD und Gluon-Plasma

Die Quantenchromodynamik (QCD) hat als Theorie der starken Wechselwirkung ihren anerkannten Platz im Standardmodell der Elementarteilchen. Sie beschreibt die starke Bindung von Quarks miteinander durch den Austausch von „Farbladungen“, welche von Eichbosonen (den Gluonen) getragen werden.

Als eine nichtabelsche Eichtheorie birgt die QCD enorme technische Schwierigkeiten. Dies liegt an der Tatsache, daß der Kopplungsparameter (der Gluonen an die Quarks) nicht notwendig klein ist. Daher kann man die bevorzugte Methode der theoretischen Physik, eine Formulierung des Problems als Störungsreihe, im Gegensatz zur verwandten (aber abelschen und mit kleiner Kopplung bestückten) Quantenelektrodynamik (QED) nicht ohne weiteres anwenden.

Es gibt jedoch einen Grenzfall der QCD, der sich mit einer Störungstheorie behandeln läßt: der Grenzfall hoher Temperatur. Aus Untersuchungen der Renormierbarkeit ist bekannt, daß der Kopplungsparameter g einerseits von der Energieskala abhängt, bei der der zu untersuchende Prozeß abläuft, andererseits jenseits einer Skala Λ_{QCD} klein wird (running coupling, asymptotic freedom).

In einem statistischen Ensemble von Teilchen im Kontakt mit einem Wärmebad wird die mittlere Energie eines Teilchens durch dessen Temperatur T parametrisiert, so daß für sehr hohe Temperaturen die Kopplung $g(T)$ klein und somit eine Störungsrechnung möglich wird. Dieses schwach gekoppelte System von Quarks und Gluonen nennt man Quark-Gluon-Plasma (QG-Plasma).

Nach anfänglichen Problemen mit der konsistenten Beschreibung einer solchen thermisch angeregten Eichtheorie (zur ersten Orientierung diene die Einleitung von [1]) wurde der Durchbruch um 1990 mit Veröffentlichungen von Braaten und Pisarski (BP) erzielt (die wichtigste davon ist [2]). Sie zeigten die Notwendigkeit einer Resummation der Störungsreihe. Dabei unterscheiden sie Impulse in *soft* ($\sim gT$) und *hard* ($\sim T$). Eine konsistente Berechnung von *Soft*-Amplituden erfordert die Berücksichtigung von sogenannten „hard thermal loops“ sowohl in den Vertizes als auch in aufsummierter Form im Gluon-Propagator. Mit dieser Resummationstechnik wurden meßbare Größen des QG-Plasmas, wie zum Beispiel die Dämpfung der Gluon-Plasma Schwingungen, erstmals eichunabhängig und mit dem physikalisch richtigen Vorzeichen erhalten [3].

Die Liste der erfolgreichen Anwendungen der BP-Resummation in der Störungsrechnung erster Ordnung ist in den letzten Jahren beträchtlich gewachsen. Beispiele sind Rechnungen zur Debye-Abschirmung [4] sowie zur $\mathcal{O}(g)$ -Korrektur der Plasmon-Frequenz [1, 5]. Andererseits konnte in [5] gezeigt werden, daß diese Resummationstechnik nicht universell gültig ist, sondern konkret am Lichtkegel (also bei äußeren Impulsen K mit $K^2 \rightarrow 0$) zusammenbricht.

Da bei den obigen physikalischen Größen thermisch angeregte Quark-Antiquark-Paare nur eine untergeordnete Rolle spielen, soll in dieser Arbeit nur der Eichbosonen-Sektor des QG-Plasmas untersucht werden. Die folgenden Abschnitte dieses Kapitels dienen der Einführung der verwendeten Notation. Es wird die Lagrangedichte des Gluon-Plasmas vorgestellt, die Eichfixierung behandelt, die verbleibende (BRS-) Symmetrie aufgezeigt sowie eine Auflistung bekannter Ergebnisse der Störungstheorie vorgenommen.

1.1 Eichsymmetrie und Lagrangedichte

In dieser Arbeit findet, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, die Minkowski-Metrik (+---) Verwendung. Das Gluon-Plasma (reine „Hohlraumstrahlung“, keine Fermionen) wird beschrieben durch die Lagrangedichte des $SU(N)$ -Eichfeldes,

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad , \quad (1.1)$$

mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. Der Index „YM“ steht für „Yang-Mills“, der Farbindex a läuft von 1 bis $n = N^2 - 1$. Die Lagrangedichte (1.1) beschreibt Gluon-Hohlraumstrahlung, in Analogie zur Quantenelektrodynamik ohne Elektron-Positron-Paare zur Beschreibung der normalen Hohlraumstrahlung. \mathcal{L}_{YM} ist invariant unter der infinitesimalen lokalen Eichtransformation der Gluon-Felder

$$A_\mu^a \rightarrow [A_\mu^a]_{\text{inf}}^U = A_\mu^a - D_\mu^{ab} \Lambda^b \quad , \quad (1.2)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - gf^{abc} A_\mu^c \quad (1.3)$$

und beliebigen Funktionen $\Lambda^b(x)$. Im folgenden sei kurz die Ratio hinter (1.1) bis (1.3) in Erinnerung gerufen.

Die Forderung der Invarianz des Materie-Sektors der QCD, $\mathcal{L}_{\text{quarks}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$, unter der lokalen $SU(N)$ Eichtransformation

$$\psi \rightarrow [\psi]^U = U\psi \quad , \quad \bar{\psi} \rightarrow [\bar{\psi}]^U = \bar{\psi} U^{-1} \quad , \quad U = e^{-ig\Lambda^a(x)T^a} \quad (1.4)$$

zwingt zunächst zu der Erweiterung $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ in der Lagrangedichte. In (1.4) sind $\Lambda^a(x)$ reelle Funktionen und T^a die $n = N^2 - 1$ hermiteschen und spurfreien Generatoren der $SU(N)$. Weiterhin diktiert die Invarianz von $\mathcal{L}_{\text{quarks}}$ (jetzt mit der kovarianten Ableitung D_μ) das Verhalten des Matrix-Hilfsfeldes A_μ unter Umeichungen:

$$D_\mu \rightarrow [D_\mu]^U \stackrel{\dagger}{=} U D_\mu U^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad [A_\mu]^U = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad . \quad (1.5)$$

Definiert man daher einen Feldstärketensor als

$$F_{\mu\nu} := \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad , \quad (1.6)$$

so ist wegen $[F_{\mu\nu}]^U = UF_{\mu\nu}U^{-1}$ die Bildung $\text{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ invariant. Repräsentiert man das Hilfsfeld $A_\mu = : A_\mu^a T^a$ mit Hilfe der $\text{SU}(N)$ -Generatoren T^a (die Felder A_μ^a sind die n Gluonen), führt dies mit $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ und der Orthonormierung $\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ auf die obige Formulierung der Gluon-Eigendynamik in adjungierter Darstellung. Eine Summation über doppelt auftretende Farbindizes ist immer impliziert. Die total antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} sind dabei definiert durch

$$[T^a, T^b] =: i f^{abc} T^c \quad . \quad (1.7)$$

1.2 Pfadintegral-Formulierung

Die Beschreibung der Feldtheorie bei endlicher Temperatur erfolgt durch den Matsubara-Formalismus [6, 7]. Die Zustandssumme ist definiert durch

$$Z_{\text{YM}} = \text{Sp} \left(e^{-\beta H_{\text{YM}}} \right) \quad , \quad (1.8)$$

mit Hamiltonoperator H_{YM} und inverser Temperatur $\beta = 1/T$. Der Operator $e^{-\beta H_{\text{YM}}}$ ist als Zeitentwicklungsoperator interpretierbar, welcher einen Zustand um $\Delta t = -i\beta$ weiterentwickelt. Stellt man die Zustandssumme (1.8) als Funktionalintegral über die Felder $A_\mu(t, \vec{x})$ (definiert im Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = -i\beta$) dar und substituiert $\tau = it$, ergibt sich (s. z.B. [6, 7, 8, 9], aber auch [10])

$$Z_{\text{YM}} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{\int^\beta \mathcal{L}_{\text{YM}}} \Big|_{t=-i\tau} \quad . \quad (1.9)$$

\mathcal{N} ist eine Normierungskonstante. Im Integral $\int^\beta = \int_0^\beta d\tau \int d^3x$ läuft die Integration über die imaginäre Zeit $\tau = it$ entlang der Matsubara-Kontur von Null bis zur inversen Temperatur β . Die Spur wird dabei durch die Randbedingungen der Felder implementiert. Hier gilt für das bosonische Feld A_μ^a

$$A_\mu^a(\tau = 0, \vec{x}) = A_\mu^a(\tau = \beta, \vec{x}) \quad , \quad (1.10)$$

während Fermionen antiperiodische Randbedingungen bekämen. Wegen der Periodizität (1.10) in τ läßt sich eine Zerlegung in diskrete Fouriermoden mit den sogenannten Matsubara-Frequenzen ω_n vornehmen:

$$A_\mu^a(\tau, \vec{x}) = \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} A_\mu^a(\omega_n, \vec{x}) \quad , \quad \omega_n = 2\pi n T \quad . \quad (1.11)$$

Schreibt man demzufolge einen Viererimpuls als $K = (i\omega_n, \vec{k})$, so läßt sich die Fouriertransformation bezüglich aller vier Komponenten des Arguments sowie ihre Umkehrung

wegen $\omega_n \tau = K_0 t$ in kompakter Weise darstellen:

$$A_\mu^a(x) = \sum_K e^{-iKx} A_\mu^a(K) \quad , \quad A_\mu^a(K) = \int^\beta e^{iKx} A_\mu^a(x) \quad , \quad (1.12)$$

$$\sum_K := \sum_{K_0} \int_k^3 = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad , \quad Kx = i\omega_n(-i\tau) - \vec{k} \vec{x} \quad , \quad (1.13)$$

$$\int^\beta e^{iKx} = \beta V \delta_{n,0} \delta(\vec{k}) =: [K] \quad , \quad \sum_K [K - Q] = 1 \quad . \quad (1.14)$$

Als Eichtheorie benötigt (1.1) bei ihrer Quantisierung eine Fixierung der Eichung. Dies wird durch Einschubung einer Eins in (1.9) erreicht („Faddeev–Popov (FP) Trick“):

$$1 = \Delta[A, B] \int \mathcal{D}U \prod_{a,x} \delta(\mathcal{F}^a[A^U] - B^a) \quad . \quad (1.15)$$

Dabei hängt $B^a(x)$ nicht vom Feld ab, $\int \mathcal{D}U$ symbolisiert eine Integration über die gesamte Eichgruppe, und $\mathcal{F}^a[A]$ stellt die sogenannte Eichbedingung dar. In den kovarianten Eichungen wird z.B. $\mathcal{F}^a = \partial^\mu A_\mu^a$ gewählt. $\Delta[A, B]$ ist ersichtlich eichinvariant, denn eine Umeichung des „Start–A“ kann durch eine Verschiebung unter $\int \mathcal{D}U$ wieder rückgängig gemacht werden. Daraufhin führt man in (1.9) unter $\int \mathcal{D}A_\mu^a$ die Verschiebung $[A_\mu^a]^U \rightarrow A_\mu^a$ aus, so daß das (unendliche) „Volumen“ der Eichgruppe $\int \mathcal{D}U$ abgespalten werden kann:

$$\begin{aligned} Z_{\text{YM}} &= Z_{\text{GP}} \left(\int \mathcal{D}U \right) \quad , \\ Z_{\text{GP}} &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta[A, B] \prod_{a,x} \delta(\mathcal{F}^a[A] - B^a) e^{\int^\beta \mathcal{L}_{\text{YM}}} \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Man beachte, daß bei diesem Schritt die Eichinvarianz sowohl von \mathcal{L}_{YM} als auch von Δ eingegangen ist. Hier ist außerdem der Index „GP“ (für „Gluon–Plasma“) eingeführt worden. Während Z_{YM} den „Eichorbit“ noch enthält und somit durch Integration über eichäquivalente Feldkonfigurationen überzählt, ist die Eichfreiheit durch die Einführung von Z_{GP} behandelt und ausgeschlossen. Da Z_{YM} und somit auch Z_{GP} aufgrund der Definition (1.9) nicht von B^a abhängt, darf man mit Gewicht $e^{\int^\beta G[B]}$ (üblicherweise wird $G[B] = -\frac{1}{2\alpha} B^2$ gewählt) überintegrieren und sodann die Deltafunktion ausnutzen. Damit ist

$$Z_{\text{GP}} = \frac{\mathcal{N}}{Z_{\text{B}}} \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta[A, \mathcal{F}] e^{\int^\beta (\mathcal{L}_{\text{YM}} + G[\mathcal{F}])} \quad , \quad (1.17)$$

mit $Z_{\text{B}} = \int \mathcal{D}B^a e^{\int^\beta G[B]}$. Der Faktor Z_{B} garantiert, daß der Ausdruck unabhängig von Eichparametern bleibt, die durch die Gewichtsfunktion G eingeführt worden waren. Ich absorbiere ihn also an dieser Stelle nicht, wie sonst üblich, in der Normierungskonstanten. Mit Blick auf das Variationsverfahren ist nämlich Z_{GP} in allen Details ernst zu nehmen, da es nicht nur als erzeugendes Funktional für Greensfunktionen dient, sondern explizit ausgewertet werden muß.

Das Funktional Δ kann formal als eine Determinante geschrieben werden. Zuerst be-
gibt man sich in (1.15) entlang dem „Eichorbit“ an die „Stelle“ der Delta–Zacke (im

folgenden wieder A_μ^a genannt). Sodann genügt, um sie zu kreuzen, die infinitesimale Um-eichung:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \int \mathcal{D}\Lambda^a \prod_{a,x} \delta(\mathcal{F}^a[A_\mu^b - D_\mu^{bc}\Lambda^c] - B^a) \\ &= \int \frac{\mathcal{D}\phi^a}{\left| \det \frac{\delta\phi^a}{\delta\Lambda^b} \right|_{a,x}} \prod_{a,x} \delta(\phi^a) \quad , \quad \phi^a := \delta\text{-Inhalt} ; \\ \rightsquigarrow \Delta &= \left| \det \frac{\delta\phi^a}{\delta\Lambda^b} \right|_{\phi=0} =: |\det \mathcal{M}^{ab}| \quad .\end{aligned}$$

Bis auf ein irrelevantes Vorzeichen ist dabei

$$\mathcal{M}^{ab} = \frac{\delta\mathcal{F}^a[A]}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb} \quad (1.18)$$

der sogenannte FP-Operator. Schließlich kann man Δ als Integral über Grassmann-Felder, die FP-Geister, darstellen (s. z.B. [11], [12]):

$$\Delta = |\det \mathcal{M}^{ab}| = \left| \int \mathcal{D}(\bar{c}^a c^b) e^{-\int d^4x \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b} \right| = \left| \int \mathcal{D}(\bar{c}^a c^b) e^{\int \bar{c}^a i\xi^a \mathcal{M}^{ab} c^b} \right| \quad . \quad (1.19)$$

Hier ist ξ eine frei wählbare Phase, die unter den Betragsstrichen eingeführt werden durfte, um besser mit den Notationen verschiedener Autoren vergleichen zu können (z.B. $\xi = -i$ in [5]). Benutzt man Z_{GP} lediglich als erzeugendes Funktional von Greensfunktionen, ist eine komplexe Phase irrelevant. Dagegen müssen bei einer expliziten Auswertung von Z_{GP} (vgl. Kapitel 4.1) die Betragsstriche restauriert werden. Damit ergibt sich als endgültige Formulierung von (1.9) (bis auf die Betragsstriche um die FP-Determinante):

$$Z_{\text{GP}} = \frac{\mathcal{N}}{Z_{\text{B}}} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^{\int \mathcal{L}_{\text{GP}}} \quad (1.20)$$

mit der Lagrangedichte in eichfixierter Form (und der Standardwahl der Gewichtsfunktion, $G = -\frac{1}{2\alpha} B^2$),

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} \quad , \quad (1.21a)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad , \quad (1.21b)$$

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = G[\mathcal{F}] = -\frac{1}{2\alpha} (\mathcal{F}^a[A])^2 \quad , \quad \mathcal{L}_{\text{FP}} = i\xi \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b \quad . \quad (1.21c)$$

Die noch offengelassene Eichbedingung $\mathcal{F}^a[A]$ ist ein beliebiges Funktional des Feldes A , so daß der FP-Operator (1.18) invertierbar ist (denn sonst verschwindet $\det \mathcal{M}$). In *kovarianter Eichung* wird z.B. $\mathcal{F}^a = \partial^\mu A_\mu^a$ gesetzt, wie bereits oben erwähnt. Damit die Lagrangedichte (1.21) dann hermitesch ist, gelte neben $A^\dagger = A$ für die Geister $c^\dagger = c$ und damit $(\xi \bar{c})^\dagger = \xi \bar{c}$ [13].

1.3 BRS-Invarianz in linearen Eichungen

Die relevante Symmetrie der eichfixierten Lagrangian (1.21) mit *linearer* Eichbedingung \mathcal{F} ist die BRS-Invarianz [14] (mit dem globalen Grassmann-Parameter ω)

$$\delta_B A_\mu^a = -\omega D_\mu^{ab} c^b \quad , \quad (1.22a)$$

$$\delta_B (\xi \bar{c}^a) = \omega \frac{i}{\alpha} \mathcal{F}^a \quad , \quad (1.22b)$$

$$\delta_B c^a = \omega g \frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \quad . \quad (1.22c)$$

Dabei ist der Eichfeld-Term separat invariant (weil $\delta_B A$ lediglich eine spezielle Eichtransformation ist), wohingegen der Eichfixierungs- und der Geist-Term nur zusammen invariant sind. Da in der Literatur normalerweise so vorgegangen wird, daß nach Postulierung der BRS-Transformation die Invarianz der Theorie schlichtweg nachgeprüft wird, soll an dieser Stelle einmal eine *Herleitung* der Symmetrie gegeben werden.

Inspiziert von der Form der infinitesimalen Eichsymmetrie (1.2), $[A_\mu]_{\text{inf}}^U = A_\mu - D_\mu \Lambda$, kann man mit der speziellen Wahl $\Lambda^a = \omega c^a$ das Transformationsverhalten des Eichfeldes (1.22a) fordern. Wegen

$$\delta_B \mathcal{L}_{\text{YM}} = 0 \quad (1.23)$$

müssen also, um eine Symmetrie der eichfixierten Theorie zu erhalten, die Transformations-eigenschaften der Geistfelder so bestimmt werden, daß

$$\delta_B (\mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.24)$$

gilt (evtl. bis auf eine totale Ableitung, denn eine Symmetrie der Wirkung $S_{\text{GP}} = \int^\beta \mathcal{L}_{\text{GP}}$ ist gesucht).

Für die BRS-Variation der Eichbedingung gilt

$$\delta_B \mathcal{F}^a[A] = \frac{\delta \mathcal{F}^a}{\delta A_\mu^b} \delta_B A_\mu^b = -\omega \mathcal{M}^{ab} c^b \quad .$$

Damit folgt für die Variation (1.24)

$$\delta_B (\mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}) = -\frac{1}{\alpha} \mathcal{F}^a \left(-\omega \mathcal{M}^{ab} c^b \right) + i (\delta_B (\xi \bar{c}^a)) \mathcal{M}^{ab} c^b + i (\xi \bar{c}^a) \delta_B (\mathcal{M}^{ab} c^b) \quad .$$

An dieser Stelle ist es natürlich, (1.22b) zu fordern, da dann nur noch der letzte Term übrigbleibt. Unter der Annahme *linearer* Eichbedingungen $\mathcal{F}[A]$ (d.h. $\delta^2 \mathcal{F} / \delta A^2 = 0$) ist also

$$\begin{aligned} \delta_B (\mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}) &= i (\xi \bar{c}^a) \delta_B \left(\frac{\delta \mathcal{F}^a}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb} c^b \right) \\ &= i (\xi \bar{c}^a) \frac{\delta \mathcal{F}^a}{\delta A_\mu^c} \left[g f^{cbd} \omega \left(D_\mu^{de} c^e \right) c^b + D_\mu^{cb} \left(\delta_B c^b \right) \right] \\ &= i (\xi \bar{c}^a) \frac{\delta \mathcal{F}^a}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb} \left[\omega g \frac{1}{2} f^{bde} c^e c^d + \delta_B c^b \right] \quad . \end{aligned}$$

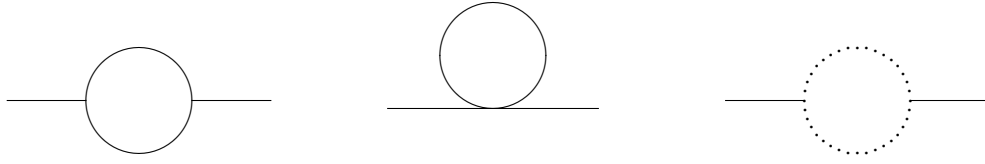


Abbildung 1.1: Beiträge zur führenden Ordnung der Gluon-Selbstenergie. Durchgezogene Linien symbolisieren Gluon-Propagatoren, gepunktete Linien stehen für Geist-Propagatoren.

Dabei ist im letzten Schritt die Jacobi-Identität zur Umformung des ersten Terms benutzt worden. Somit ist auch die letzte der BRS-Transformations-Gleichungen, (1.22c), hergeleitet, denn damit ist

$$\left[\quad \right] = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \delta_{\text{B}}(\mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}) = 0 \quad .$$

Es ist übrigens möglich, die BRS-Transformation aufzuschreiben, ohne die Form der im vorigen Abschnitt eingeführten Gewichtsfunktion G zu spezifizieren. In diesem Fall lautet Gleichung (1.22b)

$$\delta_{\text{B}}(\xi \bar{c}^a) = -i\omega \frac{\delta G[\mathcal{F}]}{\delta \mathcal{F}^a} \quad . \quad (1.25)$$

Mit der Wahl $G = -\frac{1}{2\alpha} \mathcal{F}^2$ ergibt sich daraus wieder die oben angegebene Transformation.

1.4 Resultate der Störungstheorie im Hochtemperaturlimes

Hier werde ich kurz diejenigen Ergebnisse zusammenstellen, welche im zweiten Teil der Arbeit benötigt werden. Konkret ist dies die Struktur des Gluon-Propagators in führender Ordnung.

Der volle Gluon-Propagator hängt über die Schwinger-Dyson-Gleichung

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^0 + G_{\mu\sigma}^0 \Pi^{\sigma\tau} G_{\tau\nu} \quad (1.26)$$

vom nackten Propagator G^0 und der Gluon-Selbstenergie Π ab. Letztere hat in führender Ordnung und unabhängig von der Eichfixierung die Gestalt (vgl. Abb. 1.1)

$$\Pi_{\mu\nu}(K) = \Pi_t(K) \mathbf{A}_{\mu\nu}(K) + \Pi_\ell(K) \mathbf{B}_{\mu\nu}(K) \quad . \quad (1.27)$$

Die hier verwendeten Lorentz-Tensoren stellen die inzwischen etablierte Version [15] einer Basis im Raum der symmetrischen Matrizen dar.

$$\mathbf{A} = g - \mathbf{B} - \mathbf{D} \quad , \quad \mathbf{B} = \frac{V \circ V}{V^2} \quad , \quad \mathbf{C} = \frac{K \circ V + V \circ K}{\sqrt{2} K^2 k} \quad , \quad \mathbf{D} = \frac{K \circ K}{K^2} \quad , \quad (1.28)$$

wobei $V = K^2 U - (UK)K$ ist. $U = (1, \vec{0})$ stellt die Vierergeschwindigkeit des ruhenden Wärmebades dar. Da jeder vom Impuls K abhängige symmetrische Tensor nur von K und U sowie der Metrik g „weiß“, muß er sich in der Basis (1.28) aufspannen lassen. Weitere Darstellungen der vier Matrizen finden sich im Anhang C, werden aber erst später benötigt.

Wertet man die Beiträge von Abb. 1.1 aus und beschränkt sich auf die führende Ordnung $\mathcal{O}(g^2 T^2)$, ergibt sich für die Koeffizienten in (1.27) explizit

$$\Pi_t(K) = \frac{3}{2} m^2 g \left(\frac{K_0}{k} \right) \quad , \quad \Pi_\ell(K) = 3m^2 \left(1 - g \left(\frac{K_0}{k} \right) \right) \quad , \quad (1.29)$$

mit $m^2 = g^2 N T^2 / 9$ und

$$g(z) = z^2 - \frac{1}{2} z (z^2 - 1) \ln \left(\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \right) \quad . \quad (1.30)$$

Der *nackte* Gluon-Propagator (wie er sich aus dem quadratischen Anteil der Lagrange-dichte (1.21) ergibt) lautet in kovarianten Eichungen

$$G^0 = \frac{1}{K^2} \left(g + (\alpha - 1) \frac{K \circ K}{K^2} \right) = \frac{1}{K^2} (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \alpha \mathbf{D}) \quad . \quad (1.31)$$

Da der führende Anteil der Selbstenergie keinen Anteil proportional zu den Matrizen C und D hat, ergibt sich daraus mittels (1.26) der Gluon-Propagator in *führender* (= wahrer nullter = true zeroth = **tz**) Ordnung als

$$G^{\text{tz}} = \Delta_t \mathbf{A} + \Delta_\ell \mathbf{B} + \alpha \Delta_0 \mathbf{D} \quad , \quad (1.32)$$

mit den Koeffizienten

$$\Delta_{t/\ell}(K) = \frac{1}{K^2 - \Pi_{t/\ell}(K)} \quad , \quad \Delta_0(K) = \frac{1}{K^2} \quad . \quad (1.33)$$

An dieser Stelle ist die Ratio erkennbar, die hinter Braaten und Pisarskis Argumentation [2] steckt. Benötigt man den Gluon-Propagator bei *softem* äußeren Impuls $K \sim gT$, so hat der führende Beitrag zur Selbstenergie die gleiche Größenordnung $\mathcal{O}(g^2 T^2)$ wie der inverse nackte Propagator. Daher ist man gezwungen, die harten Loopimpulse, welche diesen Beitrag zu Π ausmachen (die sogenannten „hard thermal loops“ = HTL's), bereits in tiefster Ordnung mit zu berücksichtigen.

Analog erhalten auch die Vertizes schon in tiefster Ordnung Korrekturen durch HTL-Einsetzungen, falls alle äußeren Impulse *soft* sind (Abb. 1.2). Die resummierten Vertizes haben in führender Ordnung die Form

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}^{\text{tz}(3)}(K_1, K_2, K_3) = \Gamma_{\mu\nu\sigma}^{0(3)}(K_1, K_2, K_3) + \delta\Gamma_{\mu\nu\sigma}^{(3)}(K_1, K_2, K_3) \quad , \quad (1.34)$$

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma\tau}^{\text{tz}(4)}(K_1, K_2, K_3, K_4) = \Gamma_{\mu\nu\sigma\tau}^{0(4)}(K_1, K_2, K_3, K_4) + \delta\Gamma_{\mu\nu\sigma\tau}^{(4)}(K_1, K_2, K_3, K_4) \quad , \quad (1.35)$$

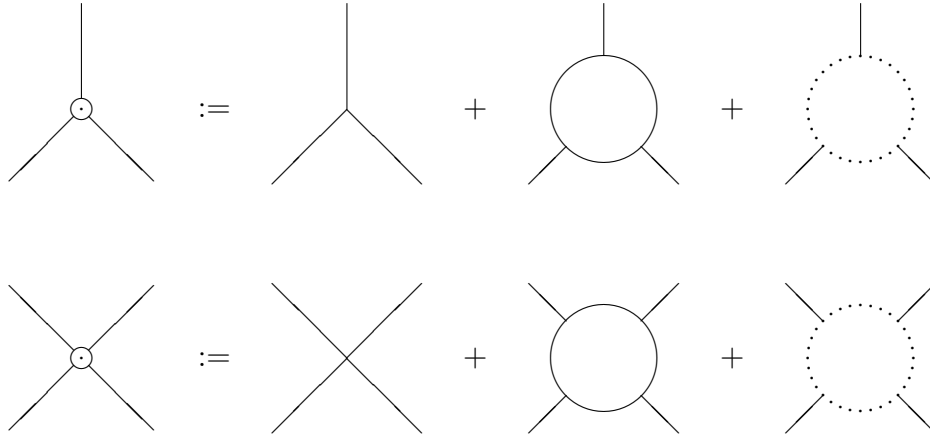


Abbildung 1.2: HTL-Korrekturen zum Gluon-Dreier- und -Vierervertex

wobei die Farbindizes weggelassen worden sind. Die nackten Anteile lauten

$$\left(\Gamma^{0(3)}\right)_{\mu\nu\sigma}^{abc}(K_1, K_2, K_3) = igf^{abc} \left\{ g_{\mu\nu}(K_1 - K_2)_\sigma + \text{zykl} \left(\begin{matrix} \mu\nu\sigma \\ 123 \end{matrix} \right) \right\}, \quad (1.36)$$

$$\left(\Gamma^{0(4)}\right)_{\mu\nu\sigma\tau}^{abcd}(K_1, K_2, K_3, K_4) = -g^2 \left\{ f^{abe} f^{ecd} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau} g_{\nu\sigma}) + \text{zykl} \left(\begin{matrix} \nu\sigma\tau \\ bcd \end{matrix} \right) \right\}. \quad (1.37)$$

Die HTL-Korrekturen $\delta\Gamma$ ergeben sich aus der Auswertung der Diagramme in Abbildung 1.2 in führender Ordnung (s. z.B. [2]), sollen hier jedoch nicht angegeben werden.

Es ist möglich, diese „neue nullte“ Ordnung (true zeroth order) in manifest eichinvarianter Form als eine effektive Wirkung zu formulieren [16]. Diese generiert dann die führenden Anteile aller *Soft*-Amplituden. Als qualitativ neues Merkmal hat die resumierte Theorie auch „Vertizes“ mit mehr als vier Beinen, welche dann nur noch den HTL-Anteil haben. Solche n -Vertizes werden in dieser Arbeit jedoch keine Verwendung finden, sie sollen an dieser Stelle der Vollständigkeit halber nur erwähnt werden.

Teil I

Thermische Ward-Identitäten

Kapitel 2

Ward–Identitäten für Gluon–Greensfunktionen

Ward–Identitäten, hier jene der thermischen Feldtheorie, sind essentiell für Rechnungen im Rahmen der Störungstheorie. Sie werden gewinnbringend eingesetzt, um die Komplexität von algebraischen Ausdrücken auf ein überschaubareres Niveau herunterzubringen, da sie im allgemeinen erlauben, n -beinige Greensfunktionen durch solche mit $(n - 1)$ Beinen auszudrücken. Als Braaten und Pisarski (BP) die Notwendigkeit einer Resummation schon in führender Ordnung bei *soften* äußeren Impulsen zeigten [2], leiteten sie aus der algebraischen Struktur der neuen effektiven Vertizes $\Gamma^{\mathbf{t}\mathbf{z}} = \Gamma^0 + \delta\Gamma$ ab, daß sie den Ward–Identitäten

$$Q_3^{\mu_3} \delta\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{123}) = \Pi_{\mu_{12}}(Q_1) - \Pi_{\mu_{12}}(Q_2) \quad , \quad (2.1)$$

$$Q_4^{\mu_4} \delta\Gamma_{\mu_{1234}}(Q_{1234}) = -\delta\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{1+4,2,3}) + \delta\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{1,2+4,3}) \quad (2.2)$$

genügen (zur Notation vgl. unten). In [17] bezeichnen sie diese Identitäten allerdings ehrlicher als „bloße Relationen zwischen Integralen“.

In diesem Kapitel soll die Herleitung der thermischen Ward–Identitäten sowohl für den resummierten Gluon–Propagator als auch für die resummierten Gluon–Dreier– und Vierervertizes „auf eigene Füße gestellt“ werden. Dabei ist die Kenntnis der algebraischen Struktur der HTL–Ergänzungen zu den nackten Greensfunktionen nicht erforderlich – man kann die Eichinvarianz der effektiven Wirkung [16] ausnutzen, um auf dem Standardweg über die BRS–Invarianz des eichfixierten erzeugenden Funktionals die Ward–Identitäten zu erhalten. Der entscheidende Unterschied zur Herleitung der $T = 0$ –Identitäten ist dabei die konsequente Beachtung der BP–Neusortierung der Greensfunktionen, sobald eine diagrammatische Entwicklung vorgenommen wird.

2.1 Eine allgemeine Identität

Während Kobes, Kunstatter und Rebhan [18] die Eichabhängigkeit des die 1PI–Diagramme erzeugenden Funktionals ausnutzen, um die Grundlage zur Herleitung von Ward–

Identitäten in einer sehr weiten Klasse von Eichungen (einschließlich *background field gauges*) zu legen, wird meine Vorgehensweise eher analog zu der von Becher, Böhm und Joos [19] sein und sich auf lineare Eichungen beschränken.

Zunächst soll eine allgemeine Eigenschaft hergeleitet werden, aus welcher dann speziell die thermischen Ward-Identitäten für Gluon-Greensfunktionen abgeleitet werden können. Dazu wendet man die BRS-Transformation (1.22) auf das erzeugende Funktional der vollen Greensfunktionen

$$W[J, \bar{\rho}, \rho] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^{\int^\beta (\mathcal{L} + \Sigma)} \quad , \quad (2.3)$$

$$\text{mit} \quad \Sigma := J^{\mu a} A_\mu^a + \bar{c}^a \rho^a + \bar{\rho}^a c^a \quad (2.4)$$

an. Mit der Lagrangedichte \mathcal{L} ist in diesem Kapitel immer \mathcal{L}_{GP} aus Gl. (1.21) gemeint. Die Normierungskonstante $\mathcal{N} = \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) \exp(\int^\beta \mathcal{L})$ garantiert $W[0] = 1$. Das Funktional W ist BRS-invariant:

$$\begin{aligned} W + \delta_{\text{B}} W &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^{\int^\beta (\mathcal{L} + \delta_{\text{B}} \mathcal{L} + \Sigma + \delta_{\text{B}} \Sigma)} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^{\int^\beta (\mathcal{L} + \Sigma)} = W \\ \rightsquigarrow \delta_{\text{B}} W &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei die zweite Zeile durch Verschiebungen unter dem Funktionalintegral zustande kommt, welche die BRS-Transformation genau wieder aufheben, also $A \rightarrow A - \delta_{\text{B}} A$ usw.

Andererseits folgt wegen

$$\begin{aligned} \delta_{\text{B}} \Sigma &= J^{\mu a} \delta_{\text{B}} A_\mu^a + (\delta_{\text{B}} \bar{c}^a) \rho^a + \bar{\rho}^a \delta_{\text{B}} c^a \\ &= -\omega \left[J^{\mu a} D_\mu^{ab} c^b - \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}^a[A] \rho^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \bar{\rho}^a c^b c^c \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

aus (2.5) mit $\delta_{\text{B}} \mathcal{L} = 0$ und infinitesimalem ω :

$$\begin{aligned} W + \delta_{\text{B}} W &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) \left\{ e^{\int^\beta \delta_{\text{B}} \Sigma} \right\} e^{\int^\beta (\mathcal{L} + \delta_{\text{B}} \mathcal{L} + \Sigma)} \\ &\approx \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) \left\{ 1 + \int^\beta \delta_{\text{B}} \Sigma + \mathcal{O}(\omega^2) \right\} e^{\int^\beta (\mathcal{L} + \Sigma)} \\ &= W + \left\{ \int^\beta \delta_{\text{B}} \Sigma \right\}_{\text{Felder} \rightarrow \delta_{\text{B}} \text{Quellen}} W + \mathcal{O}(\omega^2) \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

In (2.6) mußte auf den Graßmann-Charakter von ω , $\bar{\rho}$ und ρ geachtet werden. Aufgrund von $\delta_{\text{B}} W = 0$ ergibt sich daraus die Beziehung

$$0 = \int^\beta \left\{ J^{\mu a} d_\mu^{ab} \delta_{\bar{\rho}^b} - \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}^a[\delta_J] \rho^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \bar{\rho}^a \delta_{\bar{\rho}^b} \delta_{\bar{\rho}^c} \right\} W[J, \bar{\rho}, \rho] \quad , \quad (2.8)$$

wobei hier die Kurzschreibweise

$$d_\mu^{ab} := D_\mu^{ab} \Big|_{A \rightarrow \delta_J} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} \delta_{J^\mu c} \quad (2.9)$$

eingeführt wurde. Nach Differentiation nach einer Antigeist-Quelle $\rho^d(z)$ sowie anschließend Nullsetzen der Geist-Quellenfelder folgt schließlich die „allgemeine Ward-Identität“ (vgl. (12-132) in [11])

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{F}^d[\delta_J](z) W[J] = \int_y^\beta J_\mu^a(y) d^{\mu,ab}(y) D_J^{bd}(y, z) \quad . \quad (2.10)$$

Dabei wurde die Schreibweise

$$D_J^{bd}(y, z) := -\delta_{\bar{\rho}^b(y)} \delta_{\rho^d(z)} W[J\bar{\rho}\rho] \Big|_{\bar{\rho}=\rho=0} \quad (2.11)$$

für einen Geist-Propagator in Anwesenheit der Quelle J benutzt. Die Beziehung (2.10) habe ich insofern als „allgemeine Ward-Identität“ bezeichnet, als sich aus ihr alle Identitäten für n -Punkt-Funktionen mit (im diagrammatischen Sinne) ausschließlich gluonischen Beinen herleiten lassen.

2.2 Gluon-Propagator

Da die BRS-Transformation und somit auch die „allgemeine Ward-Identität“ (2.10) ohnehin nur in linearen Eichungen gelten, wird hier die Eichbedingung zu

$$\mathcal{F}^a[A] = f^\mu A_\mu^a \quad (2.12)$$

spezifiziert. Im Hinblick auf kovariante Eichungen hat man also sofort $f^\mu \rightarrow \partial^\mu$ vor Augen. Der Vierervektor f^μ soll in diesem Abschnitt jedoch noch allgemein bleiben, damit die hier hergeleitete Ward-Identität für den Gluon-Propagator auf verschiedene lineare Eichungen angewandt werden kann (im zweiten Teil der Arbeit wird neben kovarianter auch in Coulomb- und axialen Eichungen gearbeitet).

Eine Zweipunktfunktion bringt wird per Anwendung von $\delta_{J_\mu^a(x)}$ auf (2.10) ins Spiel gebracht. Nach $J \equiv 0$ ($\leadsto \delta_J$ muß J rechts treffen) ergibt sich

$$\frac{1}{\alpha} f^\nu(z) G_{\mu\nu}^{ad}(x, z) = d_\mu^{ab}(x) D_J^{bd}(x, z) \Big|_{J=0} \quad . \quad (2.13)$$

Hier ist der Gluon-Propagator G definiert als

$$G^{\mu\nu,ad}(x, z) := \delta_{J_\mu^a(x)} \delta_{J_\nu^d(z)} W[J] \Big|_{J=0} \quad . \quad (2.14)$$

2.2.1 In $\mathcal{O}(1)$

Mit Hilfe der Annahme, die Greensfunktionen ließen sich in einer g -Potenzreihe wie z.B. $G = G^{\text{tz}} + G^{\text{tf}} + \dots$ darstellen, kann man Gleichung (2.13) in g -Ordnungen ansehen. Der Index „tz“ bedeutet dabei „true zeroth order“ bzw. „wahre nullte Ordnung“ – „wahre“ Ordnungen sind analog zu Kapitel 1.4 im BP-Sinne gemeint, also mit Resummation bei

Soft-Impulsen – , „tf“ steht für „true first“ etc. . Schreibt man also (2.13) in tiefster Ordnung g^0 auf, so ergibt sich wegen $d_\mu^{ab} \rightarrow \delta^{ab}\partial_\mu + \mathcal{O}(g)$

$$\frac{1}{\alpha} f_\nu(z) G_{\mathbf{tz}}^{\mu\nu,ad}(x, z) = \delta^{ad}\partial_x^\mu D_{\mathbf{tz}}^{bd}(x, z) \quad . \quad (2.15)$$

Nach Fouriertransformation dieser Gleichung (und Weglassen von $\sum e^{-iK(x-z)}$ auf beiden Seiten) sowie unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Geist-Propagator in führender Ordnung keine HTL-Einsetzungen enthält

$$D_{\mathbf{tz}}^{ab} = D_{(0)}^{ab} = -\frac{1}{K^2}\delta^{ab} \quad , \quad (2.16)$$

folgt eine Ward-Identität in „true zeroth order“

$$\frac{1}{\alpha} \tilde{f}_\nu(-K) G_{\mathbf{tz}}^{\mu\nu}(K) = iK^\mu \frac{1}{K^2} \quad (2.17)$$

mit colour-diagonalem Propagator $G_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab}G_{\mu\nu}$. In den kovarianten Eichungen lautet wegen $\tilde{f}(-K) = iK$ diese Identität z.B. $KG_{\mathbf{tz}} = \alpha K/K^2$.

2.2.2 Exakt

An dieser Stelle kann man mit wenig Aufwand die Ward-Identität für den vollen Gluon-propagator G gewinnen. Es gibt die „trivialen Nullen“ im Funktionalintegral: Wegen partieller Integration in $\int \mathcal{D}\bar{c}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) \delta_{\bar{c}^c(x)} e^{\int \beta(\mathcal{L}+\Sigma)} = \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) \left(-\mathcal{M}^{cb}[A] c^b + \rho^c \right)_{(x)} e^{\int \beta(\mathcal{L}+\Sigma)} \\ &= \left(-\mathcal{M}^{cb}[\delta_J] \delta_{\bar{\rho}^b} + \rho^c \right)_{(x)} W[J\bar{\rho}\rho] \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nach Anwendung von $\delta_{\rho^d(z)}$, $\bar{\rho} = \rho = 0$ wird (2.18) zu

$$\mathcal{M}^{cb}[\delta_J](x) D_J^{bd}(x, z) = \delta^{cd}\delta(x-z) W[J] \quad . \quad (2.19)$$

Operiert man mit $\delta\mathcal{F}^c[A]/\delta A^{\mu,a}(x)$ auf die Gleichung (2.13), so daß auf der rechten Seite der FP-Operator $\mathcal{M}[\delta_J]$ entsteht, und vergleicht mit (2.19) bei $J = 0$, so folgt die Ward-Identität für den (vollen) Gluon-Propagator in Ortsdarstellung

$$\frac{1}{\alpha} f^\mu(x) f^\nu(z) G_{\mu\nu}^{ad}(x, z) = \delta^{ad}\delta(x-z) \quad . \quad (2.20)$$

Eine geläufigere Version (s. z.B. [20])¹ ergibt sich nach Fouriertransformation und Unterdrückung von $\sum e^{-iK(x-z)}$ auf beiden Seiten:

$$\tilde{f}^\mu(K) G_{\mu\nu}^{ab}(K) \tilde{f}^\nu(-K) = \alpha \delta^{ab} \quad (2.21)$$

In kovarianten Eichungen gilt also $KGK = \alpha$.

¹Kunstatler stapelt dort etwas hoch: Er behauptet, sein Beweis sei sehr viel einfacher als solche, welche den BRS-Formalismus, wie hier auch geschehen, benutzen. Dabei scheint er zu übersehen, daß eines der von ihm benutzten Ergebnisse (s. Anhang A in [18]) gerade diesem Formalismus entspringt.

Abbildung 2.1: Struktur der 3-Punkt-Ward-Identität. Durchgezogene Linien symbolisieren J -Ableitungen, gepunktete Linien stehen für Differentiationen nach den Geistfeld-Quellen $\bar{\rho}$ (einlaufender Pfeil) und ρ (auslaufender Pfeil). Der dicke Punkt bezeichnet das erzeugende Funktional W .

Abbildung 2.2: Die $\mathcal{O}(g)$ -Beiträge zur 3-Punkt-Ward-Identität. Alle Propagatoren und Vertizes sind in „true zeroth order“ gemeint. Daher sind diejenigen, welche bei Soft-Impulsen zu BP-resummierten Größen werden (Gluon-Propagator und -Dreiervertex), besonders gekennzeichnet.

2.3 Gluon-3-Vertex in $\mathcal{O}(1)$

Ab hier wähle ich kovariante Eichungen, also $f_\mu = \partial_\mu$ in der bisherigen Notation. Becher, Böhm und Joos [19] suggerieren mit ihrer Herleitung von Ward-Identitäten in der QED, zum Extrahieren einer Beziehung für den Dreiervertex die „allgemeine Ward-Identität“ (2.10) zweimal nach der Quelle J zu differenzieren. Nach Ausführung der Differentiationen soll die entstehende Gleichung wieder bei $J \equiv 0$ ausgewertet werden. Dies erzwingt, daß auf der rechten Seite von Gleichung (2.10) eine Ableitung δ_J das J treffen muß. Man erhält

$$\frac{1}{\alpha} \partial_{\mu_3}^{(x_3)} \delta_{J_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} \delta_{J(2)} \delta_{J(3)} W[J] \Big|_0 = d_{\mu_2}^{a_2 b}(x_2) \delta_{J_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} D_J^{ba_3}(x_2, x_3) + 1 \leftrightarrow 2 \quad , \quad (2.22)$$

wobei unter „ $1 \leftrightarrow 2$ “ genau $(\mu_1, a_1, x_1) \leftrightarrow (\mu_2, a_2, x_2)$ zu verstehen ist.

Gleichung (2.22) wird nun *in* Ordnung g^1 ausgewertet. Es ist dabei nötig, in niedrigster Ordnung mit „BP-Philosophie“ zu arbeiten, d.h., Gluon-Propagator $G^{\mathbf{tz}}$ und 3-Gluon-Vertex $\Gamma^{\mathbf{tz}}$ erhalten bei Soft-Impulsen HTL-Korrekturen („true zeroth order“, \mathbf{tz}), Geist-Propagator D und Geist-Gluon-Vertex Γ_h bleiben nackt. Ab jetzt wird der superscript \mathbf{tz} unterdrückt, alle Greensfunktionen sind in niedrigster Ordnung gemeint. Nach Fouriertransformation per $\sum e^{-iQ_i x_i}$ ergibt sich auf beiden Seiten der Gleichung eine energie- und impulserhaltende Deltafunktion $[Q_1 + Q_2 + Q_3]$, die von nun an impliziert ist. Ab hier

arbeite ich explizit in den kovarianten Eichungen $f_\mu(K) \rightarrow -iK_\mu$. In tiefster Ordnung lautet (2.22) also (vgl. Abb. 2.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (-iQ_3)_{\mu_3} G^{\mu_1\rho_1}(Q_1) G(2) G(3) \Gamma_{\rho_{123}}^{a_{123}}(Q_{123}) = \\ - iQ_2^{\mu_2} G^{\mu_1\rho_1}(Q_1) D(Q_2) D(Q_3) \Gamma_{h,\rho_1}^{a_{213}}(Q_{-2,1,3}) + 1 \leftrightarrow 2 \\ - gf^{a_2bc} G^{\mu_{12}}(Q_1) D(Q_3) \delta^{ca_1} \delta^{ba_3} + 1 \leftrightarrow 2 \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ich benutze hier eine verkürzte Notation für die Indizes: Mehrfachindizes sind als Aufzählung gemeint – so lautet beispielsweise der oben vorkommende Geist-Gluon-Vertex Γ_h ausgeschrieben $\Gamma_{h,\rho_1}^{a_2a_1a_3}(-Q_2, Q_1, Q_3)$. Die Propagatoren sind diagonal in ihren Farbindices, d.h. $G_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} G_{\mu\nu}$ und $D^{ab} = \delta^{ab} D$. Benutzt man nun auf der linken Seite der Gleichung die Ward-Identität (2.17) für den „zerth order“ Gluonpropagator, $QG = \alpha Q/Q^2$, so fällt der Eichparameter α heraus. Da der Geist-Gluon-Vertex Γ_h sowie der Geistpropagator D in tiefster Ordnung keine HTL-Korrektur erhalten, kann man deren bekannte „nackte“ Struktur

$$\Gamma_{h,\rho}^{abc}(K, P, Q) = -igf^{abc} Q_\rho \quad , \quad D(Q) = -\frac{1}{Q^2} \quad (2.24)$$

auf der rechten Seite einsetzen (hier wurde im Geistterm $\xi = i$ gewählt; Q ist der Impuls der *aus*laufenden Geistlinie) und die unter der Deltafunktion jederzeit erlaubte Ersetzung $-Q_3 \rightarrow Q_{1+2}$ ausnutzen. Damit ist

$$\begin{aligned} -\frac{i}{Q_3^2} G^{\mu_1\rho_1}(Q_1) G(2) Q_3^{\rho_3} \Gamma_{\rho_{123}}^{a_{123}}(Q_{123}) \\ = -gf^{a_{123}} \frac{1}{Q_3^2} G^{\mu_1\rho_1}(Q_1) \left(\frac{1}{Q_2^2} Q_2 Q_2 - g \right)_{\rho_1}^{\mu_2} + 1 \leftrightarrow 2 \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Multipliziert man beidseitig mit $iQ_3^2 G^{-1}(1) G^{-1}(2)$ und bringt auf der rechten Seite die Gluon-Selbstenergie Π über deren Definition durch die Schwinger-Dyson-Gleichung

$$\left(\frac{1}{G^0(Q)} \right)_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{G(Q)} \right)_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}(Q) \quad (2.26)$$

ins Spiel, ergibt sich mit dem nackten inversen Gluonpropagator $1/G^0 = Q^2 g + (\frac{1}{\alpha} - 1)QQ$ die Ward-Identität für den Gluon-Dreiervertex:

$$Q_3^{\mu_3} \Gamma_{\mu_{123}}^{a_{123}}(Q_{123}) = -igf^{a_{123}} \left\{ \Pi(Q_2) + Q_2 Q_2 - Q_2^2 g \right\}_{\mu_{12}} + 1 \leftrightarrow 2 \quad . \quad (2.27)$$

Dabei wurde Gebrauch von $\alpha QG^{-1} = Q^2 Q$ gemacht, was nach Multiplikation mit dem *tz*-Propagator von rechts zu (2.17) äquivalent ist.

Mit Hilfe der beiden Beziehungen

$$\Gamma_{\mu_{123}}^{a_{123}}(Q_{123}) = igf^{a_{123}} \left\{ \Gamma_{\mu_{123}}^{(0)}(Q_{123}) + \delta \Gamma_{\mu_{123}}(Q_{123}) \right\} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} Q_3^{\mu_3} \Gamma_{\mu_{123}}^{(0)}(Q_{123}) &= Q_3^{\mu_3} \left\{ g_{\mu_{12}}(Q_1 - Q_2)_{\mu_3} + \text{zykl } 123 \right\} \\ &= \left(Q_2^2 g - Q_2 Q_2 \right)_{\mu_{12}} + 1 \leftrightarrow 2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Abbildung 2.3: Diagrammatische Veranschaulichung der 4-Punkt-Ward-Identität

ist es möglich, die Ward-Identität für die HTL-Ergänzung $\delta\Gamma$ zum nackten Dreier-Vertex herauszupräparieren:

$$Q_3^{\mu_3} \delta\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{123}) = \Pi_{\mu_{12}}(Q_1) - \Pi_{\mu_{12}}(Q_2) \quad . \quad (2.30)$$

Dies ist Gleichung (2.17) in [1]. Die erste der „Integral-Identitäten“ von BP ist damit hergeleitet.

2.4 Gluon-4-Vertex in $\mathcal{O}(1)$

Die Vorgehensweise ist inzwischen bekannt. Zunächst bringt man die 4-Punkt-Funktion durch dreimaliges Differenzieren der „allgemeinen Ward-Identität“ (2.10) nach der Quelle J ins Spiel und setzt dann $J = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \partial_{\mu_4}^{(x_4)} \delta_{J_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} \delta_{J(2)} \delta_{J(3)} \delta_{J(4)} W[J] \Big|_0 = \\ \delta_{J_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} \delta_{J(2)} d_{\mu_3}^{a_3 b} (x_3) \delta_{\rho^{a_4}(x_4)} \delta_{\bar{\rho}^b(x_3)} W[J\bar{\rho}] \Big|_0 + \text{zykl. 123} \quad . \quad (2.31) \end{aligned}$$

Diese Relation ist in Abbildung 2.3 diagrammatisch dargestellt.

In $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(g)$ reduziert sich (2.31) auf Gleichung (2.13) in der entsprechenden Ordnung und bringt daher nichts Neues. Die erste interessante Ordnung ist $\mathcal{O}(g^2)$, da dann erstmals (auf der lhs) alle vier Linien im Vierervertex gekoppelt vorkommen können. Die Bezeichnung „lhs“ (für „left hand side“) entspringt dabei der Reihenfolge der Diagramme in Abbildung 2.3 Die ganze Gleichung wird im folgenden durch $\text{lhs} = \text{rhs1} + \text{rhs2}$ symbolisiert. Nach Fouriertransformation und bis auf einen Faktor $\sum[Q_{1+\dots+4}]e^{\{-i(Qx)_{1+\dots+4}\}}$ lauten die $\mathcal{O}(g^2)$ -Beiträge von (2.31)

$$\begin{aligned} \text{lhs} = & \text{Diagram 1} + \left[\text{Diagram 2} + \text{zykl. 123} \right] \\ = & \frac{1}{\alpha} (-iQ_4)_{\mu_4} \left[G^{\mu\rho}(Q) \right]^{1,2,3,4} \times \left\{ \Gamma_{\rho_{1234}}^{a_{1234}}(Q_{1234}) + \right. \\ & \left. + \Gamma_{\rho_{235}}^{a_{235}}(Q_{2,3,1+4}) G^{\rho_{56}}(Q_{2+3}) \Gamma_{\rho_{146}}^{a_{145}}(Q_{1,4,2+3}) + \text{zykl. 123} \right\} \quad , \quad (2.32a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{rhs1} &= \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + \text{zykl. 123} \\
 &= \left\{ -iQ_1^{\mu_1} \Gamma_{\rho_{235}}^{a_{235}}(Q_{2,3,-2-3}) G^{\rho_{56}}(Q_{2+3}) \Gamma_{h,\rho_6}^{a_{154}}(Q_{-1,2+3,4}) D(Q_1) D(Q_4) [G^{\mu\rho}(Q)]^{2,3} + \right. \\
 &\quad - iQ_2^{\mu_2} \Gamma_{h,\rho_3}^{a_{235}}(Q_{-2,3,-2-3}) D(Q_{2+3}) \Gamma_{h,\rho_1}^{a_{514}}(Q_{-2-3,1,4}) D(Q_2) D(Q_4) [G^{\mu\rho}(Q)]^{1,3} + \\
 &\quad \left. + 2.\text{Zeile } 2 \leftrightarrow 3 \right\} + \text{zykl. 123} \quad , \quad (2.32b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{rhs2} &= \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right] + \text{zykl. 123} \\
 &= \left\{ -gf^{a_1bc} \Gamma_{\rho_{321}}^{a_{32c}}(Q_{3,2,1+4}) [G_{\mu\rho}(Q)]^{3,2} G^{\mu_1\rho_1}(Q_{1+4}) \delta^{a_4b} D(Q_4) + \right. \\
 &\quad - gf^{a_2bc} \Gamma_{h,\rho_1}^{ba_{14}}(Q_{1+4,1,4}) G^{\mu_{23}}(Q_3) \delta^{a_3c} G^{\rho_1\mu_1}(Q_1) D(Q_4) D(Q_{1+4}) + \\
 &\quad \left. + 2.\text{Zeile } 2 \leftrightarrow 3 \right\} + \text{zykl. 123} \quad . \quad (2.32c)
 \end{aligned}$$

Bei der Auswahl der jeweils beitragenden Diagramme wurden von vornherein jene nicht berücksichtigt, welche schon die 2-Punkt-Ward-Identität (2.13) in $\mathcal{O}(g^2)$ ausmachen. Dies sind genau die nichtverbundenen Diagramme, welche sich aus Abb. 2.3 ergeben, wenn sich die Beine 1 und 2 zu einem Gluon-Propagator verbinden. Bei der diagrammatischen Repräsentation der obigen Terme wurde der Übersicht halber auf die spezielle Kennzeichnung der resummierten Greensfunktionen verzichtet. Sie sind alle in „true zeroth order“ gemeint, d.h., Gluon-Propagator und Gluon-3-Vertex enthalten HTL-Korrekturen, während Geist-Propagator und Geist-Gluon-Vertex nackt bleiben. Die verkürzte Index-Schreibweise lehnt sich an die Notation des vorigen Abschnittes an. Als zwei Beispiele seien

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{h,\rho_6}^{a_{154}}(Q_{-1,2+3,4}) &\equiv \Gamma_{h,\rho_6}^{a_1 a_5 a_4}(-Q_1, Q_2 + Q_3, Q_4) \\
 \text{und} \quad [G^{\mu\rho}(Q)]^{2,3} &\equiv G^{\mu_2\rho_2}(Q_2) G^{\mu_3\rho_3}(Q_3)
 \end{aligned}$$

genannt. Gluon- und Geistpropagator sind diagonal in ihren beiden Farbindizes.

Zur weiteren Umformung können die bisher erhaltenen Ward-Identitäten in „true zeroth order“ (2.17,2.27) benutzt, kann auf der rechten Seite der nackte Geist-Gluon-Vertex (2.24) eingesetzt und – wann immer nötig – die Existenz der Impulsdeltafunktion ausgenutzt werden, um Ersetzungen wie $-Q_1 \rightarrow Q_{2+3+4}$ durchzuführen. Läßt man überall einen Faktor $iD(Q_4)$ weg, ergibt sich nach Anwendung von $[G_{\varepsilon\mu}^{-1}(Q)]^{1,2,3}$

$$\begin{aligned}
 \text{lhs} &= Q_4^{\varepsilon_4} \Gamma_{\varepsilon_{1234}}^{a_{1234}}(Q_{1234}) + igf^{a_{154}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \Gamma_{\varepsilon_{235}}^{a_{235}}(Q_{2,3,1+4}) \left[g + G(Q_{2+3}) \left(\frac{1}{\alpha} Q_1 Q_1 - G^{-1}(Q_1) \right) \right]_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_5} + \right. \\
 &\quad \left. + igf^{a_{235}} D(Q_{2+3}) (Q_{2+3})_{\varepsilon_1} \left[G^{-1}(Q_2) - G^{-1}(Q_3) + \frac{1}{\alpha} (Q_3 Q_3 - Q_2 Q_2) \right]_{\varepsilon_{23}} \right\} \\
 &\quad + \text{zykl. 123} \quad , \quad (2.33a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{rhs1} = & \ igf^{a_{154}} \times \left\{ \frac{1}{\alpha} (Q_1 Q_1)_{\varepsilon_1 \varepsilon_6} \Gamma_{\varepsilon_{235}}^{a_{235}}(Q_{2,3,1+4}) G^{\varepsilon_{56}}(Q_{2+3}) + \right. \\
 & \left. + \ igf^{a_{235}} D(Q_{2+3}) \left[Q_1 G^{-1}(Q_3) - Q_1 G^{-1}(Q_2) + \frac{1}{\alpha} Q_{2+3} (Q_3 Q_3 - Q_2 Q_2) \right]_{\varepsilon_{123}} \right\} \\
 & + \text{zykl. } 123 \quad , \tag{2.33b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{rhs2} = & \ igf^{a_{154}} \times \left\{ - \Gamma_{\varepsilon_{235}}^{a_{235}}(Q_{2,3,1+4}) G_{\varepsilon_1 \mu_1}^{-1}(Q_1) G^{\mu_1 \varepsilon_5}(Q_{2+3}) + \right. \\
 & \left. + \ igf^{a_{235}} D(Q_{2+3}) (Q_1 + Q_{2+3})_{\varepsilon_1} \left[G^{-1}(Q_2) - G^{-1}(Q_3) \right]_{\varepsilon_{23}} \right\} \\
 & + \text{zykl. } 123 \quad . \tag{2.33c}
 \end{aligned}$$

Nach dem Kürzen identischer Terme auf beiden Seiten (diese Freude sollte sich der mit einem Stift bewaffnete Leser nicht nehmen lassen!) folgt die Ward-Identität für den Gluon-Vierervertex in „true zeroth order“ (s. auch (1.5) in [21]):

$$Q_4^{\mu_4} \Gamma_{\mu_{1234}}^{a_{1234}}(Q_{1234}) = \ igf^{a_{145}} \Gamma_{\mu_{123}}^{a_{523}}(Q_{1+4,2,3}) + \text{zykl. } 123 \quad . \tag{2.34}$$

Bildet man in (2.34) die Spur über zwei der vier freien *colour*-Indizes, beispielsweise per Multiplikation mit $\delta^{a_{12}}$, ergibt sich mit $\delta^{a_{12}} \Gamma_{\mu_{1234}}^{a_{1234}} =: g^2 N \delta^{a_{34}} \Gamma_{\mu_{1234}}$ die in Tadpole-Diagrammen verwendbare abgespeckte Version

$$Q_4^{\mu_4} \Gamma_{\mu_{1234}}(Q_{1234}) = -\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{1+4,2,3}) + \Gamma_{\mu_{123}}(Q_{1,2+4,3}) \quad . \tag{2.35}$$

Da (2.35) für die nackten Vertizes $\Gamma^{(0)}$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu_{123}}^{(0)}(Q_{123}) &= (Q_1 - Q_2)_{\mu_3} g_{\mu_{12}} + (Q_2 - Q_3)_{\mu_1} g_{\mu_{23}} + (Q_3 - Q_1)_{\mu_2} g_{\mu_{13}} \\
 \Gamma_{\mu_{1234}}^{(0)}(Q_{1234}) &= g_{\mu_{14}} g_{\mu_{23}} + g_{\mu_{13}} g_{\mu_{24}} - 2g_{\mu_{12}} g_{\mu_{34}}
 \end{aligned}$$

trivial gilt, folgt mit $\Gamma = \Gamma^{(0)} + \delta\Gamma$ die Ward-Identität für den HTL-Anteil des Vierervertex:

$$Q_4^{\mu_4} \delta\Gamma_{\mu_{1234}}(Q_{1234}) = -\delta\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{1+4,2,3}) + \delta\Gamma_{\mu_{123}}(Q_{1,2+4,3}) \quad . \tag{2.36}$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit (2.17) in [1]. Damit ist auch die zweite von BPs „Integralidentitäten“, (3.33) in [2], hergeleitet.

2.5 Ausblick

Es versteht sich, daß nun mit obiger Verfahrensweise weitere Identitäten hergeleitet werden können. Die Formulierung der allgemeinen Ward-Identität (2.10) mit Hilfe des erzeugenden Funktionals W der Greensfunktionen erwies sich als übersichtlich genug, um eine diagrammatische Interpretation zuzulassen.

Einerseits können Relationen für höhere Korrekturen der 2,3,4-Punkt-Funktionen erhalten werden, wenn man die in diesem Kapitel in jeweils tiefster Ordnung ausgewerteten Gleichungen (2.13,2.22,2.31) in relativer $\mathcal{O}(g)$ betrachtet. So läßt sich z.B. eine Beziehung für die $\mathcal{O}(g)$ -Korrektur zum Dreiververtex Γ^{tf} ableiten, wenn Gleichung (2.22) in

$\mathcal{O}(g^2)$ ausgewertet wird. Es ist vorerst schwer, ein Anwendungsbeispiel für solche Ward-Identitäten zu finden. Möglicherweise aber würde man bei Rechnungen in „next-next-to leading order“ zur Plasmafrequenz einen vergleichbaren Profit aus diesen höheren Ward-Identitäten schlagen können, wie es schon in „next-to“ [5] mit Hilfe der bekannten (und oben erneut hergeleiteten) tz -Identitäten möglich war.

Andererseits können durch eine Erhöhung der Anzahl von J -Ableitungen auf die „allgemeine Ward-Identität“ (2.10) auch Identitäten für n -Vertizes mit $n > 4$ (welche nur in der resummierten Theorie vorkommen) abgeleitet werden. Dazu könnte man jedoch die obige Formulierung auf das per $W = e^V$ definierte erzeugende Funktional V der verbundenen (*connected*) Greensfunktionen umschreiben, um so von vornherein die Anzahl der beitragenden Terme zu verringern.

Teil II

Variationsverfahren

Kapitel 3

Das Variationsverfahren

Ein Variationsverfahren bietet sich immer dann an, wenn ein schwieriges Problem störungstheoretisch nicht mehr behandelbar ist. Ein solcher Fall liegt mit der QCD vor, wenn man (vom Hochtemperatur-Limes herkommend) in Bereiche vordringen will, in denen die Kopplung nicht mehr klein ist. Bestenfalls ist es möglich, in einer sehr spekulativen Weise die Störungsergebnisse in Bereiche tieferer Temperatur (also wachsender Kopplung) extrapolieren, wie dies Schulz in [1] gemacht hat. Er folgt der erhaltenen $\mathcal{O}(g)$ -Korrektur zur longitudinalen Plasma-Frequenz ω bis in Bereiche mit großer Kopplung, um mit dem Verschwinden von ω erste Anzeichen für den erwarteten Phasenübergang aufzuzeigen. Genau an dieser Stelle soll das Variationsverfahren, dessen Herleitung Inhalt dieses Kapitels ist, klärend eingreifen. Mit Feynmans niederschmetternden Kommentaren zur technischen Realisierung von Variationsverfahren [22] im Hinterkopf wird klar, daß damit die Ziele extrem hoch gesteckt sind. Der verwendete Variationsansatz (die *Trial*-Theorie) wird erst im folgenden Kapitel aufgezeigt.

Aus der Quantenmechanik kennt man das Variationsprinzip, welches die Tatsache ausnutzt, daß der tiefste Energieeigenwert eines Systems das Minimum des Erwartungswertes des Hamiltonians, genommen mit einer (bis auf Normierbarkeit und Randbedingungen) beliebigen Wellenfunktion, ist:

$$\frac{\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \geq E_0 \quad (3.1)$$

Benutzt man eine Test-Wellenfunktion ψ mit unbestimmten Parametern, so kann man durch Variation nach diesen Parametern den Erwartungswert minimieren, um eine obere Schranke für die Energie des Grundzustandes zu erhalten. Darüberhinaus wird sich auch $|\psi\rangle$ der Grundzustandswellenfunktion annähern, soweit es seine Parametrisierung zuläßt.

Auch in der Quantenstatistik kann man ähnliche Ungleichungen herleiten. Es sind die Extremaleigenschaften der thermodynamischen Potentiale bekannt, z.B. nimmt die Zustandssumme Z eines Systems im Gleichgewichtszustand ein Maximum bezüglich statistischer Operatoren ρ aus seinem Hilbertraum an:

$$Z[\rho] \leq Z[\rho_{Gl.}] \quad , \quad F[\rho] \geq F[\rho_{Gl.}] \quad . \quad (3.2)$$

Die zweite Ungleichung in (3.2) ist wegen der Definition der Freien Energie $F = -T \ln(Z)$ äquivalent zur ersten. In diesem Sinne ist $F[\rho]$ ein quantenstatistisches Variationsfunktional, dessen Minimaleigenschaft ausgenutzt werden kann, um etwas über ein Ensemble von Teilchen, z.B. über das als kanonisches Ensemble beschriebene Gluon-Plasma, zu lernen.

In Kapitel 8.1 wird die quantenstatistische Herleitung der obigen Ungleichung (3.2) direkt auf eine Feldtheorie übertragen. Hier jedoch favorisiere ich eine andere Version, welche in dem Buch von Feynman [23] zu finden ist. Dabei wird von vornherein in der Pfadintegralformulierung gearbeitet.

3.1 Feynmans Herleitung

Aus der Definition der Freien Energie

$$F_o = -T \ln(Z_o) \quad (3.3)$$

und der Funktionalintegraldarstellung der Zustandssumme einer auf den Feldern ϕ_i definierten Feldtheorie

$$Z_o = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i e^{S_o[\phi_i]} \quad (3.4)$$

ist auf wenigen Zeilen ein Variationsfunktional herleitbar, welches erlaubt, die „zu schwere“ Theorie $S_o = \int^\beta \mathcal{L}_o$ mit einer „einfacheren“ *Trial*-Theorie $S = \int^\beta \mathcal{L}$ zu approximieren.

Dazu schreibt Feynman den Exponenten im Funktionalintegral als $S_o - S + S$ und erweitert mit der Zustandssumme der *Trial*-Theorie, $Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i e^S$:

$$Z_o = \frac{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i e^{S_o - S} e^S}{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i e^S} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i e^S =: \langle e^{S_o - S} \rangle Z \quad , \quad (3.5)$$

wobei das thermische Mittel (im *Trial*-Raum) als

$$\langle \mathcal{O}[\phi_i] \rangle := \frac{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i \mathcal{O}[\phi_i] e^S}{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_i e^S} \quad (3.6)$$

eingeführt worden ist. Mit Hilfe der Annahme, daß $(S_o - S)$ reell sei, kann man nun die Konvexität der Exponentialfunktion

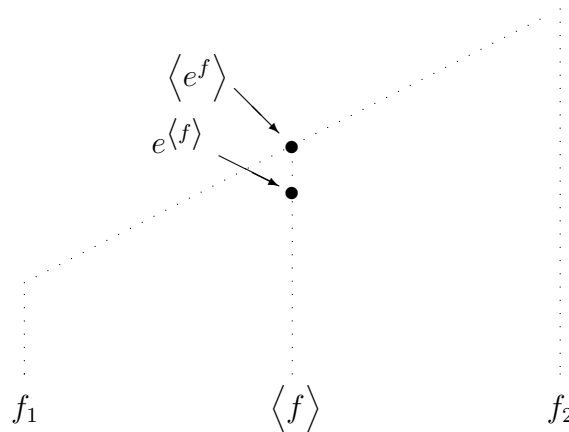
$$\langle e^f \rangle \geq e^{\langle f \rangle} \quad (3.7)$$

zur weiteren Umformung von (3.5) ausnutzen. Hierzu zeigt Abb. 3.1, daß es dabei nicht auf die Verteilung der Stützstellen ankommt. Die Ungleichung (3.7) überführt (3.5) in

$$Z_o \geq e^{\langle S_o - S \rangle} Z \quad .$$

Nimmt man den Logarithmus von beiden Seiten, multipliziert die entstehende Gleichung mit $(-T)$ (was das Ungleichheitszeichen umdreht) und verwendet die Definition (3.3) der Freien Energie, so ergibt sich die zentrale Ungleichung

$$F_o \leq F - T \langle S_o - S \rangle =: \mathcal{V}[S] \quad . \quad (3.8)$$


 Abbildung 3.1: Geometrische Interpretation der Ungleichung $\langle e^f \rangle \geq e^{\langle f \rangle}$

Hier ist F , analog zu (3.3), die Freie Energie der *Trial*-Theorie (die Größen ohne Index sind immer solche aus der *Trial*-Theorie). Da das so eingeführte Variationsfunktional \mathcal{U} durch die Freie Energie F_o der vollen Theorie S_o nach unten beschränkt ist (das Gleichheitszeichen gilt ersichtlich für $S = S_o$), kann man durch seine Minimierung nach der „besten“ *Trial*-Theorie S suchen.

Dieser Punkt ist so entscheidend, daß ich ihn noch einmal mit anderen Worten wiederholen möchte. Gleichung (3.8) erlaubt, verschiedene *Trial*-Ansätze zu untersuchen. Dabei führt eine gute *Trial*-Theorie zu einem tiefen Wert des Variationsfunktionals \mathcal{U} . Daher kann durch eine Minimierung von \mathcal{U} diejenige von mehreren *Trial*-Theorien S bestimmt werden, welche dem Verhalten der eigentlich interessierenden Theorie S_o am nächsten kommt.

3.2 Besonderheiten bei Eichtheorien

Bestückt man das Variationsfunktional (3.8) mit Eichtheorien, so stellt sich sofort die Frage, ob die beiden Theorien S_o und S derselben Eichsymmetrie gehorchen, ja ob sie sogar identisch eichfixiert sein müssen. Im Hinblick auf die geplante Anwendung des Variationsverfahrens auf das Gluon-Plasma sollen diese beiden Fragen hier kurz beleuchtet werden.

Zunächst ist klar, daß beide Theorien auf denselben Feldern definiert sein müssen, um eine Erweiterung des Exponenten um $(S - S)$ in Gleichung (3.5) sinnvoll vornehmen zu können. Da aber von vornherein mit der eichfixierten Version beider Theorien gearbeitet werden kann, gibt es keine Einschränkung der zugelassenen *Trial*-Eichsymmetrie.

Dies ermöglicht es, eine Yang–Mills–Theorie wie das Gluon–Plasma per Variationsfunktional z.B. mit einer abelsch eichinvarianten *Trial*–Theorie zu vergleichen (Näheres dazu wird im nächsten Kapitel dargelegt). Die abelsche Theorie muß dabei lediglich auf die entsprechende Anzahl der Felder in der vollen Theorie erweitert werden.

Weiterhin ist es nicht nötig, beide Theorien identisch eichzufixieren, wie eine kleine Umformulierung der Ungleichung (3.8) zeigt. Bei der Fixierung der Eichung mittels Faddeev–Popov–Trick (vgl. Kapitel 1) war zur Kompensation der Eichparameterabhängigkeit, die mit Hilfe einer Gewichtsfunktion eingeführt werden konnte, ein Faktor $1/Z_B$ aus dem Funktionalintegral herausgezogen worden. Die Zustandssumme (1.20) des Gluon–Plasmas hatte nach erfolgter Abspaltung des Eichorbits die Form

$$Z_{\text{GP}} = \frac{\mathcal{N}}{Z_B} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^{\int^\beta \mathcal{L}_{\text{GP}}} \quad (3.9)$$

bekommen. Es bereitet keinen großen Aufwand, Feynman’s Herleitung des Variationsfunktionals \mathcal{U} auf den Fall auszuweiten, in dem die *Trial*–Theorie mit einer anderen Gewichtsfunktion eichfixiert wurde. Analog zur im vorigen Abschnitt skizzierten Argumentationslinie ergibt sich mit $S_o = S_{\text{GP}}$

$$\begin{aligned} Z_{\text{GP}} &= \frac{\mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^{S_{\text{GP}} - S} e^S}{\mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^S} \frac{Z_b}{Z_B} \frac{\mathcal{N}}{Z_b} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^S \\ &= \langle e^{S_{\text{GP}} - S} \rangle \frac{Z_b}{Z_B} Z \geq e^{\langle S_{\text{GP}} - S \rangle} \frac{Z_b}{Z_B} Z \quad , \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei $Z = \frac{\mathcal{N}}{Z_b} \int \mathcal{D}(A_\mu^a \bar{c}^b c^c) e^S$ die *Trial*–Zustandssumme ist. Das Variationsfunktional \mathcal{U} erhält also durch das Auftreten des Faktors $\frac{Z_b}{Z_B}$ in (3.10) einen zusätzlichen Term:

$$\mathcal{U}[S] = F - T \langle S_{\text{GP}} - S \rangle - T \ln \left(\frac{Z_b}{Z_B} \right) \quad . \quad (3.11)$$

Diese Form des Variationsfunktionals ist diejenige, welche in den folgenden vier Kapiteln benutzt wird.

So einfach sich die Variationsmethode auch darstellt, sind einige Kommentare bereits hier angebracht.

- *Existenz*: Die *Trial*–Zustandssumme Z sollte als Produkt konvergenter Integrale geschrieben werden, um die Erweiterung in Gleichung (3.5) formal rechtfertigen zu können. Dies wird im nächsten Kapitel zu einer euklidischen Lesart der *Trial*–Wirkung $S = \int^\beta \mathcal{L}$ führen (vereinfachend gesagt geht dann für große Werte des Feldes der Integrand e^S gegen Null).
- *Ausleuchtung*: Als *Trial*–Theorie will man eine „behandelbare“ Theorie hinschreiben, welche einige wenige Parameter enthält, die mit dem Variationsverfahren zu bestimmen sind. Dabei steht dieser Wunsch nach Einfachheit der Erfordernis gegenüber, der *Trial*–Theorie soviel Freiheit wie möglich zu lassen, um \mathcal{U} nahe an

sein Minimum bringen zu können. Es ist bekannt, daß die Güte des Variationsansatzes der entscheidende Punkt bei der Anwendung von Variationsmethoden ist. Daher ist eine gewisse Erwartungshaltung im Hinblick auf das Verhalten der zu untersuchenden Theorie (wie hier z.B. das Entwickeln einer thermischen Gluon-Masse) hilfreich.

- *Nebenminima:* Da das Variationsfunktional nach der Wahl der *Trial*-Theorie notwendigerweise nur einen kleinen Bereich im vollen „Variationsraum“ ausleuchtet, ist nicht zu entscheiden, ob nur ein lokales oder wirklich das gesuchte globale Minimum von \mathcal{U} gefunden wurde. Lediglich der Vergleich von \mathcal{U} -Absolutwerten verschiedener *Trial*-Ansätze liefert ein Kriterium für die Güte des jeweiligen Ansatzes.
- *Realität:* Der entscheidende Schritt in der obigen Herleitung war die Annahme der Realität des Exponenten $(S_o - S)$ bzw. $(S_{\text{GP}} - S)$, welche erst die Benutzung der Ungleichung (3.7) erlaubte. Im Eichtheorie-Fall ist dabei insbesondere die Interpretation des Geistfeld-Anteils S_{FP} als reelle Größe kritisch. Um die thermischen Mittel in (3.11) auszuwerten, wird daher im nächsten Kapitel die delikate Annahme gemacht werden müssen, daß die Ungleichung auch noch für hermitesche Exponenten gilt.

Kapitel 4

Die *Trial*-Theorie in kovarianten Eichungen

In diesem Kapitel wird der Variationsansatz, die zur Auswertung des Funktionals $\mathcal{U}[S]$ aus Gleichung (3.11) benötigte *Trial*-Theorie S , ausgearbeitet. Daß dabei eine Einsicht in das Verhalten der zu studierenden Theorie S_{GP} nützlich ist, wurde schon im vorigen Kapitel erwähnt. Führt man sich die einfache Struktur des in der Störungstheorie erhaltenen Gluon-Propagators (1.32) (in kovarianten Eichungen mit Eichparameter α)

$$G_{\mu\nu}(K) = \frac{1}{K^2 - \Pi_t(K)} \mathbf{A}_{\mu\nu} + \frac{1}{K^2 - \Pi_\ell(K)} \mathbf{B}_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{K^2} \mathbf{D}_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

vor Augen, so liegt die Idee auf der Hand, genau diese Struktur durch eine einfachere Theorie zu simulieren. Die Funktionen $\Pi_{t,\ell}$ sind bekannt und werden im langwelligen Limes ($\vec{k} \rightarrow 0$) beide zur „thermischen Gluon-Masse“ $m = g\sqrt{N}T/3$.

Als *Trial*-Theorie soll ein (massives und $n = N^2 - 1$ -fach genommenes) abelsches Eichfeld untersucht werden. Der Schlüsselpunkt zur Simulation des Gluon-Propagators (4.1) ist dabei die Einbringung eines Massenterms. Normalerweise (vgl. z.B. [11] zum Stueckelberg-Lagrangian) wird mit Einführung der Photonmasse die Eichsymmetrie der Theorie gebrochen. Es ist allerdings möglich, die Eichinvarianz aufrechtzuerhalten, wenn ein nichtlokaler Massenterm akzeptiert wird. Ausgangspunkt einer solchen Formulierung ist eine (schwer lesbare und fehlerbehaftete) Arbeit von Manka [24]. Dort erfolgt die Darstellung mit einer im Fock-Raum quantisierten *Trial*-Theorie. Manka beschreibt jedoch weder den Masseneinbau in einer verständlichen Weise, noch enthält seine *Trial*-Theorie einen freien Eichparameter. Die sich beim Versuch, den von ihm gezeichneten Weg nachzugehen, ergebenden Schwierigkeiten werden in Kapitel 8 dargestellt und ließen es sinnvoll erscheinen, die hier dargestellte Funktionalintegral-Formulierung zu verfolgen.

Konkret sei die Lagrangedichte der *Trial*-Theorie gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4} F_{\text{ab}}^2 + \frac{1}{2} A_\mu (MA)^\mu \quad . \quad (4.2)$$

Hier ist $F_{\text{ab}}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, sowie

$$(MA)^\mu(x) = \int_{x'}^\beta m^{\mu\nu}(x-x') A_\nu(x') \quad , \quad (4.3a)$$

$$m^{\mu\nu}(x) = \sum_K e^{-iKx} \left(m_t^2 \mathbf{A}^{\mu\nu}(K) + m_\ell^2 \mathbf{B}^{\mu\nu}(K) \right) \quad . \quad (4.3b)$$

Zur Definition der Lorentztensoren $\mathbf{A}^{\mu\nu}$ und $\mathbf{B}^{\mu\nu}$ siehe (1.28). Die beiden Parameter m_t und m_ℓ sind somit als noch nicht bestimmte Konstanten in die Theorie eingeflossen und sollen später durch Minimierung des Variationsfunktional bestimmt werden. Mit einem Blick auf (4.3) wird ersichtlich, daß es möglich ist, sogar eine Impulsabhängigkeit der *Trial*-Massen $m_{t,\ell}$ zuzulassen (s. Kapitel 7). Hier jedoch soll zunächst der technisch einfachste Fall konstanter Massen behandelt werden. Manka äußert die Vermutung, daß eine Variation solcher *Trial*-Massen den Wert $g\sqrt{N}T/3$ reproduzieren könnte.

Die abelsche Version der infinitesimalen Eichtransformation (1.2) lautet

$$[A_\mu]_{\text{inf}}^U = A_\mu - \partial_\mu \Lambda \quad . \quad (4.4)$$

Daher ist wegen der Transversalität der Matrizen in (4.3) ($K_\mu \mathbf{A}^{\mu\nu} = K_\mu \mathbf{B}^{\mu\nu} = 0$) neben dem üblichen Kinetik-Term F^2 auch der Massenterm abelsch eichinvariant und man kann (4.2) analog zur vollen Theorie (1.20) quantisieren. Konkret wähle ich die kovarianten Eichungen (der Plural soll an den noch nicht festgelegten Eichparameter α erinnern)

$$\mathcal{F}^a[A] = \partial^\mu A_\mu^a \quad . \quad (4.5)$$

Der FP-Operator (1.18) lautet im hier vorliegenden abelschen Fall somit

$$\mathcal{M}_{\text{ab.,kov.}}^{ab} = \delta^{ab} \partial^\mu \partial_\mu \quad . \quad (4.6)$$

Damit liest sich die Zustandssumme der *Trial*-Theorie

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu e^{\int^\beta \mathcal{L}_{\text{inv}}} = \frac{\mathcal{N}}{Z_B} \int \mathcal{D}(A_\mu \bar{c} c) e^{\int^\beta (\mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{fp})} \quad (4.7)$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4} F_{\text{ab.}}^2 + \frac{1}{2} A_\mu (MA)^\mu \quad , \quad \mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial A)^2 \quad , \quad \mathcal{L}_{fp} = i\xi \bar{c} \partial^2 c \quad . \quad (4.8)$$

Die Indizes zur Bezeichnung des Eichfixierungs- und des Geistterms der *Trial*-Theorie werden nur zur besseren Unterscheidung von denen der vollen Theorie kleingeschrieben.

Aus der Darstellung

$$\begin{aligned} S &= \int^\beta (\mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{fp}) \\ &= \sum_K \left(-\frac{1}{2} A_\mu(-K) \left[R^{\mu\nu}(K) - M^{\mu\nu}(K) \right] A_\nu(K) - \bar{c}(K) \left[iK^2 \right] c(K) \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit $R^{\mu\nu}(K) = K^2 g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) K^\mu K^\nu$

und $M^{\mu\nu}(K) = m_t^2 \mathbf{A}^{\mu\nu} + m_\ell^2 \mathbf{B}^{\mu\nu}$

können die inversen Propagatoren (in den eckigen Klammern) ablesen werden. Zur hier verwendeten Konvention der Fourierdarstellung siehe (1.12). Im Geistterm ist hier $\xi = 1$ gewählt worden. Die Fourierdarstellung der Geistfelder sei

$$c(x) = \sum_K e^{-iKx} \tilde{c}(K) \quad , \quad \bar{c}(x) = \sum_K e^{iKx} \tilde{\bar{c}}(K) \quad . \quad (4.10)$$

Mit Hilfe der Definition (1.28) der vier Matrizen \mathbf{A} bis \mathbf{D} gewinnt man als Darstellung des inversen Gluon-Propagators in der Matrixbasis

$$(G^{-1})_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta_t} \mathbf{A}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Delta_\ell} \mathbf{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha\Delta_0} \mathbf{D}_{\mu\nu} \quad , \quad (4.11)$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\Delta_{t,\ell}(K) = \frac{1}{K^2 - m_{t,\ell}^2} \quad , \quad \Delta_0(K) = \frac{1}{K^2} \quad (4.12)$$

gegeben sind. Das Fehlen eines Beitrags proportional zur Matrix \mathbf{C} erleichtert die Invertierung wesentlich, und der volle Gluon-Propagator der *Trial*-Theorie ergibt sich als

$$G_{\mu\nu} = \Delta_t \mathbf{A}_{\mu\nu} + \Delta_\ell \mathbf{B}_{\mu\nu} + \alpha\Delta_0 \mathbf{D}_{\mu\nu} \quad . \quad (4.13)$$

Hier ist deutlich zu erkennen, daß der thermische Gluonpropagator (4.1) imitiert wird. An die Stelle der Polarisationsfunktionen $\Pi_{t,\ell}(K)$ sind in der *Trial*-Theorie die konstanten Massen $m_{t,\ell}$ getreten.

4.1 Berechnung der Zustandssumme

Die *Trial*-Theorie (4.8) ist wechselwirkungsfrei, so daß die strenge Auswertung ihrer Zustandssumme nur ein technisches Problem darstellt. Ferner, da die kovarianten Eichungen (4.5) linear sind, ist der FP-Operator (und damit der Geist-Term in der Lagrangedichte) unabhängig vom Feld A_μ , so daß das Funktionalintegral in (4.7) in zwei Anteile faktorisiert:

$$Z = \frac{\mathcal{N}}{Z_b} Z_A Z_{fp} \quad (4.14)$$

$$Z_A = \int \mathcal{D}A_\mu e^{\int^\beta (\mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{gf})} \quad (4.15)$$

$$Z_{fp} = \left| \int \mathcal{D}(\bar{c}c) e^{\int^\beta \mathcal{L}_{fp}} \right| \quad . \quad (4.16)$$

Hier sind die Betragsstriche um den FP-Anteil wieder restauriert worden (vgl. (1.20)). Die drei Anteile der Zustandssumme – Z_b , Z_A und Z_{fp} – werden nun einzeln berechnet. Den größten Aufwand erfordert dabei Z_A , weshalb diese Rechnung hier ausführlich dargestellt werden soll.

In der Fourierdarstellung (4.9) wird

$$Z_A = \int \mathcal{D}\tilde{A}_\mu \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_K \tilde{A}_\mu^- (G^{-1})^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu\right) , \quad (4.17)$$

wobei ein Minuszeichen als Index für ein Vorzeichen des Arguments steht: $\tilde{A}^- := \tilde{A}(-K)$. Um Z_A auszuintegrieren, kann man zunächst neue Integrationsvariablen einführen, die den Exponenten diagonalisieren. Unter Beibehaltung der Minkowski-Metrik ist man bei euklidischer Lesart des Exponenten (vgl. dazu die Bemerkungen am Ende des vorigen Kapitels sowie [6, 8]) zu der Ersetzung $A_0 \rightarrow iA_0$ gezwungen, um das Funktionalintegral (4.17) konvergieren zu lassen. Dies führt im Fourierraum zu der Relation $\tilde{A}_0^- = -\tilde{A}_0^*$, während $\tilde{A}_j^- = \tilde{A}_j^*$ ist. Somit wird beispielsweise

$$\tilde{A}_\mu(-K)K^\mu = \tilde{A}_0(-K)K^0 + \tilde{A}_j(-K)K^j = -\tilde{A}_0^*(K)K^0 + \tilde{A}_j^*(K)K^j = \left(\tilde{A}_\mu(K)K^\mu\right)^* .$$

Im letzten Schritt wurde beachtet, daß K_0 und damit auch $\vec{V} = -K_0 \vec{k}$ rein imaginär sind. Auf diese Art ergeben sich folgende Anteile des Exponenten:

$$-\tilde{A}_\mu^- \mathbf{A}^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu = |E_1^\mu \tilde{A}_\mu|^2 + |E_2^\mu \tilde{A}_\mu|^2 =: e_1^2 + e_2^2 \quad (4.18a)$$

$$E_{1,2}^\mu := (0, \vec{e}_{1,2}) ; \quad \vec{e}_{1,2} \cdot \vec{k} = 0 , \quad \vec{e}_{1,2}^2 = 1$$

$$-\tilde{A}_\mu^- \mathbf{B}^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu = \frac{1}{V^2} |V_\mu \tilde{A}^\mu|^2 =: b^2 \quad (4.18b)$$

$$-\tilde{A}_\mu^- \mathbf{D}^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu = -\frac{1}{K^2} |K_\mu \tilde{A}^\mu|^2 =: d^2 . \quad (4.18c)$$

Die Koeffizienten $e_{1,2}$, b und d sind nach der analytischen Fortsetzung $A_0 \rightarrow iA_0$ also reell und transformieren den Integranden in (4.17) auf Gauß-Form. Weil

$$\frac{de_{1,2}}{d\tilde{A}_\mu} = E_{1,2}^\mu , \quad \frac{db}{d\tilde{A}_\mu} = \frac{1}{\sqrt{V^2}} V^\mu , \quad \frac{dd}{d\tilde{A}_\mu} = \frac{1}{\sqrt{-K^2}} K^\mu , \quad (4.19)$$

ist die Jacobideterminante hier trivial:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(e_1, e_2, b, d)}{\partial(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_0)} \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{-K^2 V^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_0 k & -k^2 \\ 0 & 0 & k & K_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{k(K_0^2 - k^2)}{\sqrt{K^2 K^2 k^2}} = 1 . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die Auswertung der Determinante ist in einem Koordinatensystem erfolgt, in welchem \vec{k} parallel zur \vec{e}_z liegt, so daß sich die beiden senkrechten Vektoren $\vec{e}_{1/2}$ als \vec{e}_x bzw. \vec{e}_y darstellen lassen.

Mit den neuen Integrationsvariablen $e_1 \dots d$ zerfällt (4.17) in ein Produkt aus vier gewöhnlichen Gauß-Integralen:

$$Z_A = \prod_{n, \vec{k}} \left[\int de_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(-\Delta_t)} e_1^2\right) \right] \left[\int de_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(-\Delta_t)} e_2^2\right) \right] \times$$

$$\times \left[\int db \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(-\Delta_\ell)} b^2 \right) \right] \left[\int dd \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(-\alpha\Delta_0)} d^2 \right) \right] \quad (4.21)$$

$$= \prod_{n, \vec{k}} \left(-\frac{\Delta_t}{\beta^2} \right) \left(-\frac{\Delta_\ell}{\beta^2} \right)^{1/2} \left(-\frac{\alpha\Delta_0}{\beta^2} \right)^{1/2} , \quad (4.22)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen bis auf einen (β -unabhängigen) Faktor gilt.

Die Berechnung der beiden anderen Beiträge zu Z , nämlich Z_b und Z_{fp} , ist demgegenüber einfach. Ersterer hat bereits die Form eines Gauß-Integrals. Für den zweiten Beitrag verwendet man den inversen Geistpropagator $D^{-1} = iK^2$ und erhält [6]

$$Z_b \sim \prod \sqrt{\alpha} \quad , \quad Z_{fp} = \prod (-\beta^2 K^2) \quad , \quad (4.23)$$

wobei im ersten Ausdruck eine irrelevante Konstante weggelassen wurde. Z_{fp} ist reell und positiv, wie gefordert.

Insgesamt lautet also die Zustandssumme der *Trial*-Theorie

$$Z = \mathcal{N} \prod_{n, \vec{k}} \left(-\frac{\Delta_t}{\beta^2} \right) \left(-\frac{\Delta_\ell}{\beta^2} \right)^{1/2} (-\beta^2 K^2)^{1/2} . \quad (4.24)$$

Man sieht (und so mußte es sein), daß die in Z_A verbliebene Eichparameterabhängigkeit genau vom $\frac{1}{Z_b}$ -Term aufgehoben wurde. Die Konstante \mathcal{N} ist unabhängig von den Variationsparametern $m_{t,\ell}$ und α .

4.2 Thermisches Mittel

Als nächstes muß ist zu lernen, wie die thermischen Mittel (3.6) ausgewertet werden. Dazu schreibe ich (wie in der Störungstheorie) für jedes Feld eine Quelle in das Funktionalintegral, um so Potenzen von Feldern unter dem Integral in Potenzen von Ableitungen nach deren Quellen umzuwandeln und aus dem Integral herauszuziehen. Erst nach Ausführung dieser Ableitungen werden die Quellen wieder auf Null gesetzt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}[A, \bar{c}, c] \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}(A_\mu \bar{c} c) \mathcal{O}[A, \bar{c}, c] e^{S[A, \bar{c}, c]} \\ &= \frac{1}{Z} \mathcal{O}[\delta_J, -\delta_\rho, \delta_{\bar{\rho}}] \int \mathcal{D}(A_\mu \bar{c} c) e^{S[A, \bar{c}, c] + \int^\beta (J_\mu A^\mu + \bar{\rho} c + \bar{c} \rho)} \Big|_{J_\mu = \bar{\rho} = \rho = 0} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Hier braucht nicht mit den Betragsstrichen von der FP-Determinante gearbeitet zu werden, da eine eventuell komplexe Phase sich auch im Nenner ergeben würde und somit entfällt. Die so eingeführten Quellen genügen den Hermitezitätsbedingungen $J^\dagger = J$, $\bar{\rho}^\dagger = -\bar{\rho}$ und $(\rho/\xi)^\dagger = -\rho/\xi$. Die Geistfeld-Quellen sind ihrerseits Grassmannfelder. Da die *Trial*-Theorie S (vgl. Gleichung (4.8)) frei ist, läßt sich das Funktionalintegral auswerten. Geht

man zur Fourierdarstellung der Felder und Quellen über (der Lesbarkeit halber werden die Tilden über den Objekten unterdrückt), ergibt sich für den Exponenten

$$\begin{aligned} & \sum_K \left\{ -\frac{1}{2} A_\mu^- (G^{-1})^{\mu\nu} A_\nu + J_\mu^- A^\mu - \bar{c} D^{-1} c + \bar{\rho} c + \bar{c} \rho \right\} \\ &= \sum_K \left\{ -\frac{1}{2} A_\mu^- (G^{-1})^{\mu\nu} A_\nu + \frac{1}{2} J_\mu^- G^{\mu\nu} J_\nu - \bar{c} D^{-1} c + \bar{\rho} D \rho \right\} . \end{aligned}$$

Dabei sind G und D Gluon- bzw. Geist-Propagator der *Trial*-Theorie. In der zweiten Zeile wurden unter dem Funktionalintegral die Verschiebungen $A^\mu \rightarrow A^\mu + G^{\mu\nu} J_\nu$, $\bar{c} \rightarrow \bar{c} + D\bar{\rho}$ und $c \rightarrow c + D\rho$ (Jacobideterminante = 1) vorgenommen, so daß nun die Quellen-Terme von den Feldern entkoppelt sind. Daher ist die Integration ausführbar (und ergibt genau die Zustandssumme Z), so daß schließlich bleibt:

$$\langle \mathcal{O}[A, \bar{c}, c] \rangle = \mathcal{O}[\delta_J, -\delta_\rho, \delta_{\bar{\rho}}] e^{\sum (\frac{1}{2} J_\mu^- G^{\mu\nu} J_\nu + \bar{\rho} D \rho)} \Big|_{J_\mu = \bar{\rho} = \rho = 0} . \quad (4.26)$$

Mit Hilfe von (4.26) ist klar, daß nur Terme, welche eine gerade Potenz von A -Feldern sowie ebensoviele Geist- wie Antigeistfelder (c bzw. \bar{c}) enthalten, ein von Null verschiedenes Mittel haben können. Diese Tatsache wird im nächsten Kapitel die Zahl der Terme aus $\langle S_{\text{GP}} \rangle$ stark verringern. Die zwei zur Auswertung des Variationsfunktionalen wesentlichen Mittel lauten

$$\langle A_\mu(K) A_\nu(Q) \rangle = \delta_{J^\mu(K)} \delta_{J^\nu(Q)} e^{\sum \frac{1}{2} J^- G J} \Big|_{J=0} = [K + Q] G_{\mu\nu}(K) , \quad (4.27)$$

$$\langle \bar{c}(K) c(Q) \rangle = -\delta_{\rho(K)} \delta_{\bar{\rho}(Q)} e^{\sum \bar{\rho} D \rho} \Big|_{\bar{\rho} = \rho = 0} = -[K - Q] D(K) . \quad (4.28)$$

Hier bezeichnet $[K]$ die Impulsdeltafunktion (1.14).

Alle Grundlagen zur Auswertung des Variationsfunktionalen sind nun gelegt. Als zu untersuchende Theorie wurde das Gluon-Plasma in Kapitel 1 vorgestellt. Die *Trial*-Theorie (4.8) ist in diesem Kapitel mit Hilfe von drei Parametern, nämlich zwei Massen m_t und m_ℓ sowie dem Eichparameter α , formuliert worden. Als wechselwirkungsfreie und abelsche Theorie hat sie sich dabei als „einfach genug“ erwiesen, so daß sowohl ihre Zustandssumme ausgerechnet als auch eine Vorschrift zur Bildung thermischer Mittel angegeben werden konnte. Die Tatsache, daß der *Trial*-Propagator die Form des resummierten Gluon-Propagators (1.32) in führender Ordnung hat (dies war ausschlaggebend für die Wahl der *Trial*-Theorie), nährt die Hoffnung, eine Minimierung von \mathcal{U} bezüglich der Variationsparameter könnte letztere auf störungstheoretisch bekannte Werte festlegen, konkret also $m_{t,\ell} \rightarrow m = g\sqrt{N}T/3$. Manka [24] äußert dies als Vermutung und gab somit letztlich den Anstoß zu diesem Teil der Arbeit.

Im folgenden Kapitel werden nun die beiden Theorien S_{GP} und S im Variationsfunktional zusammengeführt, um die Berechtigung der obigen Hoffnung zu überprüfen.

Kapitel 5

Das Variationsfunktional \mathcal{V} in kovarianten Eichungen

In diesem Kapitel soll die kovariant eichfixierte Yang–Mills–Theorie (1.21) mit der kovariant geeichten *Trial*–Theorie (4.8) untersucht werden. Der im Eichfixierungsterm der *Trial*–Theorie eingeführte Eichparameter α wird auch als Variationsparameter betrachtet, darf sich also zunächst durchaus von dem der vollen Theorie, welcher ab hier mit α_{YM} bezeichnet wird, unterscheiden. Um dem Leser ein mühsames Zurückblättern zu ersparen, sind hier zunächst tabellarisch die bisher relevanten Ergebnisse gesammelt:

$$\mathcal{V} = nF - T \ln \left(\frac{Z_b}{Z_B} \right) + T \int^\beta \langle n\mathcal{L} \rangle - T \int^\beta \langle \mathcal{L}_{\text{GP}} \rangle \quad (5.1)$$

$$\equiv \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4$$

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} = -\frac{1}{4} F_{\text{YM}}^2 - \frac{1}{2\alpha_{\text{YM}}} (\partial A_{\text{YM}})^2 + i\bar{c}_{\text{YM}}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c_{\text{YM}}^b \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\text{ab.}}^2 + \frac{1}{2} A_\mu (MA)^\mu - \frac{1}{2\alpha} (\partial A)^2 + i\bar{c}^a \partial^2 c^a \quad (5.3)$$

$$F = -T \ln Z \quad , \quad Z = \mathcal{N} \prod_{n, \vec{k}} \left(-\frac{\Delta_t}{\beta^2} \right) \left(-\frac{\Delta_\ell}{\beta^2} \right)^{1/2} \left(-\beta^2 K^2 \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

$$Z_B = \int \mathcal{D}B^a e^{-\frac{1}{2\alpha_{\text{YM}}} \int^\beta B^a B^a} \quad . \quad (5.5)$$

Wie inzwischen gewohnt, stehen nichtindizierte Größen für solche aus der *Trial*–Theorie. Außerdem wurden im letzten Kapitel bereits die thermischen Mittel in der Form

$$\langle A_\mu(K) A_\nu(Q) \rangle = [K + Q] G_{\mu\nu}(K) \quad , \quad G_{\mu\nu} = \Delta_t \mathbf{A}_{\mu\nu} + \Delta_\ell \mathbf{B}_{\mu\nu} + \alpha \Delta_0 \mathbf{D}_{\mu\nu} \quad (5.6)$$

$$\langle \bar{c}(K) c(Q) \rangle = -[K - Q] D(K) \quad , \quad D(K) = \frac{1}{iK^2} \quad (5.7)$$

erhalten. Die Abhängigkeit von den Variationsparametern $m_{t,\ell}$ steckt dabei in den Propagatoranteilen $\Delta_{t,\ell} = 1/(K^2 - m_{t,\ell}^2)$. Will man die Minimaleigenschaft von \mathcal{V} benutzen, so ist sicherzustellen, daß der Ausdruck $(S_{\text{GP}} - nS)$ reell ist (vgl. die Herleitung in Kapitel 3 sowie die dortige Anmerkung zur Realität). Daher verwende ich hier die delikate

Annahme, $i\bar{c}c$ sei reell, damit trotz der Verschiedenheit der Eichsymmetrie von voller und *Trial*-Theorie die verwendete Formulierung des Variationsverfahrens aufrechterhalten werden kann.

Mit dem Ergebnis für die Zustandssumme der *Trial*-Theorie (4.24) läßt sich sofort der ersten Term des Variationsfunktionals \mathcal{U} , die Freie Energie F , angeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= -nT \ln Z \\ &= -Vn \sum_K \left\{ \ln(-T^2 \Delta_t) + \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_\ell) - \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_0) + \ln \mathcal{N} \right\} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Da die Normierungskonstante \mathcal{N} keinen Variationsparameter enthält, braucht der letzte Term nicht mitgenommen zu werden. Er sorgt lediglich für eine Verschiebung der Energieskala.

Damit die Gauß-Integrale Z_B und Z_b existieren, ist der Eichparameter positiv zu wählen. Dann gibt der zweite Term in (5.1) wegen

$$\frac{Z_b}{Z_B} = \prod_{a,n,k} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}}} \quad (5.9)$$

den folgenden Beitrag zum Variationsfunktional:

$$\mathcal{U}_2 = -T \ln \left(\frac{Z_b}{Z_B} \right) = -\frac{1}{2} Vn \left(\sum_K \right) \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \right) . \quad (5.10)$$

Als nächstes muß das thermische Mittel $\langle S \rangle$ der *Trial*-Theorie berechnet werden. Die vier dabei auftretenden Terme ergeben sich dabei als

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{4} F_{\text{ab.}}^2 \right\rangle &= -\frac{1}{4} \sum_{K,Q} e^{-i(K+Q)x} 2 (K^\mu Q^\nu - (KQ)g^{\mu\nu}) \langle A_\nu(K) A_\mu(Q) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_K (K^2 g^{\mu\nu} - K^\mu K^\nu) G_{\mu\nu}(K) = -\sum_K K^2 \left(\Delta_t + \frac{1}{2} \Delta_\ell \right) , \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} A_\mu(MA)^\mu \right\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{K,Q} e^{-i(K+Q)x} (m_t^2 A^{\mu\nu}(Q) + m_\ell^2 B^{\mu\nu}(Q)) \langle A_\mu(K) A_\nu(Q) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_K (m_t^2 A^{\mu\nu}(K) + m_\ell^2 B^{\mu\nu}(K)) G_{\mu\nu}(K) \\ &= \sum_K \left(m_t^2 \Delta_t + \frac{1}{2} m_\ell^2 \Delta_\ell \right) , \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{2\alpha} (\partial A)^2 \right\rangle &= -\frac{1}{2\alpha} \sum_{K,Q} e^{-i(K+Q)x} (-K^\mu Q^\nu) \langle A_\mu(K) A_\nu(Q) \rangle \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \sum_K K^\mu K^\nu G_{\mu\nu}(K) = -\frac{1}{2} \sum_K , \end{aligned} \quad (5.11c)$$

$$\begin{aligned} \langle i\bar{c} \partial^2 c \rangle &= \sum_{K,Q} e^{i(K-Q)x} (-iK^2) \langle \bar{c}(K) c(Q) \rangle \\ &= i \sum_K K^2 D(K) = \sum_K . \end{aligned} \quad (5.11d)$$

Somit lautet der dritte Beitrag zum Variationsfunktional

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3 &= nT \int^\beta \langle \mathcal{L} \rangle = nT \int^\beta \sum_K \left\{ -K^2 \left(\Delta_t + \frac{1}{2} \Delta_\ell \right) + \left(m_t^2 \Delta_t + \frac{1}{2} m_\ell^2 \Delta_\ell \right) - \frac{1}{2} + 1 \right\} \\ &= nT \int^\beta \sum_K \left\{ -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right\} = -Vn \sum_K , \end{aligned} \quad (5.12)$$

eine zwar divergente, aber keinen Variationsparameter enthaltende Summe. In der letzten Zeile wurde $\int^\beta = \beta \int d^3x =: \beta V$ benutzt. \mathcal{U}_3 braucht daher in \mathcal{U} nicht berücksichtigt zu werden.

Der letzte Term, der für das Variationsfunktional benötigt wird, ist das thermische Mittel der vollen Theorie

$$\mathcal{U}_4 = -T \int^\beta \langle \mathcal{L}_{\text{GF}} \rangle = -T \int^\beta \langle \mathcal{L}_0 \rangle - T \int^\beta \langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle , \quad (5.13)$$

wobei hier eine Aufspaltung in den freien Anteil \mathcal{L}_0 (quadratisch in den Feldern) und in die Wechselwirkungsterme \mathcal{L}_{int} nützlich ist. Unter Felder-Identifizierung ($A_{\text{YM}} = A$, $\bar{c}_{\text{YM}} = \bar{c}$ und $c_{\text{YM}} = c$) und Forderung der Farb-Diagonalität des thermischen Erwartungswertes ($\langle A^a A^b \rangle = \delta^{ab} \langle AA \rangle$ etc.) können zur Auswertung des ersten Beitrags in (5.13) schlicht die Ergebnisse (5.11) benutzt werden:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0 \rangle &= \delta^{aa} \left\langle -\frac{1}{4} F_{\text{ab.}}^2 - \frac{1}{2\alpha_{\text{YM}}} (\partial A)^2 + i\bar{c} \partial^2 c \right\rangle \\ &= n \sum_K \left\{ -K^2 \left(\Delta_t + \frac{1}{2} \Delta_\ell \right) - \frac{\alpha}{2\alpha_{\text{YM}}} + 1 \right\} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Wechselwirkungsterm \mathcal{L}_{int} enthält sowohl kubische (AAA und $\bar{c}Ac$) wie auch quartische ($AAAA$) Beiträge in den Feldern. Zu seiner Auswertung erinnere man sich daran, daß thermische Mittel einer ungeraden Anzahl von Feldern A verschwinden, so daß lediglich der quartische Term zum Variationsfunktional beitragen kann:

$$\langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle \rightarrow \left\langle -\frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu} \right\rangle . \quad (5.15)$$

Zu seiner Behandlung ist es nützlich, sich der Formulierung des thermischen Mittels (4.26) zu bedienen. Da die *Trial*-Theorie keinen Wechselwirkungsterm enthält, müssen immer je zwei Quellen-Ableitungen koppeln, so daß der Term Wick-artig in Produkte von Zweier-Mitteln faktorisiert:

$$\langle A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu} \rangle = \langle A_\mu^b A_\nu^c \rangle \langle A^{d,\mu} A^{e,\nu} \rangle + \langle A_\mu^b A^{d,\mu} \rangle \langle A_\nu^c A^{e,\nu} \rangle + \langle A_\mu^b A^{e,\nu} \rangle \langle A_\nu^c A^{d,\mu} \rangle$$

Wegen der Farb-Diagonalität des Mittels wird der erste Term symmetrisch in den Farb-indices b und c , so daß er bei Kontraktion mit der (total antisymmetrischen) Strukturkonstante f^{abc} verschwindet. In den verbleibenden zwei Termen kann die Relation

$f^{abc} f^{abc} = Nn$ verwendet werden, so daß sich für den Beitrag des Wechselwirkungsterms schließlich

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle &= -\frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} \langle A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu} \rangle \\ &= -\frac{1}{4} g^2 Nn \left\{ \left(\sum G_\mu^\mu \right) \left(\sum G_\nu^\nu \right) - \left(\sum G_{\mu\nu} \right) \left(\sum G^{\mu\nu} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

ergibt.

Im nächsten Schritt wird zunächst die K -Summe über den *Trial*-Propagator vereinfacht, um dann die Tensorstruktur der geschweiften Klammer auszuwerten. Da die Propagatoranteile $\Delta_{t,\ell,0}(K)$ bezüglich der Inversion von \vec{k} gerade sind, braucht unter der Summe nur der gerade Anteil der Matrizen B und D (s. (C.6)) berücksichtigt zu werden (\mathbf{A} ist schon gerade):

$$\begin{aligned} \sum_K G(K) &= \sum_K \{ \Delta_t \mathbf{A} + \Delta_\ell \mathbf{B} + \alpha \Delta_0 \mathbf{D} \} \\ &\rightarrow \sum_K \left\{ \Delta_t \left(g - UU + \frac{\overline{KK}}{k^2} \right) + \Delta_\ell \frac{k^4 UU + K_0^2 \overline{KK}}{V^2} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \Delta_0 \frac{K_0^2 UU + \overline{KK}}{K^2} \right\} , \end{aligned} \quad (5.17)$$

wobei $\overline{K}^\mu = (0, \vec{k})$ den räumlichen Anteil des Viererimpulses K bezeichnet. Der weiteren Vereinfachung dienen die beiden Tensoren

$$u_{\mu\nu} := U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} \quad , \quad v_{\mu\nu} := 4U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} \quad . \quad (5.18)$$

Mit Hilfe der Identität

$$\int d^3k \frac{\overline{K}_\mu \overline{K}_\nu}{k^2} f(k^2) = \frac{1}{3} u_{\mu\nu} \int d^3k f(k^2) \quad , \quad (5.19)$$

welche für jede nur vom Betrag des Vektors \vec{k} abhängige Funktion $f(k^2)$ gilt, kann die Tensorstruktur in (5.17) vollständig aus der Summe herausgezogen werden (denn die Propagatoranteile $\Delta_{t,\ell,0}(K)$ hängen nicht von der Richtung von \vec{k} ab) und erhält so

$$\sum_K G_{\mu\nu}(K) = \frac{1}{3} T^2 (r u_{\mu\nu} + s v_{\mu\nu}) =: w_{\mu\nu} \quad , \quad (5.20)$$

$$\text{mit} \quad r = \beta^2 \sum_K (-2\Delta_t - \Delta_\ell - \alpha \Delta_0)$$

$$\text{und} \quad s = \beta^2 \sum_K \left(-\frac{k^2}{K^2} \Delta_\ell + \alpha \frac{K_0^2}{K^2} \Delta_0 \right) \quad . \quad (5.21)$$

Nun kann die geschweifte Klammer in (5.16) ausgewertet werden. Wegen

$$u_\mu^\mu = -3 \quad , \quad v_\mu^\mu = 0 \quad , \quad u_{\mu\nu} u^{\mu\nu} = u_{\mu\nu} v^{\mu\nu} = 3 \quad , \quad v_{\mu\nu} v^{\mu\nu} = 12$$

ist $w_\mu^\mu w_\nu^\nu - w_{\mu\nu} w^{\mu\nu} = \frac{2}{3}(r+s)(r-2s)$ und damit schließlich

$$\langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle = -\frac{1}{6} g^2 N n T^4 (r+s)(r-2s) \quad . \quad (5.22)$$

Unter Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Abschnittes lautet das Variationsfunktional insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[m_t, m_\ell; \alpha] = & - Vn \sum_K \left\{ \ln(-T^2 \Delta_t) + \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_\ell) - \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_0) \right\} \\ & - Vn \left(\sum_K \right) \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \right) \\ & - Vn \sum_K \left\{ -K^2 \left(\Delta_t + \frac{1}{2} \Delta_\ell \right) - \frac{\alpha}{2\alpha_{\text{YM}}} + 1 \right\} \\ & + Vn \frac{1}{6} g^2 N T^4 (r+s)(r-2s) \quad . \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.1 Minimierung von \mathcal{U}

Das Variationsfunktional in der Form (5.23) enthält drei Parameter, welche durch die *Trial*-Theorie eingebracht wurden und somit zur Variation „zugelassen“ sind. Die Minimierung von \mathcal{U} bezüglich des Eichparameters α läßt sich schnell durchführen. Dazu betrachte man nur die führenden Terme, welche die divergenten vollen K -Summen in (5.23) sind:

$$\mathcal{U}[\alpha] = Vn \left(\sum_K \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} - \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \right) \right) + \text{const}_\alpha \quad . \quad (5.24)$$

Der Faktor \sum_K ist positiv, in welchem Regularisierungsschema auch immer gearbeitet wird. Die Funktion $x - \ln x$ hat ein Minimum bei $x = 1$, weshalb der *Trial*-Parameter α per Variation auf den Wert des Yang-Mills-Parameters α_{YM} rutscht:

$$\mathcal{U}[\alpha] \stackrel{!}{=} \text{Min.} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha = \alpha_{\text{YM}} \quad . \quad (5.25)$$

Die „beste“ *Trial*-Theorie ist also genauso geeicht wie die volle Theorie. Aufgrund von (5.25) darf ab jetzt ruhig der Index „YM“ am Eichparameter entfallen.

Nach dieser kleinen „Aufwärmübung“ im Variationsraum wird es interessanter. Das Variationsfunktional hängt nur noch von den beiden Massenparametern ab, allerdings in nichttrivialer Weise. Es lautet

$$\mathcal{U}[m_t, m_\ell] = Vn T^4 \left\{ -(2I_t + L_t) - \frac{1}{2} (2I_\ell + L_\ell) + \frac{1}{6} g^2 N (r+s)(r-2s) \right\} \quad , \quad (5.26)$$

wobei Gebrauch von der Definition der vier folgenden Summen (alle positiv und dimensionslos) gemacht wurde:

$$I_{t,\ell} = \frac{1}{2} \beta^4 \sum_K \ln \left(-T^2 \Delta_{t,\ell}(K) \right) \quad , \quad (5.27a)$$

$$J_{t,\ell} = -\beta^2 \sum_K \Delta_{t,\ell}(K) \quad , \quad (5.27b)$$

$$L_{t,\ell} = -\beta^4 \sum_K K^2 (\Delta_{t,\ell}(K) - \Delta_0(K)) \quad , \quad (5.27c)$$

$$Y_{t,\ell} = \beta^2 \sum_K \frac{k^2}{K^2} \Delta_{t,\ell}(K) \quad . \quad (5.27d)$$

Damit lauten die beiden Faktoren des g^2 -Beitrags (eine Summe mit Index 0 bezeichnet ihren Wert bei verschwindender Masse)

$$(r + s) = 2J_t + J_\ell - Y_\ell + \alpha Y_0 \quad , \quad (5.28)$$

$$(r - 2s) = 2J_t + J_\ell + 2Y_\ell + \alpha (3J_0 - 2Y_0) \quad . \quad (5.29)$$

Für diese Summen kann man keinen geschlossenen algebraischen Ausdruck angeben. Die Frequenzsummen sind jedoch in allen vier Fällen ausführbar (s. Anhang A.1), so daß sich eine Darstellung mittels gewöhnlicher Integrale ergibt:

$$I_{t,\ell} \approx -\beta^3 \int_k^3 \ln(1 - e^{-\beta\omega_{t,\ell}}) \quad (5.30a)$$

$$J_{t,\ell} \approx \beta^2 \int_k^3 \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \quad (5.30b)$$

$$L_{t,\ell} \approx \beta^4 m_{t,\ell}^2 \int_k^3 \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \quad (5.30c)$$

$$Y_{t,\ell} \approx \frac{\beta^2}{m_{t,\ell}^2} \int_k^3 k^2 \left(\frac{n(k)}{k} - \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \right) \quad . \quad (5.30d)$$

Das geschwungene Gleichheitszeichen steht hier für eine im Hoch- T -Limes ausgewertete Summation (d.h. es werden divergente, aber T -unabhängige Integrale vernachlässigt, welche via $T = 0$ -Renormierung absorbiert würden, vgl. [7] 2.4.4) und deckt sich mit der im Anhang verwendeten Notation. Jedes dieser Integrale ist UV- und IR-konvergent. Genau hier wurde übrigens erstmals die explizite Form von $\Delta = 1/(K^2 - m^2)$ benutzt. Konkret sorgte die einfache Polstruktur dafür, daß die Frequenzsummen ausgeführt werden konnten.

An dieser Stelle sollte betont werden, daß keine Störungstheorie durchgeführt wurde, um die obige Form von \mathcal{U} zu erhalten. Der Kopplungsparameter g ist damit *nicht* notwendig klein gegen Eins! Vielmehr wird man zu jedem Wert von g ein Tupel (m_t, m_ℓ) so bestimmen dürfen, daß \mathcal{U} einen Minimalwert annimmt.

Es ergeben sich nun zwei Strategien zur Minimierung von \mathcal{U} . Erstens ließe sich die Aufgabe numerisch lösen. Dies ist auch gemacht worden, soll aber erst im nächsten Abschnitt genauer aufgezeigt werden. Der zweite (und im Hinblick auf den gewünschten Vergleich mit Ergebnissen der Störungstheorie ausschlaggebende) Weg besteht darin, die Integrale einer Hochtemperaturentwicklung zu unterwerfen und sodann das Variationsfunktional in tiefster Ordnung zu minimieren.

5.1.1 Kleine Kopplung

Über das Variationsfunktional werden die beiden Massenterme $m_{t,\ell}$ eine Abhängigkeit von der Kopplung g bekommen (eine Potenz von T ist aus Dimensionsgründen trivial; weitere Temperaturabhängigkeit nur implizit durch $g(T)$). Nimmt man an, daß die Potenzreihe linear in der Kopplung startet, also

$$m_{t,\ell} \sim gT + \dots \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{t,\ell} \sim g + \dots \quad (5.31)$$

ist, so kann man sich \mathcal{U} im störungstheoretisch zugänglichen Bereich ($g \ll 1$) in einer asymptotischen Entwicklung bezüglich kleiner ε (oder g) ansehen. Mit Hilfe der Entwicklungen (B.9)–(B.13)

$$I_{t,\ell} \simeq \frac{\pi^2}{90} - \frac{1}{24}\varepsilon_{t,\ell}^2 + \frac{1}{12\pi}\varepsilon_{t,\ell}^3 + \dots \quad , \quad (5.32)$$

$$J_{t,\ell} \simeq \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{t,\ell} + \dots \quad , \quad (5.33)$$

$$L_{t,\ell} \simeq \frac{1}{12}\varepsilon_{t,\ell}^2 - \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{t,\ell}^3 + \dots \quad , \quad (5.34)$$

$$Y_\ell \simeq \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\varepsilon_\ell + \dots \quad (5.35)$$

ergibt sich

$$(2I + L)_{t,\ell} \simeq \frac{\pi^2}{45} - \frac{1}{12\pi}\varepsilon_{t,\ell}^3 + \dots \quad , \quad (5.36)$$

$$(r + s) \simeq \frac{1 + \alpha}{8} - \frac{1}{2\pi}\varepsilon_t + \dots \quad , \quad (5.37)$$

$$(r - 2s) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\varepsilon_t - \frac{3}{4\pi}\varepsilon_\ell + \dots \quad . \quad (5.38)$$

Der Beitrag $(r - 2s)$ enthält den Eichparameter α nicht. Für kleine $\varepsilon_{t,\ell}$ lautet somit das Variationsfunktional

$$\mathcal{U}[\varepsilon_t, \varepsilon_\ell] \approx \frac{VnT^4}{4\pi} \left\{ \frac{1}{3}\varepsilon_t^3 - \frac{5 + \alpha}{24}g^2N\varepsilon_t \right\} + \frac{VnT^4}{8\pi} \left\{ \frac{1}{3}\varepsilon_\ell^3 - \frac{1 + \alpha}{8}g^2N\varepsilon_\ell \right\} \quad . \quad (5.39)$$

Hier sind ε -unabhängige Konstanten weggelassen worden. Aus dieser Darstellung ist direkt abzulesen, wohin die beiden Massen bei Variation des Funktionals wandern:

$$\delta_{\varepsilon_t, \ell} \mathcal{U} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad m_t^2 = T^2\varepsilon_t^2 = \frac{5 + \alpha}{24}g^2NT^2 \quad , \quad (5.40a)$$

$$m_\ell^2 = T^2\varepsilon_\ell^2 = \frac{1 + \alpha}{8}g^2NT^2 \quad . \quad (5.40b)$$

Die Annahme (5.31) hat sich somit als konsistent erwiesen.

Das Ergebnis (5.40) enttäuscht jedoch die in den Ansatz gesetzten Hoffnungen auf zweierlei Art und Weise. Zum einen bestimmen sich die beiden *Trial*-Massen nicht zum erhofften Wert $g\sqrt{N}T/3$, dem langwelligen Limes der Gluon-Polarisationsfunktionen $\Pi_{t,\ell}$

aus der Störungsrechnung. Zum anderen, und das ist erheblich gravierender, bleibt eine Abhängigkeit vom Eichparameter $\alpha = \alpha_{\text{YM}}$ im Resultat bestehen. Diese verbleibende Eichabhängigkeit stammt von der Mittelung des wechselwirkenden Anteils der Yang–Mills Lagrangedichte her, genauer gesagt vom quartischen Term $\langle AAAA \rangle$ aus \mathcal{U}_4 .

Die Interpretation dieser α -Abhängigkeit im Resultat ist nicht restlos klar. Einerseits könnte durch eine zu enge Wahl der *Trial*-Theorie als Variationsansatz dem Funktional \mathcal{U} schlichtweg nicht „erlaubt“ worden sein, ein eichunabhängiges Resultat zu produzieren. Die volle Theorie S_{GP} zeigt in störungstheoretischen Rechnungen ihre Eichunabhängigkeit ja gerade erst im Zusammenspiel aller Diagramme, d.h. aller Vertizes. Aber hier haben beim Mitteln mit der freien *Trial*-Theorie die Dreiervertizes (also die in den Feldern kubischen Terme) nichts beitragen können, da $\langle AAA \rangle = \langle \bar{c}Ac \rangle = 0$ ist. Andererseits könnte der Ursprung der Eichparameterabhängigkeit noch tiefer liegen, nämlich in der Tatsache, daß der „delikate Schritt“, $i\bar{c}c$ als reelle Variable anzusehen, nicht aufrechterhalten werden kann. In diesem Fall würde die Herleitung der Minimaleigenschaft des hier verwendeten Variationsfunktionals für Eichtheorien nur dann gültig bleiben, wenn S_{GP} mit einer ebenfalls nichtabelsch eichinvarianten *Trial*-Theorie S untersucht würde.

Trotz der angesprochenen Probleme soll das in diesem Sinne „kranke“ Variationsfunktional (5.26) noch etwas gründlicher untersucht werden, bevor im nächsten Kapitel weitere Eichfixierungen besprochen werden.

5.1.2 Weiche Plasmon–Frequenz

Ein interessanter Effekt läßt sich zeigen, wenn man in \mathcal{U} die asymptotische Entwicklung nur nach der longitudinalen Masse (der Plasmon–Masse) vornimmt. Ausgangspunkt dieser Idee ist eine Spekulation in [1], wo Schulz nach Erhalten der ersten Korrektur zur longitudinalen Plasmafrequenz auf die Möglichkeit hinweist, daß diese Größe (eventuell außerhalb des störungstheoretisch zugänglichen Bereichs) ganz verschwinden könnte (Stichworte: gluon condensation; gas of glue–balls). Daher stellt sich die Frage, ob ein solcher „Mechanismus“ sich im hier vorgestellten Variationsverfahren, welches ja fest außerhalb der Störungstheorie verwurzelt ist, zeigen wird.

Angenommen, es gäbe also einen Bereich, in dem die longitudinale Masse kleine Werte annimmt: $\varepsilon_\ell \ll 1$. Die Größenordnung sowohl von ε_t als auch der Kopplungskonstanten g ist demgegenüber nicht festgelegt. Wiederum mit Hilfe von (B.9)–(B.13) folgt

$$(r + s) = 2J_t - \frac{1 - 3\alpha}{24} \quad , \quad (r - 2s) = 2J_t + \frac{1}{3} - \frac{3}{4\pi}\varepsilon_\ell \quad . \quad (5.41)$$

Damit lautet der für $\varepsilon_\ell \ll 1$ führende Anteil von \mathcal{U}

$$\mathcal{U}[\varepsilon_\ell] \approx \frac{VnT^4}{8\pi} \left\{ \frac{1}{3}\varepsilon_\ell^3 - \left[2J_t - \frac{1 - 3\alpha}{24} \right] g^2 N \varepsilon_\ell \right\} + \text{const}_{\varepsilon_\ell} \quad . \quad (5.42)$$

Variation nach der longitudinalen Masse gibt

$$\partial_{\varepsilon_\ell} \mathcal{U} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_\ell^2 = \left[2J_t - \frac{1 - 3\alpha}{24} \right] g^2 N \quad . \quad (5.43)$$

Aus Selbstkonsistenzgründen gilt diese Gleichung natürlich nur für kleine ε_ℓ , also in der Nähe des Verschwindens der eckigen Klammer (sowie bei $g = 0$; dieser Punkt wurde aber oben schon untersucht). An dieser Stelle deutet sich der oben angesprochene „Mechanismus“ an, der (bei $\alpha < \frac{1}{3}$) die longitudinale Plasmon-Frequenz weichwerden läßt:

$$\varepsilon_\ell = 0 \quad \text{für} \quad 2J_t = \frac{1 - 3\alpha}{24} \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_t \approx 1.6 \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad . \quad (5.44)$$

Der Wert $\varepsilon_t \approx 1.6$, bei dem das Integral J_t den Wert $1/48$ annimmt, wurde numerisch erhalten.

5.2 Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt wird das Resultat einer numerischen Auswertung des Variationsfunktionals (5.26) mit Hilfe der schon frequenzsummierten Integrale (5.30) kommentiert. Schreibt man diese dimensionslos auf, so lauten sie

$$I_{t,\ell} \approx -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \, x^2 \ln(1 - e^{-\sqrt{}}) \quad , \quad (5.45)$$

$$J_{t,\ell} \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \, \frac{x^2}{\sqrt{}} \frac{1}{e^{\sqrt{}} - 1} \quad , \quad (5.46)$$

$$L_{t,\ell} \approx \varepsilon_{t,\ell}^2 J_{t,\ell} \quad , \quad (5.47)$$

$$\varepsilon_{t,\ell}^2 Y_{t,\ell} \approx \frac{\pi^2}{30} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \, \frac{x^4}{\sqrt{}} \frac{1}{e^{\sqrt{}} - 1} \quad . \quad (5.48)$$

Hier steht $\sqrt{}$ für $\sqrt{x^2 + \varepsilon_{t,\ell}^2}$, mit dem dimensionslosen Massenparameter $\varepsilon_{t,\ell} = \beta m_{t,\ell}$. In der letzten Zeile wurde bereits einer der beiden Y -Beiträge ausintegriert (s. (A.12)).

Die numerische Auswertung der Integrale selbst stellt kein größeres Problem dar, da die Bosefunktion im Integranden jeweils für ein schnelles Abschneiden sorgt. Für jeden Wert von g ist dann dasjenige Tupel $(\varepsilon_t, \varepsilon_\ell)$ zu bestimmen, welches \mathcal{U} minimiert. Abbildung 5.1 zeigt (für $N = 3$ und $\alpha = 0$) das Ergebnis dieser Auswertung in einer Auftragung von ε_ℓ über ε_t .

Auf der Kurve sind einige Werte des Kopplungsparameters g angegeben. Es sind deutlich die beiden oben untersuchten Punkte erkennen, an denen eine oder beide Massen klein werden und somit eine Entwicklung der Integrale erlauben. Sogar der Wert $\varepsilon_t \simeq 1.6$, bei dem die longitudinale Masse wieder gegen Null geht, stimmt mit der Vorhersage (5.44) überein. Dies bestätigt die Richtigkeit der oben verwendeten Hoch-T-Entwicklungen.

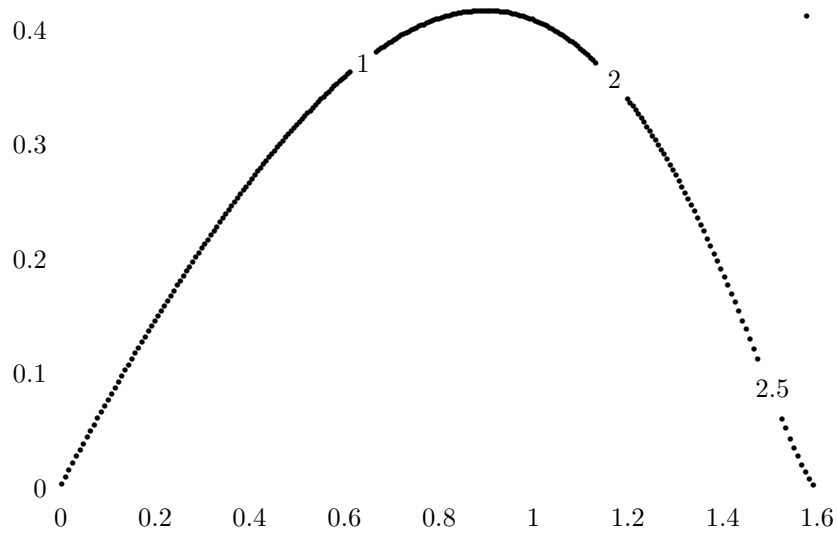


Abbildung 5.1: \mathcal{U} -Minimum-Wanderung mit wachsender Kopplung g für $N = 3$ und $\alpha = 0$ in einer Auftragung von ε_ℓ über ε_t . Auf der Kurve sind einige Werte von g angegeben.

Kapitel 6

Andere Eichfixierungen

Im vorangegangenen Kapitel war die in \mathcal{U} verbliebene Abhängigkeit von der Eichfixierung ein besonderer Dorn im Auge, der zu weiteren Bemühungen zwingt. In deren Vorfeld soll hier versucht werden, etwas Übersicht in das Verhalten des Variationsfunctionals in anderen (als kovarianten) Eichungen zu bringen. Die erste Wahl fällt auf die Coulomb-Eichung, wobei (in der Sprache des ersten Kapitels) die Eichbedingung $\mathcal{F}^a = \partial^j A_j^a$ lautet. Angeregt von einer Idee A. Rebhans¹ möchte ich jedoch (solange es technisch durchführbar bleibt) zunächst noch ein wenig allgemeiner bleiben, indem ich eine „Mischeichung“ verwende, welche sowohl die reine Coulomb-Eichung als auch die kovariante Eichung als Spezialfälle enthält.

Es schließt sich ein kurzer Abschnitt über den Versuch der Formulierung in einer axialen Eichung (TAG) an. Dort scheitert die Auswertung von \mathcal{U} jedoch daran, daß der *Trial*-Propagator einen quadratischen Pol bei $K_0 = 0$ enthält und somit die nötige Frequenzsummation behindert.

6.1 Mischeichung

Hier wähle ich als Eichbedingung sowohl der vollen als auch der *Trial*-Theorie das Funktional

$$\mathcal{F}^a = \tilde{\partial}^\mu A_\mu^a \quad , \quad \tilde{\partial}^\mu := \partial^\mu - x(U\partial)U^\mu = \left((1-x)\partial_0, \vec{\partial} \right) \quad . \quad (6.1)$$

Der reelle Parameters x legt die gewünschte Eichung fest. Ersichtlich enthält die „Mischeichung“ (6.1) die beiden Spezialfälle

$$x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{kovariante Eichung} \quad , \quad (6.2)$$

$$x = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \text{Coulomb - Eichung} \quad . \quad (6.3)$$

In dieser „Mischeichung“ wird nun in den nächsten beiden Abschnitten zunächst die *Trial*-Theorie bearbeitet (Propagatoren, Zustandssumme), um dann das Variationsfunktional aufzustellen und im Spezialfall der Coulomb-Eichung auszuwerten.

¹Anton Rebhan, DESY, Hamburg

6.1.1 Trial–Theorie, Zustandssumme, Propagator

Da die „Mischeichung“ (6.1) eine lineare Eichung ist, wird die Behandlung der *Trial*–Theorie im wesentlichen analog zu Kapitel 4 durchgeführt. Die *Trial*–Lagrangedichte ist hier

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{inv}} - \frac{1}{2\alpha}(\tilde{\partial}A)^2 + i\tilde{c}\tilde{\partial}^\mu\partial_\mu c \quad , \quad (6.4)$$

wobei der eichinvariante Teil wie bisher (s. Gl. (4.2))

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4}F_{\text{ab.}}^2 + \frac{1}{2}A(MA) \quad (6.5)$$

lautet. Man erhält die inversen Propagatoren

$$G_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\Delta_t}\mathbf{A}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Delta_\ell}\mathbf{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}\tilde{K}_\mu\tilde{K}_\nu \quad , \quad D^{-1} = i\tilde{K}K \quad . \quad (6.6)$$

Dabei wird \tilde{K} analog zu $\tilde{\partial}$ definiert: $\tilde{K} = ((1-x)K_0, \vec{k})$. Nach einer kurzen Rechnung ergeben sich aus (6.6) die *Trial*–Propagatoren in ähnlich kompakter Schreibweise:

$$G_{\mu\nu} = \Delta_t\mathbf{A}_{\mu\nu} + \Delta_\ell\frac{-K^2}{(\tilde{K}K)^2k^2}\tilde{V}_\mu\tilde{V}_\nu + \frac{\alpha}{(\tilde{K}K)^2}K_\mu K_\nu \quad , \quad D = \frac{1}{i\tilde{K}K} \quad (6.7)$$

Hier ist $\tilde{V}^\mu = V^\mu(\tilde{K}) = (-k^2, -(1-x)K_0\vec{k})$. Via $G^{-1}G = g$ kann man den Gluon–Propagator testen. An dieser Stelle soll es jedoch genügen zu sehen, daß (6.7) einerseits für $x = 0$ genau zum Propagator (4.13) wird und andererseits die Ward–Identität $\tilde{K}G\tilde{K} = \alpha$ erfüllt.

Zur Berechnung der Zustandssumme muß wieder eine Diagonalisierung des Exponenten in

$$Z_A = \int \mathcal{D}\tilde{A}_\mu e^{-\frac{1}{2}\sum\tilde{A}_\mu^{(G^{-1})\mu\nu}\tilde{A}_\nu} \quad (6.8)$$

vorgenommen werden (die Tilden haben hier verschiedene Bedeutungen: \tilde{A}_μ bezeichnet ein fouriertransformiertes Feld). Der einzige Unterschied zu (4.18) ist dabei

$$-\tilde{A}_\mu^- \frac{\tilde{K}^\mu\tilde{K}^\nu}{N}\tilde{A}_\nu = -\frac{1}{N}|\tilde{A}^\mu\tilde{K}_\mu|^2 =: d^2 \quad , \quad (6.9)$$

wobei N ein wählbarer Faktor ist ($N < 0$, damit d reell ist), mit dem z.B. die Jacobideterminante zu Eins gemacht werden kann. Mit $\frac{dd}{d\tilde{A}_\mu} = \frac{1}{\sqrt{-N}}\tilde{K}^\mu$ lautet die Jacobideterminante hier

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(e_1, e_2, b, d)}{\partial(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_0)} \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{-NV^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_0k & -k^2 \\ 0 & 0 & k & \tilde{K}_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{k(K_0\tilde{K}_0 - k^2)}{\sqrt{NK^2k^2}} = \frac{\tilde{K}K}{\sqrt{K^2N}} = 1 \quad \text{für} \quad N = \frac{(\tilde{K}K)^2}{K^2} \quad . \quad (6.10) \end{aligned}$$

Also ergeben sich für den Photon-Anteil der Zustandssumme hier wieder gewöhnliche Gauß-Integrale:

$$\begin{aligned} Z_A &= \int \mathcal{D}(e_1 \dots d) e^{\sum \left(\frac{1}{2\Delta_t} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{1}{2\Delta_\ell} b^2 + \frac{(\widetilde{K}K)^2}{\alpha K^2} d^2 \right)} \\ &= \prod_{n, \vec{k}} \left(-T^2 \Delta_t \right) \left(-T^2 \Delta_\ell \right)^{\frac{1}{2}} \left(-T^2 \frac{\alpha K^2}{(\widetilde{K}K)^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mit den Anteilen

$$Z_b \sim \prod \sqrt{\alpha} \quad , \quad Z_{\text{fp}} = \prod \left(-\beta^2 (\widetilde{K}K) \right) \quad (6.12)$$

erweist sich somit die Zustandssumme der *Trial*-Theorie (wie auch erforderlich!) unabhängig von der Wahl der Eichbedingung (und somit natürlich in völliger Übereinstimmung mit (4.24)) als

$$Z = \frac{Z_A Z_{\text{fp}}}{Z_b} = \prod_{n, \vec{k}} \left(-T^2 \Delta_t \right) \left(-T^2 \Delta_\ell \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{K^2}{T^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (6.13)$$

6.1.2 Variationsfunktional und Minimierung

In diesem Abschnitt wird das Variationsfunktional

$$\mathcal{V} = F - T \ln \left(\frac{Z_b}{Z_B} \right) + T \int^\beta \langle \mathcal{L} \rangle - T \int^\beta \langle \mathcal{L}_{\text{GP}} \rangle \quad (6.14)$$

entlang der Linie von Kapitel 5 ausgewertet, diesmal allerdings in der allgemeineren „Mischeichung“ (6.1). Sowohl die *Trial*-Theorie als auch die volle Theorie seien mischgeeicht, so daß es jetzt zwei reelle Parameter x und x_{YM} gibt, welche die Eichung der jeweiligen Theorie festlegen. Damit die bisherige elegante Notation $(\widetilde{\partial}, \widetilde{K})$ beibehalten werden kann, sollen die Größen, die vom Eichfixierungsterm der vollen Theorie herkommen, mit einer Doppeltilde versehen werden:

$$\widetilde{\widetilde{K}} := \left((1 - x_{\text{YM}}) K_0, \vec{k} \right) \quad , \quad \widetilde{K} = \left((1 - x) K_0, \vec{k} \right) \quad \text{etc.} \quad (6.15)$$

Die ersten beiden Terme von \mathcal{V} sind unabhängig von der Wahl der Eichung. Von der Zustandssumme wurde dies gerade im vorigen Abschnitt gezeigt. Die Jacobideterminante hingegen fängt lediglich Umskalierungen der Felder auf. Daher können die Ergebnisse (5.8) und (5.10) hier übernommen werden:

$$\begin{aligned} F - T \ln \left(\frac{Z_b}{Z_B} \right) &= -V \sum_K \left\{ \ln \left(-T^2 \Delta_t \right) + \frac{1}{2} \ln \left(-T^2 \Delta_\ell \right) - \frac{1}{2} \ln \left(-T^2 \Delta_0 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} V \left(\sum_K \right) \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \right) . \end{aligned} \quad (6.16)$$

Entlang der folgenden Zeilen wird klar, daß das Ergebnis (5.12) für das thermische Mittel der *Trial*-Theorie selbst ebenfalls unabhängig von der Wahl der Eichung ist:

$$\begin{aligned} T \langle S \rangle &= T \left\langle \int^\beta \mathcal{L} \right\rangle = T \sum_K \left\langle -\frac{1}{2} A^- \frac{1}{G} A - \bar{c} \frac{1}{D} c \right\rangle \\ &= T \sum_K \left[-\frac{1}{2} g_\mu^\mu + 1 \right] [K - K] = -V \left(\sum_K \right) . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Hier sind nacheinander die Definition der inversen Propagatoren, das thermische Mittel zweier fouriertransformierter Felder (s. (5.6), (5.7)), sowie die Impulsdeltafunktion (s. (1.14); $[K] = \beta V$ bei $K = 0$) verwendet worden. Diese elegante Art der Ableitung von $\langle S \rangle$ sollte aber nicht die in Kapitel 5 ausgeführten expliziten Rechnungen schmälern, sondern im Gegenteil als Test auf deren Richtigkeit angesehen werden.

Als einziger Anteil des Variationsfunktional, der eine Änderung der Eichbedingung „bemerken“ kann, bleibt also das thermische Mittel der vollen Theorie:

$$-T \int^\beta \langle \mathcal{L}_{\text{GP}} \rangle = -T \int^\beta \langle \mathcal{L}_0 \rangle - T \int^\beta \langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle \quad (6.18)$$

Hier ist wieder die Aufspaltung in den freien und den wechselwirkenden Anteil der Lagrangedichte vorgenommen worden. Der Beitrag vom freien Anteil lautet jetzt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0 \rangle &= \delta^{aa} \left\langle -\frac{1}{4} F_{\text{ab.}}^2 - \frac{1}{2\alpha_{\text{YM}}} (\tilde{\partial} A)^2 + i\bar{c} \tilde{\partial}_\mu \partial^\mu c \right\rangle \\ &= n \sum_K \left\{ -K^2 \left(\Delta_t + \frac{1}{2} \Delta_\ell \right) - \frac{\alpha}{2\alpha_{\text{YM}}} \widetilde{K}_\mu G^{\mu\nu} \widetilde{K}_\nu + i(\widetilde{K} K) D \right\} \\ &= n \sum_K \left\{ -K^2 \left(\Delta_t + \frac{1}{2} \Delta_\ell \right) - \frac{1}{2\alpha_{\text{YM}}} \left(-\Delta_\ell \frac{K^2 (\widetilde{K} \tilde{V})^2}{k^2 (\widetilde{K} K)^2} + \alpha \frac{(\widetilde{K} K)^2}{(\widetilde{K} K)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\widetilde{K} K)}{(\widetilde{K} K)} \right\} . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Bei der Mittelung des Wechselwirkungsterms \mathcal{L}_{int} trägt wieder nur der quartische Term bei. Dieser ist unabhängig von der Wahl der (linearen) Eichung der vollen Theorie, so daß Gl. (5.16) gültig bleibt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle &= -\frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} \langle A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu} \rangle \\ &= -\frac{1}{4} g^2 N n \left\{ \left(\sum G_\mu^\mu \right) \left(\sum G_\nu^\nu \right) - \left(\sum G_{\mu\nu} \right) \left(\sum G^{\mu\nu} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Der Unterschied zur vorherigen Behandlung besteht lediglich darin, daß jetzt über mischgeeichte *Trial*-Propagatoren G zu summieren ist:

$$\begin{aligned} \sum_K G_{\mu\nu}(K) &= \sum_K \left\{ \Delta_t \mathfrak{A}_{\mu\nu} - \Delta_\ell \frac{K^2}{k^2 (\widetilde{K} K)^2} \tilde{V}_\mu \tilde{V}_\nu + \frac{\alpha}{(\widetilde{K} K)^2} K_\mu K_\nu \right\} \\ &= \frac{1}{3} T^2 (\tilde{r} u_{\mu\nu} + \tilde{s} v_{\mu\nu}) =: w_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei hier

$$\tilde{r} = \beta^2 \sum_K \left(-2\Delta_t - \Delta_\ell \frac{K^2 \tilde{K}^2}{(\tilde{K}K)^2} - \alpha \frac{K^2}{(\tilde{K}K)^2} \right) , \quad (6.22a)$$

$$\tilde{s} = \beta^2 \sum_K \left(-\Delta_\ell \frac{K^2 k^2}{(\tilde{K}K)^2} + \alpha \frac{K_0^2}{(\tilde{K}K)^2} \right) \quad (6.22b)$$

ist. Als kleinen Test kann man $x = 0$ setzen (für kovariante Eichung der *Trial*-Theorie) und erhält (da dann $\tilde{K} = K$) genau die Summen (5.21). Es ergibt sich deshalb wiederum die aus dem vorigen Kapitel schon bekannte Struktur

$$\langle \mathcal{L}_{\text{int}} \rangle = -\frac{1}{6} g^2 N n T^4 (\tilde{r} + \tilde{s})(\tilde{r} - 2\tilde{s}) . \quad (6.23)$$

Unter Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Abschnittes lautet das Variationsfunktional insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[m_{t,\ell}; \alpha, x] &= -Vn \sum_K \left\{ \ln(-T^2 \Delta_t) + \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_\ell) - \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_0) \right\} \\ &\quad - Vn \left(\sum_K \right) \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \\ &\quad - Vn \sum_K \left\{ -K^2 \Delta_t - \frac{1}{2} K^2 \Delta_\ell - \frac{1}{2\alpha_{\text{YM}}} \left(-\Delta_\ell \frac{K^2 (\tilde{K}\tilde{V})^2}{k^2 (\tilde{K}K)^2} + \alpha \frac{(\tilde{K}K)^2}{(\tilde{K}K)^2} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. + \frac{(\tilde{K}K)}{(\tilde{K}K)} \right\} \\ &\quad + Vn \frac{1}{6} g^2 N T^4 (\tilde{r} + \tilde{s})(\tilde{r} - 2\tilde{s}) . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Setzt man hier $x_{\text{YM}} = x = 0$, eicht also beide Theorien kovariant, so reduziert sich (6.24) auf das Funktional (5.23) aus dem vorigen Kapitel.

Auch hier soll als „Aufwärmübung“ im Variationsraum zunächst nur bezüglich der Eichparameter variiert werden. Es wäre wünschenswert, daß die beiden *Trial*-Eichparameter α und x auf den Wert der jeweils entsprechenden Yang–Mills–Konstante rutschen. Dazu sehe man sich das Verhalten der am stärksten divergenten Terme von \mathcal{U} an:

$$\mathcal{U}[\alpha, x] = Vn \left(\sum_K \right) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \left(\frac{1-x_{\text{YM}}}{1-x} \right)^2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\text{YM}}} \right) - \left(\frac{1-x_{\text{YM}}}{1-x} \right) \right\} . \quad (6.25)$$

Mit den neuen Parametern $\bar{\alpha} = \alpha/\alpha_{\text{YM}}$ und $\bar{x} = (1-x_{\text{YM}})/(1-x)$ lautet die geschwungene Klammer

$$\left\{ \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \bar{\alpha} \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \ln \bar{\alpha} - \bar{x} \right\} . \quad (6.26)$$

Eine notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Verschwinden des Gradienten, welcher hier

$$(\partial_{\bar{\alpha}}, \partial_{\bar{x}}) \left\{ \right\} = \left(\frac{1}{2} \bar{x}^2 - \frac{1}{2\bar{\alpha}}, \bar{\alpha} \bar{x} - 1 \right) \quad (6.27)$$

lautet und genau am erwünschten Punkt $\bar{\alpha} = \bar{x} = 1$ verschwindet. Es bleibt noch nachzuprüfen, ob dieser stationäre Punkt wirklich ein Extremum von \mathcal{U} ist. Dazu berechnet man die Determinante

$$D = \left| \partial_{\bar{\alpha}} \circ \partial_{\bar{x}} \left\{ \right\} \right|_{\bar{\alpha}=\bar{x}=1} = \frac{1}{2\bar{\alpha}^2} - \bar{x}^2 \Big|_{\bar{\alpha}=\bar{x}=1} < 0 \quad (6.28)$$

und sieht somit, daß es sich leider nur um einen Sattelpunkt handelt (für ein Minimum ist $D > 0$ und $\partial_{\bar{\alpha}}^2 \left\{ \right\} > 0$ hinreichend). Dies ist eine Katastrophe, da somit gezeigt worden ist, daß \mathcal{U} bezüglich seiner Eichabhängigkeit *nicht* nach unten beschränkt ist, was im Widerspruch zu seiner Herleitung steht! Im folgenden werde ich das Funktional trotzdem an der Stelle $(\bar{\alpha} = 1, \bar{x} = 1)$ auswerten.

Mit $\alpha = \alpha_{\text{YM}}$ und $x = x_{\text{YM}}$, also mit in gleicher Weise mischgeichteten Theorien, hat das Variationsfunktional die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[m_t, m_\ell] &= -Vn \sum_K \left\{ \ln(-T^2 \Delta_t) + \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_\ell) - \frac{1}{2} \ln(-T^2 \Delta_0) \right\} \\ &\quad - Vn \sum_K \left\{ -K^2 \Delta_t - \frac{1}{2} K^2 \Delta_\ell - \frac{1}{2} + 1 \right\} \\ &\quad + Vn \frac{1}{6} g^2 N T^4 (\tilde{r} + \tilde{s})(\tilde{r} - 2\tilde{s}) \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$= Vn T^4 \left\{ -(2I_t + L_t) - \frac{1}{2}(2I_\ell + L_\ell) + \frac{1}{6} g^2 N (\tilde{r} + \tilde{s})(\tilde{r} - 2\tilde{s}) \right\} \quad (6.30)$$

In der letzten Zeile wurde wieder Gebrauch gemacht von der Definition (5.27) der Summen I und L , um \mathcal{U} in der Form (5.26) darzustellen. Es ist also wiederum erkennbar, daß die verbleibende Eichabhängigkeit des Variationsfunktionals nur vom letzten Term herkommt, denn sowohl \tilde{r} als auch \tilde{s} (vgl. (6.22)) enthalten die beiden Eichparameter α_{YM} und x_{YM} .

Bei der Auswertung von \tilde{r} und \tilde{s} gibt es einen elementaren Unterschied zwischen der Coulomb-Eichung mit $x = 1$ und den „anderen“ Mischeichungen. Das liegt daran, daß einige der auftretenden Summanden Nenner der Form $(\tilde{K}K)$ haben, welche in Coulomb-Eichung auf $(-k^2)$ reduzieren und somit wegen der veränderten Polstruktur nach Frequenzsummation qualitativ andere Ergebnisse liefern können. Dieser Spezialfall muß also bei der weiteren Auswertung des Variationsfunktionals gesondert behandelt werden.

Die Behandlung der Mischeichung selbst soll an dieser Stelle abgebrochen werden. Eine weitere Auswertung der in (6.29) auftretenden Summen (Frequenzsummation und asymptotische Entwicklung nach kleinen Massen) ist zwar technisch möglich, aber wenig erhellend und wurde daher aus Zeitgründen unterlassen. Im Verlauf der Arbeit entstand der Wunsch nach einer Mischeichungs-Formulierung erst, nachdem Ergebnisse in Coulomb-Eichung auf dem Papier standen. Dabei stellte sich die Frage, ob sich das Coulomb-Resultat in einem Limes $x \rightarrow 1$ glatt ergeben würde. Dies ist jedoch aufgrund der für $x = 1$ veränderten Polstruktur sicher nicht der Fall.

6.1.3 Coulomb–Eichung

In der Coulomb–Eichung $x_{\text{YM}} = 1$ lauten die beiden Faktoren, die den letzten Term des Variationsfunktional bilden,

$$(\tilde{r} + \tilde{s}) = \beta^2 \sum_K \left\{ -2\Delta_t + \frac{\alpha_{\text{YM}}}{k^2} \right\} \rightarrow 2J_t \quad , \quad (6.31)$$

$$(\tilde{r} - 2\tilde{s}) = \beta^2 \sum_K \left\{ -2\Delta_t + \Delta_\ell \frac{3K^2}{k^2} - \alpha_{\text{YM}} \frac{3K^2 + 2k^2}{k^4} \right\} \rightarrow 2J_t - 3X_\ell \quad . \quad (6.32)$$

Hier haben also genau die α_{YM} -abhängigen Terme keinen Pol mehr, sind deshalb temperaturunabhängig und brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Auf diese Art stellt sich ein Effekt ein, als *wäre* in Coulomb–Eichung der Eichparameter α_{YM} strikt auf Null gesetzt:

$$\mathcal{V}_{\text{Coul}}[m_t, m_\ell] = VnT^4 \left\{ -(2I_t + L_t) - \frac{1}{2}(2I_\ell + L_\ell) + \frac{1}{3}g^2N J_t(2J_t - 3X_\ell) \right\} \quad . \quad (6.33)$$

Das Variationsfunktional verliert so im Coulomb–Fall seine Eichparameterabhängigkeit. Die in (6.32) neu eingeführte Summe ist als

$$X_{t,\ell} := -\beta^2 \sum \frac{K^2}{k^2} (\Delta_\ell - \Delta_0) \quad (6.34)$$

definiert.

Analog zu Kapitel 5.1.1 soll hier nun das Verhalten des Coulomb–geeichten Variationsfunktional im Hoch– T –Limes, d.h. für kleine Kopplung $g \ll 1$, untersucht werden. Dazu ist es wieder empfehlenswert,

$$\varepsilon_{t,\ell} := \beta m_{t,\ell} \propto g + \dots \ll 1 \quad (6.35)$$

zu schreiben, was sich später als eine konsistente Annahme erweisen wird. Der temperaturabhängige Teil (B.14) der hier neu auftretenden Summe X ist in dieser Näherung

$$X_\ell \simeq \frac{T}{4\pi} m_\ell = \frac{T^2}{4\pi} \varepsilon_\ell \quad . \quad (6.36)$$

Damit und mit den asymptotischen Entwicklungen (B.9)–(B.13) der übrigen Summen ist

$$(2I + L)_{t,\ell} \simeq \frac{\pi^2}{45} - \frac{1}{12\pi} \varepsilon_{t,\ell}^3 + \dots \quad , \quad (6.37)$$

$$J_t \simeq \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi} \varepsilon_t + \dots \quad , \quad (6.38)$$

$$2J_t - 3X_\ell \simeq \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi} \varepsilon_t - \frac{3}{4\pi} \varepsilon_\ell + \dots \quad . \quad (6.39)$$

Eingesetzt in den Ausdruck (6.33) für das Variationsfunktional lauten die ε -abhängigen Terme

$$\mathcal{V}_{\text{Coul}}[\varepsilon_t, \varepsilon_\ell] \approx \frac{VnT^4}{4\pi} \left\{ \frac{1}{3} \varepsilon_t^3 - \frac{1}{9} g^2 N \varepsilon_t \right\} + \frac{VnT^4}{8\pi} \left\{ \frac{1}{3} \varepsilon_\ell^3 - \frac{1}{6} g^2 N \varepsilon_\ell \right\} \quad . \quad (6.40)$$

Das Funktional $\mathcal{U}_{\text{Coul}}$ findet also sein Minimum bei den Massen

$$m_t^2 = T^2 \varepsilon_t^2 = \frac{g^2 N T^2}{9} \quad , \quad m_\ell^2 = T^2 \varepsilon_\ell^2 = \frac{g^2 N T^2}{6} \quad . \quad (6.41)$$

Dies ist einerseits konsistent mit der Annahme (6.35), liefert aber trotz Unabhängigkeit vom Eichparameter nur für einen der beiden Variationsparameter, nämlich für die transversale Masse m_t , den erwarteten Wert $m = g\sqrt{N}T/3$. Dieses auf den ersten Blick im Vergleich zum kovariant geeichten Fall (vgl. das dortige Resultat (5.40)) erfreulichere Ergebnis möchte ich jedoch nicht überbetonen, da die Eichabhängigkeit der verwendeten Formulierung des Variationsverfahrens nicht grundlegend verstanden ist.

6.2 Eine axiale Eichung: TAG

Zum Abschluß dieses Kapitels soll das Variationsfunktional in einer weiteren linearen Eichung formuliert werden. Verschiedene Autoren [25] bevorzugen die temporale axiale Eichung wegen einer einfachen Struktur der Propagatoren. Ferner benutzt Bernard [8] sie als physikalische (d.h. die richtige Anzahl von Polarisationsfreiheitsgraden enthaltende) Eichung zu einer Hamilton'schen Formulierung der Zustandssumme.

In axialer Eichung wählt man eine Eichbedingung der Form

$$\mathcal{F}[A] = \mu n_\mu A^\mu \quad , \quad (6.42)$$

wobei n_μ ein konstanter, dimensionsloser Vierervektor ist und μ die Dimension einer Masse hat. In der Diskussion des Gluon-Plasmas ist die temporale axiale Eichung (temporal axial gauge, TAG) mit $n_\mu = U_\mu = (1, \vec{0})$ gegenüber anderen Wahlen von n_μ ausgezeichnet, da dieser konstante Vierervektor als Definition des Ruhesystems des Plasmas von vornherein in die Theorie einfließt.

Die *Trial*-Theorie hat in TAG also die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{inv}} - \frac{\mu^2}{\alpha} (U_\mu A^\mu)^2 + i\mu \bar{c} U_\mu \partial^\mu c \quad , \quad (6.43)$$

wobei \mathcal{L}_{inv} aus Gleichung (6.5) sowohl den kinetischen Term als auch den Massenterm umfaßt. Aus (6.43) folgen die *Trial*-Gluonpropagatoren

$$G^{-1} = \frac{1}{\Delta_t} \mathbf{A} + \frac{1}{\Delta_\ell} \mathbf{B} - \frac{\mu^2}{\alpha} U \circ U \quad , \quad (6.44)$$

$$G = \Delta_t \mathbf{A} - \Delta_\ell \frac{K^2}{k^2 K_0^2} \bar{K} \circ \bar{K} - \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{K^2}{K_0^2} \mathbf{D} \quad . \quad (6.45)$$

Die Notation ist wie gewohnt. $\Delta_{t,\ell}$ bezeichnet die Propagatoranteile (4.12), \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{D} sind die Matrizen (1.28), und $\bar{K} = (0, \vec{k})$ enthält nur den Dreier-Anteil des Impulses K . Der Propagator (6.45) erfüllt die Ward-Identität $\mu^2 U G U = -\alpha$ und stimmt mit den in

[25, 26] angegebenen Versionen überein. Der Geistpropagator ist durch $D = -1/\mu K_0$ gegeben. Im übrigen kann man die bisherigen TAG-Ergebnisse auch aus den entsprechenden Mischeichungs-Größen erhalten, wenn man $\widetilde{K} \rightarrow i\mu U$ sowie den dazu orthogonalen Vierervektor $\widetilde{V} \rightarrow i\widetilde{K}$ setzt. Das i in den angegebenen Ersetzungen hat seinen Ursprung darin, daß die Fourierdarstellung aus einer Vierer-Ortsableitung $\widetilde{\partial}$ den Viererimpuls ($-i\widetilde{K}$) werden läßt, während hier der konstante Vektor U nicht transformiert.

In der Form (6.30) des Variationsfunktional sind aufgrund dieser Überlegung also alle linearen Eichungen behandelbar. Da die axialen Eichungen linear sind, kann man von den Untersuchungen des Abschnitts 6.1.2 profitieren und das Variationsfunktional in der Form

$$\mathcal{U}[m_t, m_\ell] = VnT^4 \left\{ -(2I_t + L_t) - \frac{1}{2}(2I_\ell + L_\ell) + \frac{1}{6}g^2 N(r + s)(r - 2s) \right\} \quad (6.46)$$

übernehmen. Dabei sind lediglich die Größen r und s abhängig von der gewählten Eichung. Laut Definition (5.20) ergeben sie sich in TAG als

$$r_{\text{TAG}} = \beta^2 \sum_K \left(-2\Delta_t - \frac{K^2}{K_0^2} \Delta_\ell + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{K^2}{K_0^2} \right) \quad , \quad (6.47)$$

$$s_{\text{TAG}} = \beta^2 \sum_K \left(-\frac{\alpha}{\mu^2} \right) \quad . \quad (6.48)$$

Einer weiteren Auswertung des Variationsfunktional steht hier die Polstruktur $1/K_0^2$ in r im Wege (in beliebigen axialen Eichungen $\mathcal{F} \propto n_\mu A^\mu$ wäre der Pol bei $1/(nK)^2$). Einige Autoren wie z.B. Kalashnikov [26] *definieren* solche Summen als $\sum 1/K_0^2 \equiv 0$, um in TAG dieselben Ergebnisse wie in anderen (kovarianten) Eichungen zu erhalten. Hier jedoch ist kein eichunabhängiges Resultat in Aussicht, so daß nichts über den Umgang mit diesen Summen gelernt werden kann, indem zum Vergleich die Ergebnisse in kovarianter, Coulomb- oder Misch-Eichung herangezogen werden.

Dieses Kapitel hat zweierlei gezeigt. Zum einen ist durch die Behandlung weiterer linearer Eichfixierungen die Struktur des Variationsfunktional \mathcal{U} klar zum Vorschein gekommen. Es hat sich herausgestellt, daß \mathcal{U} immer in der gleichen Form formuliert werden kann (vgl. (6.46),(6.30),(5.26)), wobei zur Auswertung der zwei Summen r und s eine Kenntnis des Propagators in der jeweiligen Eichung vonnöten ist. Zum anderen hat die Ausarbeitung der Mischeichung gezeigt, daß eine Benutzung von \mathcal{U} zur Variation nach Eichparametern äußerst kritisch ist. Damit erhält auch die in den kovarianten Eichungen per Variation gelungene Identifizierung der Eichparameter $\alpha = \alpha_{\text{YM}}$ (s. (5.25)) eine fragwürdige Bedeutung.

Kapitel 7

Variation nach Stärke der Gluon–Selbstenergie Π

In diesem Kapitel wird mit Hilfe eines modifizierten Ansatzes für den Massenterm der *Trial*–Theorie untersucht, ob die in den bisherigen Resultaten verbliebene Eichabhängigkeit ihren Ursprung im Ansatz *konstanter* Massen hatte. Ausschlaggebend ist dabei die Tatsache, daß die „thermischen Massen“ $\Pi_{t,\ell}(K)$ des leading–order Gluon–Propagators (1.29) eine wohldefinierte Impulsabhängigkeit haben und sich erst im statischen Limes $\vec{k} \rightarrow 0$ der Konstanten $m = g\sqrt{N}T/3$ nähern.

7.1 *Trial*–Theorie mit $\Pi_{t,\ell}$

Die Formulierung des Massenterms der *Trial*–Theorie in Gleichung (4.3) erlaubt durchaus, den Koeffizienten vor den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} eine Impulsabhängigkeit zu geben. Hier sei also der abelsch eichinvariante Anteil der *Trial*–Lagrangedichte gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4}F_{\text{ab.}}^2 + \frac{1}{2}A_\mu(x) \int_{x'}^\beta \sum_K e^{-iK(x-x')} M^{\mu\nu}(K) A_\nu(x') \quad . \quad (7.1)$$

Dabei beschränkt die Forderung nach Eichinvarianz von \mathcal{L}_{inv} die Funktion $M_{\mu\nu}(K)$ auf die Form

$$M_{\mu\nu}(K) = M_t(K)\mathbf{A}_{\mu\nu}(K) + M_\ell(K)\mathbf{B}_{\mu\nu}(K) \quad . \quad (7.2)$$

An dieser Stelle ist es nützlich, von den bisherigen Untersuchungen zur Form des Variationsfunktionals \mathcal{U} zu profitieren. In kovarianten Eichungen lautet der *Trial*–Propagator hier

$$G_{\mu\nu} = \Delta_t \mathbf{A}_{\mu\nu} + \Delta_\ell \mathbf{B}_{\mu\nu} + \alpha \Delta_0 \mathbf{D}_{\mu\nu} \quad , \quad (7.3)$$

$$\Delta_{t,\ell}(K) = \frac{1}{K^2 - M_{t,\ell}(K)} \quad , \quad \Delta_0(K) = \frac{1}{K^2} \quad . \quad (7.4)$$

Es ist daher möglich, die Darstellung von \mathcal{U} mit Hilfe der in (5.27) definierten Summen I , J , L und Y sowie

$$(r + s) = 2J_t + J_\ell - Y_\ell + \alpha Y_0 \quad , \quad (7.5)$$

$$(r - 2s) = 2J_t + J_\ell + 2Y_\ell + \alpha(3J_0 - 2Y_0) \quad (7.6)$$

direkt aus der Gleichung (5.26) zu übernehmen:

$$\mathcal{U} = VnT^4 \left\{ -(2I_t + L_t) - \frac{1}{2}(2I_\ell + L_\ell) + \frac{1}{6}g^2 N(r + s)(r - 2s) \right\} \quad . \quad (7.7)$$

Bei der Auswertung der Summen wie z.B. $J_{t,\ell} = -\beta^2 \sum \Delta_{t,\ell}$ geht entscheidend die Polstruktur der Propagatoren ein. Der hier verwendete Ansatz für die noch zu spezifizierenden Funktionen $M_{t,\ell}(K)$ orientiert sich, wie die Kapitelüberschrift schon suggeriert, an den bekannten Ergebnissen für den führenden Anteil der Gluon-Selbstenergie. Ich wähle

$$M_{t,\ell}(K) := \lambda_{t,\ell}^2 \Pi_{t,\ell}(K) \quad , \quad (7.8)$$

mit $\Pi_{t,\ell}$ aus Gleichung (1.29). Damit sind λ_t und λ_ℓ als Variationsparameter eingeführt. Mit diesem Massenterm wird also der leading-order Propagator der QCD im Hochtemperaturlimes mit Hilfe der abelschen Test-Theorie exakt simuliert, falls $\lambda_t = \lambda_\ell = 1$ ist. Die per Variation zu beantwortende Frage ist also, ob sich beide Parameter zu Eins bestimmen lassen.

7.2 Auswertung

Es ist möglich, den *Trial*-Propagator mit Hilfe einer Skalenrelation durch seine bekannte Spektraldarstellung [1] bei $\lambda_{t,\ell} = 1$ auszudrücken. Daher ist es möglich, auch in diesem Fall eines impulsabhängigen Massenterms die zur Auswertung des Variationsfunktionals benötigten Summen als asymptotische Reihe darzustellen.

Die spektralen Dichten [27] $\rho_{t,\ell}$ des leading-order Gluon-Propagators (1.32) sind definiert durch

$$\frac{1}{K^2 - \Pi_{t,\ell}(K)} =: \int dx x \frac{\rho_{t,\ell}(x, k)}{K_0^2 - x^2} \quad . \quad (7.9)$$

Die explizite Form von $\rho_{t,\ell}$ ist z.B. in [1] aufgeführt, sie wird hier aber nicht weiter interessieren.

Auch für die Propagatoren des „ λ -Falles“ lassen sich spektrale Dichten $\rho_{t,\ell}^{(\lambda)}$ definieren:

$$\frac{1}{K^2 - \lambda_{t,\ell}^2 \Pi_{t,\ell}(K)} =: \int dx x \frac{\rho_{t,\ell}^{(\lambda)}(x, k)}{K_0^2 - x^2} \quad . \quad (7.10)$$

Da die Funktionen $\Pi_{t,\ell}(K)$ nur vom Verhältnis K_0/k abhängen (s. (1.29)), ergibt sich aus (7.10) per Skalierung $K \rightarrow \lambda_{t,\ell} K$ sowie der Substitution $x = \lambda_{t,\ell} y$ unter dem Integral die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda_{t,\ell}^2 K^2 - \Pi_{t,\ell}(K)} = \int dy y \frac{\rho_{t,\ell}^{(\lambda)}(\lambda_{t,\ell} y, \lambda_{t,\ell} k)}{K_0^2 - y^2} \quad . \quad (7.11)$$

Durch Vergleich mit (7.9) folgt die „Skalenrelation“

$$\lambda_{t,\ell}^2 \rho_{t,\ell}^{(\lambda)}(\lambda_{t,\ell} y, \lambda_{t,\ell} k) = \rho_{t,\ell}(y, k) \quad , \quad (7.12)$$

welche die neu eingeführten Dichten $\rho_{t,\ell}^{(\lambda)}$ auf die bekannten Funktionen $\rho_{t,\ell}$ zurückführt.

Dank (7.12) „erben“ die spektralen Dichten der λ -Propagatoren sämtliche Eigenschaften der ursprünglichen und in [1] umfassend studierten Dichten $\rho_{t,\ell}$, insbesondere deren Summenregeln [28, 15]:

$$\int dx x \rho_{t,\ell}^{(\lambda)}(x, k) = 1 \quad (7.13a)$$

$$\int dx \frac{1}{x} \rho_{t,\ell}^{(\lambda)}(x, k) = \frac{1}{k^2} \quad (7.13b)$$

$$\int dx \frac{1}{x} \rho_{\ell}^{(\lambda)}(x, k) = \frac{1}{3\lambda_{t,\ell}^2 m^2 + k^2} \quad . \quad (7.13c)$$

Mit Hilfe der Spektraldarstellung (7.10) und den Beziehungen (7.13) ist es nun möglich, die asymptotisch führenden Terme der in \mathcal{U} vorkommenden K -Summen anzugeben. Die dazu benötigten Schritte werden in Anhang B.2 dargestellt. Im Hoch-T-Limes ergibt sich (B.31):

$$I_t = \frac{\pi^2}{90} + 0 + 0 + \dots \quad , \quad I_\ell = \frac{\pi^2}{90} - \frac{1}{24}\zeta_\ell^2 + \frac{1}{12\pi}\zeta_\ell^3 + \dots \quad (7.14a)$$

$$J_t = \frac{1}{12} + 0 + \dots \quad , \quad J_\ell = \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi}\zeta_\ell + \dots \quad (7.14b)$$

$$L_t = 0 + 0 + \dots \quad , \quad L_\ell = \frac{1}{12}\zeta_\ell^2 - \frac{1}{4\pi}\zeta_\ell^3 + \dots \quad (7.14c)$$

$$Y_\ell = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\zeta_\ell + \dots \quad . \quad (7.14d)$$

Dabei ist $\zeta_{t,\ell} = \sqrt{3} \lambda_{t,\ell} \beta m$. Die „Masse“ m hat im Unterschied zu den vorangegangenen Kapiteln hier den festen Wert $m = g\sqrt{N}T/3$, während λ_t und λ_ℓ die Variationsparameter sind.

Für kleine $\zeta_{t,\ell}$ kann man jetzt das Variationsfunktional wieder hinschreiben. Wie im Fall konstanter Massen startet der $(2I+L)$ -Term erst mit ζ^3 , während von den Ausdrücken $(r+s)$ und $(r-2s)$ nur letzterer einen linearen Term hat:

$$(2I+L)_t = \text{const.} \quad , \quad (2I+L)_\ell = \text{const.} - \frac{1}{12\pi}\zeta_\ell^3 \quad , \quad (7.15)$$

$$(r+s) = \frac{1+\alpha}{8} + 0 \cdot \zeta \quad , \quad (r-2s) = \text{const.} - \frac{3}{4\pi}\zeta_\ell \quad . \quad (7.16)$$

Erstaunlicherweise fällt in dieser Näherung der Parameter ζ_t (bzw. λ_t) heraus. Für das Variationsfunktional ergibt sich also

$$\mathcal{U}(\zeta_\ell = \sqrt{3} \lambda_\ell \beta m) \approx VnT^4 \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{3}\zeta_\ell^3 - \frac{1+\alpha}{8} g^2 N \zeta_\ell \right\} \quad . \quad (7.17)$$

Hier sind die ζ -unabhängigen Konstanten weggelassen worden. Es folgt

$$\partial_{\zeta_\ell} \mathcal{V} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad \zeta_\ell^2 = \frac{1+\alpha}{8} g^2 N \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_\ell^2 = 3 \frac{1+\alpha}{8} \neq 1 \quad . \quad (7.18)$$

So haben sich also weder die Hoffnung, ein Massenterm mit derselben Impulsabhängigkeit wie die thermische Gluonmasse könnte ein eichunabhängiges Resultat produzieren, noch die Erwartung, die eingeführten Vorfaktoren λ würden sich per Variation zu $\lambda = 1$ bestimmen, erfüllt.

Kapitel 8

Versuch der Quantisierung im Fock–Raum

Wie schon bei der Herleitung des Variationsfunktional in Kapitel 3 angedeutet wurde, läßt sich das Variationsverfahren auch in einer Hamilton’schen Formulierung der zu untersuchenden Theorie anwenden. Anstoß dazu gibt die Arbeit von Manka [24], der durch Variation im *physikalischen* Sektor des Hilbertraumes der vollen Theorie [29, 13] jegliche Eichparameterabhängigkeit vermeidet. Er behandelt zwar dasselbe physikalische System, welches auch in dieser Arbeit untersucht wird, führt seine Betrachtungen aber nur für eine transversale *Trial*–Masse m_t durch. Angeregt von Mankas Bemerkungen zur Möglichkeit des Einbaus einer longitudinalen Masse m_ℓ in die *Trial*–Theorie soll in diesem Kapitel versucht werden, den von ihm gegangenen Weg auf zwei Variationsparameter zu verallgemeinern.

Im ersten Abschnitt geht eine erneute Herleitung des Variationsfunktional einem einfachen Anwendungsbeispiel voran. Daraufhin wird der physikalische Sektor des Hilbertraumes der vollen Theorie mit Hilfe der BRS–Ladung identifiziert, um dann die Berechnung der einzelnen Terme für \mathcal{U} analog zum Funktionalintegral–Formalismus der vorangegangenen Kapitel voranzutreiben.

8.1 Hamilton’sche Formulierung der Variationsmethode

Die Herleitung der Extremaleigenschaften der thermodynamischen Potentiale eines quantenstatistischen Ensembles wird in Standardlehrbüchern behandelt (s. z.B. [30]). Die Ungleichung für die Freie Energie soll hier zur Einführung der Notation wiedergegeben werden, um dann mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung des Dichteoperators das Variationsfunktional zu definieren.

Wegen der Konvexität des Logarithmus

$$-\ln(x) \geq 1 - x \tag{8.1}$$

gilt für zwei im gleichen Hilbertraum (HR) wirkende statistische Operatoren ρ und ρ_0 die Ungleichung

$$\text{Sp} (\rho \ln(\rho)) = \text{Sp} \left(\rho \left[\ln(\rho_0) - \ln(\rho_0 \rho^{-1}) \right] \right) \geq \text{Sp} (\rho \ln(\rho_0)) \quad . \quad (8.2)$$

Sei nun $\rho_0 = e^{-\beta H_0} / Z_0$ mit $Z_0 = \text{Sp}(e^{-\beta H_0})$ der Dichteoperator eines kanonischen Ensembles mit Hamiltonoperator H_0 , dann folgt mit (8.2) die Minimaleigenschaft der Freien Energie im Raum der Dichteoperatoren ρ :

$$\begin{aligned} F[\rho] &= E[\rho] - TS[\rho] = \text{Sp}(\rho H_0) + T \text{Sp}(\rho \ln(\rho)) \\ &\geq \text{Sp}(\rho H_0) + T \text{Sp}(\rho \ln(\rho_0)) = -T \ln(Z_0) = F[\rho_0] \quad . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Gibt man dem statistischen Operator ρ die Form $\rho = e^{-\beta H} / Z$ mit $Z = \text{Sp}(e^{-\beta H})$ und mit einem beliebigen positiv-definiten, hermiteschen Operator H (fortan als *Trial*-Theorie bezeichnet) aus dem HR von H_0 , so folgt

$$\mathcal{U}[H] := \text{Sp} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} (H_0 - H) \right) - T \ln(Z) \geq F[\rho_0] \quad . \quad (8.4)$$

Das auf diese Weise eingeführte Funktional \mathcal{U} erlaubt also wiederum, verschiedene *Trial*-Theorien H miteinander zu vergleichen. Es hat ein Minimum bei $H = H_0$, also zeichnen sich gute *Trial*-Ansätze H durch tiefe Funktionalwerte $\mathcal{U}[H]$ aus.

In einer etwas kompakteren Formulierung liest sich das Variationsfunktional wie folgt:

$$\mathcal{U} = F + \langle H_0 - H \rangle \stackrel{!}{=} \min. \quad . \quad (8.5)$$

Dabei ist $F = -T \ln(Z) = -T \ln(\text{Sp}(e^{-\beta H}))$ die Freie Energie der *Trial*-Theorie, und das thermische *Trial*-Mittel ist durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \frac{1}{Z} \text{Sp} (e^{-\beta H} \mathcal{O}) \quad (8.6)$$

definiert. Alle nichtindizierten Objekte (Z, H) bezeichnen *Trial*-Größen, während nur noch H_0 auf das eigentlich interessierende System verweist. Dieses kann eine Feldtheorie sein und somit eine *Trial*-Feldtheorie zur Bestückung des Variationsfunktionals erfordern. Zunächst soll jedoch im folgenden Abschnitt mit dem Heisenberg-Modell ein quantenstatistisches Beispiel gegeben werden, bevor der restliche Teil dieses Kapitels sich dem Gluon-Plasma widmet.

Ein einfaches Beispiel: Curie-Weiß

Als Beispiel zum Funktionieren der Variationsmethode soll hier ein einfaches System dienen, welches in Kursvorlesungen über statistische Mechanik standardmäßig behandelt wird (s. z.B. [30]). Es wird gezeigt, daß die optimale „*mean-field*“-Näherung für das Heisenberg-Modell genau der Curie-Weiß-Hamiltonoperator ist.

N Elektronen mögen sich auf einem Gitter angeordnet befinden. Betrachtet man nur die Spin-Spin-Wechselwirkung, so lautet der Hamiltonoperator bei Anwesenheit eines externen Magnetfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_z$

$$H = -\mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i^z - \frac{1}{2} \sum'_{i,j} J_{ij} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \quad , \quad (8.7)$$

mit den Pauli-Spinmatrizen $\vec{\sigma}$ und dem Bohr'schen Magneton $\mu = |e|\hbar/2m_e$. Die gestrichelte Summe steht für die Unterdrückung der Selbstwechselwirkung, also des $i = j$ -Terms.

Bei verschwindender Spin-Spin Kopplung, $J_{ij} = 0$, folgt für die mittlere Magnetisierung pro Elektron

$$m_0 := \frac{1}{N} \overline{\sum_i \sigma_i^z} = \tanh(\beta\mu B) \quad . \quad (8.8)$$

In der sogenannten „*mean-field approximation*“ nähert man den Wechselwirkungsterm des Hamiltonian (8.7) durch $-m(\sum_i \sigma_i^z)\theta$, mit $\theta := \sum_i' J_{ij}$. θ ist wegen der Translations-symmetrie des Modells j -unabhängig. Also hat der gesamte Hamiltonoperator in dieser Näherung die wechselwirkungsfreie Form (Curie-Weiß)

$$H_{\text{CW}} = -\mu B_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i^z \quad \text{mit} \quad B_{\text{eff}} = B + \frac{\theta m}{\mu} \quad , \quad (8.9)$$

weshalb sich mit (8.8) jetzt die mittlere Magnetisierung eines Elektrons

$$m = \tanh(\beta\mu B_{\text{eff}}) = \tanh(\beta\mu B + \beta\theta m) \quad (8.10)$$

als implizite Gleichung schreiben läßt.

Das Variationsverfahren ist nun in der Lage, den besten Parameter B_{eff} zu liefern. Die Theorie (8.7) ist also mit Hilfe des *Trial*-Hamiltonians

$$H_\lambda = -\lambda \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad (8.11)$$

zu untersuchen. Nach dem Aufstellen des Variationsfunktional (8.5) wird man durch dessen Minimierung eine Bedingung für den Parameter λ erhalten und mit (8.10) vergleichen können ($\lambda \stackrel{?}{=} \mu B_{\text{eff}}$). Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[\lambda] &= F_\lambda + \langle H - H_\lambda \rangle_\lambda \\ &= -T \ln Z_\lambda + (\lambda - \mu B) \left\langle \sum_i \sigma_i^z \right\rangle_\lambda - \frac{1}{2} \left\langle \sum'_{ij} J_{ij} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \right\rangle_\lambda \quad , \end{aligned} \quad (8.12)$$

wobei $\langle \rangle_\lambda$ das thermische Mittel bezüglich H_λ ist. Die Zustandssumme lautet

$$Z_\lambda = \text{Sp} \left(e^{\beta\lambda \sum_i \sigma_i^z} \right) = \left(e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda} \right)^N = \left(2 \cosh(\beta\lambda) \right)^N \quad . \quad (8.13)$$

Daraus ergibt sich einerseits sofort der erste Term in (8.12), während andererseits der zweite Term geschickt mittels

$$\left\langle \sum_i \sigma_i^z \right\rangle_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda} \text{Sp} \left(e^{\beta\lambda \sum \sigma^z} \sum \sigma^z \right) = \partial_{(\beta\lambda)} \ln Z_\lambda \quad (8.14)$$

herzuleiten ist. Der dritte Term wird durch eine explizite Ausführung der Spur über Produktzustände von Spinoren berechnet:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum'_{ij} J_{ij} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \right\rangle_\lambda &= \frac{1}{Z_\lambda} \sum'_{ij} J_{ij} \text{Sp} \left(e^{\beta\lambda \sum \sigma^z} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \right) \\ &= \frac{1}{Z_\lambda} \left(2 \cosh(\beta\lambda) \right)^{N-2} \sum'_{ij} J_{ij} \text{Sp}_{12} \left(e^{\beta\lambda(\sigma_1^z + \sigma_2^z)} \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \right) \\ &= \left(2 \cosh(\beta\lambda) \right)^{-2} \sum_j \theta \left(e^{2\beta\lambda} - 1 - 1 + e^{-2\beta\lambda} \right) \\ &= N\theta \tanh^2(\beta\lambda) \quad . \end{aligned} \quad (8.15)$$

In der dritten Zeile ist wieder die Definition von $\theta = \sum_i' J_{ij}$ verwendet worden. Insgesamt lautet das Funktional (8.12) also

$$\mathcal{U}[\lambda] = -T \ln Z_\lambda + (\lambda - \mu B) \partial_{(\beta\lambda)} \ln Z_\lambda - \frac{1}{2} N\theta \tanh^2(\beta\lambda) \quad , \quad (8.16)$$

so daß die Minimierung von \mathcal{U} mit Hilfe der Identität $\partial_\lambda = \beta \partial_{(\beta\lambda)}$ die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \partial_\lambda \mathcal{U}[\lambda] = (\lambda - \mu B) \beta \partial_{(\beta\lambda)}^2 \ln Z_\lambda - \frac{1}{2} N\theta \beta \partial_{(\beta\lambda)} \tanh^2(\beta\lambda) \\ &= \beta N \left(\partial_{(\beta\lambda)} \tanh(\beta\lambda) \right) \left(\lambda - \mu B - \theta \tanh(\beta\lambda) \right) \\ \rightsquigarrow &\quad \lambda = \mu B + \theta \tanh(\beta\lambda) \end{aligned} \quad (8.17)$$

ergibt. Weil hier die mittlere Magnetisierung durch $m = \tanh(\beta\lambda)$ gegeben ist (vgl. (8.8) oder auch (8.14)), folgt

$$\lambda = \mu B + \theta m = \mu B_{\text{eff}} \quad . \quad (8.18)$$

Die „*mean-field*“-Näherung (8.9) ist also die optimale Näherung für B_{eff} – wie oben behauptet.

8.2 Der physikalische Hilbertraum

Dieser Abschnitt widmet sich der Untersuchung der vollen Theorie. Mit Hilfe der erhaltenen Ladung Q_{BRS} der BRS-Symmetrie wird der physikalische Sektor des Hilbertraumes identifiziert, um so den von Manka [24] beschrittenen Weg nachzuvollziehen. Die eichfixierte Lagrangedichte der $SU(N)$, des reinen Yang-Mills-Eichfeldes, laute in diesem Kapitel

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} = -\frac{1}{4} F^2 - (\partial_\mu B) A^\mu + \frac{\alpha_{\text{YM}}}{2} B^2 - i\xi (\partial^\mu \bar{c}) D_\mu c \equiv \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} \quad . \quad (8.19)$$

Dabei halte ich mich an die Formulierung einer Eichfixierung mittels Hilfsfeld B^a , um die Quantisierung analog zu Manka bzw. Kugo/Ojima (\equiv KO) [29] oder Nakanishi/Ojima (\equiv NO) [13] vornehmen zu können. In (8.19) lauten der Feldstärketensor und die kovariante Ableitung wie gewohnt

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad , \\ D_\mu^{ab} &= \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c \quad . \end{aligned}$$

Damit die Lagrangedichte (8.19) hermitesch ist, gelte neben $A_\mu^\dagger = A_\mu$, $B^\dagger = B$ für die Geister $c^\dagger = c$ und damit $(\xi\bar{c})^\dagger = \xi\bar{c}$.

Die Eichinvarianz der nicht eichfixierten Yang–Mills–Lagrangedichte ($-\frac{1}{4}F^2$) übersetzt sich in die BRS-Invarianz von $S_{\text{GP}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{GP}}$. Mit dem globalen Grassmann–Parameter ω lautet diese

$$\delta A_\mu^a = -\omega D_\mu^{ab} c^b \quad , \quad \delta B^a = 0 \quad , \quad (8.20a)$$

$$\delta(\xi\bar{c}^a) = -i\omega B^a \quad , \quad \delta c^a = \omega \frac{1}{2} g f^{abc} c^b c^c \quad . \quad (8.20b)$$

Der Unterschied zur im ersten Kapitel angegebenen Transformation (1.22) ist schnell anhand der Bewegungsgleichung $\alpha_{\text{YM}} B^a = -\partial^\mu A_\mu^a$ zu verstehen. Per Noether–Theorem kann man die Existenz eines erhaltenen Stroms (vgl. NO 3.4.2-2)

$$\begin{aligned} J_{\text{BRS}}^\mu &= B^a D^{\mu,ab} c^b + (D_\nu^{ab} c^b) F^{\nu\mu,a} - \frac{i}{2} g f^{abc} (\partial^\mu \xi \bar{c}^a) c^b c^c \\ &= B^a D^{\mu,ab} c^b - c^a \partial^\mu B^a + \frac{i}{2} g f^{abc} (\partial^\mu \xi \bar{c}^a) c^b c^c + \partial_\nu (c^a F^{\nu\mu,a}) \end{aligned}$$

zeigen, wobei in der letzten Zeile zur Umformung die Bewegungsgleichung

$$D_\mu^{ab} F^{\mu\nu,a} = \partial^\nu B^a - i g f^{abc} (\partial^\nu \xi \bar{c}^b) c^c$$

benutzt wurde. Die dazugehörige (hermitesche) erhaltene Ladung $Q \equiv \int d^3x J^0(x)$ schreibt sich

$$Q_{\text{BRS}} = \int d^3x \left(B^a D_0^{ab} c^b - c^a \partial_0 B^a + \frac{i}{2} g f^{abc} (\partial_0 \xi \bar{c}^a) c^b c^c \right) \quad . \quad (8.21)$$

Es gibt noch eine erhaltene Ladung von (8.19), die Faddeev–Popov Geist–Ladung Q_C . Aus der Invarianz des Geist–Terms unter der Skalen–Transformation $c^a \rightarrow e^\theta c^a$ und $\bar{c}^a \rightarrow e^{-\theta} \bar{c}^a$ mit reellem Parameter θ folgen via Emmy Noether der erhaltene Strom und die (hermitesche) Ladung

$$\begin{aligned} J_C^\mu &= i \left(c^a \partial_\mu \xi \bar{c}^a + \xi \bar{c}^a D_\mu^{ab} c^b \right) \quad , \\ Q_C &= i \int d^3x \left(c^a \partial_0 \xi \bar{c}^a + \xi \bar{c}^a D_0^{ab} c^b \right) \quad . \end{aligned} \quad (8.22)$$

Mit $\Pi_\Phi^1 \equiv \partial_{\dot{\Phi}_1} \mathcal{L}$, den zu $\Phi_1 (= A_k^a, B^a, c^a, \xi \bar{c}^a)$ konjugierten Impulsen, fordert man die kanonischen equal-time (Anti-) Kommutatoren (vgl. NO 3.4.1-23)

$$[\Pi_\Phi^1(x), \Phi_J(y)]_{\mp,0} = -i \delta_J^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (8.23a)$$

$$[\Pi_\Phi^1(x), \Pi_\Phi^1(y)]_{\mp,0} = [\Phi_1(x), \Phi_J(y)]_{\mp,0} = 0 \quad . \quad (8.23b)$$

Dabei werden Antikommutatoren (Index +) nur zwischen *zwei* Fermionfeldern (c, \bar{c}) genommen, und der Index 0 außerhalb der Klammern steht für $x^0 = y^0$. Die kanonische Quantisierung führt auf einen Hilbertraum \mathcal{H} mit indefiniter Metrik. Folgt man den Argumenten von KO und NO, so ist (analog zum Gupta-Bleuler-Formalismus in der QED) auch in nichtabelschen Theorien der wohldefinierte physikalische Unterraum $\mathcal{H}_{ph} \subset \mathcal{H}$ als

$$\mathcal{H}_{ph} = \{|\alpha\rangle \in \mathcal{H}; Q_{\text{BRS}}|\alpha\rangle = 0, Q_c|\alpha\rangle = 0\} \quad (8.24)$$

konstruierbar. Salopp gesagt drückt diese Bedingung die Eichinvarianz der physikalischen Zustände aus. Sie wird im nächsten Abschnitt dazu verwendet werden, den Hamiltonoperator der *Trial*-Theorie auf den physikalischen Sektor zu begrenzen und somit die Spurbildung im Variationsfunktional in diesem Teilraum zu definieren.

8.3 Kanonische Quantisierung der *Trial*-Theorie

Die *Trial*-Theorie in kovarianter Hilfsfeld-Eichung lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ab}^2 - (\partial_\mu B)A^\mu + \frac{\alpha}{2}B^2 + \frac{1}{2}A_\mu(MA)^\mu - i\xi(\partial_\mu \bar{c})\partial^\mu c \quad . \quad (8.25)$$

Hier ist wieder $F_{ab}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, und im Massenterm seien die beiden Variationsparameter $m_{t,\ell}$ wie gewohnt (4.3) eingebaut. Da der Massenterm abelsch eichinvariant ist, besitzt \mathcal{L} die BRS-Symmetrie der vollen Theorie (8.20) in abelsch vereinfachter Form (Strukturkonstante $f^{abc} = 0$, keine Farbindizes).

Aus (8.25) folgen die Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu F_{ab}^{\mu\nu} = \partial^\nu B - (MA)^\nu \quad , \quad (8.26)$$

$$\partial_\mu A^\mu = -\alpha B \quad , \quad (8.27)$$

$$\square c = 0 \quad , \quad \square \xi \bar{c} = 0 \quad , \quad (8.28)$$

welche nun zunächst durch geeignete Zerlegungen der Felder gelöst werden, um dann die eingeführten Koeffizienten als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu interpretieren und deren Vertauschungsregeln abzuleiten.

Die Geistfelder genügen einer masselosen Klein-Gordon-Gleichung, können also als

$$c(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}} \{c_k e^{-iK^{(0)}x} + h.c.\} \quad (8.29a)$$

$$\xi \bar{c}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}} \{\xi \bar{c}_k e^{-iK^{(0)}x} + h.c.\} \quad (8.29b)$$

mit $K^{(0)\cdot\mu} \equiv (k, \vec{k})$, $K^2 = 0$ zerlegt werden. Hier (und im folgenden) steht c_k für $c(\vec{k})$. Nimmt man die Divergenz der Bewegungsgleichung (8.26), sso ist zu sehen, daß auch das Hilfsfeld B ein masseloses freies Feld ist: $\square B = 0$. Daher sei

$$B(x) = \int d^3k \sqrt{\frac{k}{(2\pi)^3 2}} \{N_B b_k e^{-iK^{(0)}x} + h.c.\} \quad (8.30)$$

mit noch festzulegender Konstante N_B .

Die (abelschen) erhaltenen Ladungen (8.21,8.22) lassen sich somit in Erzeuger/Ver-nichter-Schreibweise angeben [vgl. Manka (3.8), NO (3.4.3-4)]:

$$Q_{\text{BRS}}^{(f^{abc}=0)} = \int d^3x (B\dot{c} - c\dot{B}) = \int d^3k k \{iN_B c_k^\dagger b_k + h.c.\} \quad , \quad (8.31)$$

$$Q_C^{(f^{abc}=0)} = i \int d^3x (c\xi\dot{c} + \xi\bar{c}\dot{c}) = \int d^3k \{(\xi\bar{c}_k)^\dagger c_k + h.c.\} \quad . \quad (8.32)$$

Zur Charakterisierung des physikalischen Sektors \mathcal{H}_{ph} argumentieren NO (§3.4.3) wie folgt: Da die FP-Geister im abelschen Fall von den restlichen Feldern entkoppeln, kann man den vollen Hilbertraum \mathcal{H} in einer zeitunabhängigen Weise als Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}_{\text{FP}}$ zerlegen. Dabei ist \mathcal{H}_{FP} der von $c^{(\dagger)}, \xi\bar{c}^{(\dagger)}$ aus dem FP-Vakuum $|0\rangle_{\text{FP}}$ generierte Geist-Fockraum. Wegen der Entkopplung reicht es aus, den Unterraum $\mathcal{H}' \otimes |0\rangle_{\text{FP}}$ zu betrachten. Setzt man also $|\text{phys}\rangle \equiv |\text{ph}\rangle \otimes |0\rangle_{\text{FP}}$, wobei $|\text{phys}\rangle \in \mathcal{H}$, $|\text{ph}\rangle \in \mathcal{H}'$ ist, reduziert sich die Bedingung an die physikalischen Zustände auf

$$Q_{\text{BRS}}^{(0)}|\text{phys}\rangle = i \int d^3k k N_B b_k |\text{ph}\rangle \otimes c_k^\dagger |0\rangle_{\text{FP}} \stackrel{!}{=} 0 \quad .$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit des Geist-Sektors ergibt sich schließlich $b_k |\text{ph}\rangle = 0$ und somit insgesamt

$$b_k |\text{phys}\rangle = 0 \quad , \quad c_k |\text{phys}\rangle = 0 \quad . \quad (8.33)$$

Der physikalische Hilbertraum hat also weder B -Feld- noch Geist-Anregungen. Welche Moden von A physikalisch sind, wird von den Vertauschungsrelationen mit B abhängen.

Zum Lösen der Bewegungsgleichung (8.26) hilft eine Diagonalisierung des Massenterms. Dies leistet eine Zerlegung des Feldes A_μ in Anteile proportional zu den drei Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_K e^{-iKx} g_{\mu\nu} \tilde{A}^\nu(K) \\ &= \sum e^{-iKx} (\mathbf{A}_{\mu\nu}(K) + \mathbf{B}_{\mu\nu}(K) + \mathbf{D}_{\mu\nu}(K)) \tilde{A}^\nu(K) \\ &\equiv A_\mu^{\text{T}}(x) + A_\mu^{\text{L}}(x) + A_\mu^{\text{D}}(x) \quad . \end{aligned} \quad (8.34)$$

Der „transversale“ (Spin 1) Anteil $A^{\text{T}} + A^{\text{L}}$ ist divergenzfrei: $\partial A(x) = \partial A^{\text{D}}(x)$. Aufgrund der Matrix-Eigenschaften ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$, $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{D} = 0$) folgt nun

$$(MA)_\mu(x) = m_t^2 A_\mu^{\text{T}}(x) + m_\ell^2 A_\mu^{\text{L}}(x) \quad .$$

Damit und mit (8.27) zerfällt die Bewegungsgleichung (8.26) in die drei Anteile¹

$$\square A_\nu^{\text{D}} = \partial_\nu (B + \partial A^{\text{D}}) = (1 - \alpha) \partial_\nu B \quad , \quad (8.35)$$

$$(\square + m_t^2) A_\nu^{\text{T}} = 0 \quad , \quad (\square + m_\ell^2) A_\nu^{\text{L}} = 0 \quad . \quad (8.36)$$

¹Für $\alpha = 1$ sind wir genau hier auf dem Niveau von Mankas Bewegungsgleichungen und verstehen somit auch, wie sein Massenterm gemeint war. Man kann sogar via $A^{\mu\nu} = -E_1^\mu E_1^\nu - E_2^\mu E_2^\nu$ (s. Anhang C) zwei verschiedene m_t einführen.

Um bei der Lösung von (8.35) nicht in allzu große technische Schwierigkeiten zu geraten (vgl. dazu die Formulierung mit Dipol-Geistfeldern in NO §2.3.4 und die Kommentare zu $\alpha \neq 1$ in IZ §3-2-2), werde ich im folgenden nur noch den Fall $\alpha = 1$ behandeln.

Die „transversalen“ Bewegungsgleichungen (8.36) werden gelöst von (neue Notation: $A^T \rightarrow A^{(1)} + A^{(2)}$, $A^L \rightarrow A^{(3)}$)

$$A_\mu^{(\lambda)}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(\lambda)}} \left\{ \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a_{k(\lambda)} e^{-iK_\mu^{(\lambda)} x^\mu} + h.c. \right\} , \quad (8.37)$$

mit $\omega(\lambda) = \sqrt{k^2 + m(\lambda)^2}$, $K^{(\lambda),\mu} = (\omega(\lambda), \vec{k})$ und den Polarisationsvektoren

$$\varepsilon^{(1,2),\mu}(\vec{k}) = (0, \vec{e}_{1,2}(\vec{k})) \quad , \quad \varepsilon^{(3),\mu}(\vec{k}) = N_3 (1, \omega_3 \vec{k} / k^2) \quad . \quad (8.38)$$

Eingeklammerte Indizes numerieren die Moden, sind also keine Lorentzindizes. Wie schon von Geist- und B -Feld gewohnt, steht a_k für $a(\vec{k})$.

Für den „skalaren“ Anteil A_μ^D sind die beiden Bewegungsgleichungen (8.35) und (8.27) simultan zu lösen. Mit Hilfe der Entwicklung für B und der Struktur (8.37) läßt sich der folgende „Ansatz“ machen:

$$\varepsilon^{(0),\mu} = -ik N_0 N_B \frac{n^\mu(\vec{k})}{n^\nu K_\nu^{(0)}} \quad ; \quad \omega_{(0)} = k \quad , \quad N_0 a_{k(0)} = b_k \quad . \quad (8.39)$$

Dabei ist $n_\mu(\vec{k})$ ein noch zu wählender Polarisationsvektor, der aber der Bedingung $n^\nu K_\nu^{(0)} \neq 0$ genügen sollte, um $\varepsilon^{(0)}$ polfrei zu halten. Der Ansatz erweist sich als erfolgreich:

$$\begin{aligned} \square A_\mu^D &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{\quad}} \left\{ \varepsilon_\mu^{(0)} a_{k(0)} (-K^{(0)2}) e^{-iKx} + h.c. \right\} = 0 \quad , \\ \partial^\mu A_\mu^D &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{\quad}} \left\{ -k N_0 N_B a_{k(0)} e^{-iKx} + h.c. \right\} = -B \quad . \end{aligned}$$

Insbesondere bleibt $n_\mu(\vec{k})$ frei wählbar! Mit der Parametrisierung $n^\mu(\vec{k}) = (n^0, \vec{n} \vec{k} / k)$, $n^0 \neq \vec{n}$ (in welche andere Richtung sollte \vec{n} zeigen?) sieht man, daß $n^\mu / (nK)$ nur von der Kombination $n := n^0 / \vec{n}$ abhängt (jetzt muß $n \neq 1$ sein), und man sichert sich die „Block-Orthogonalität“ der Polarisationsvektoren: der transversale Sektor (1,2) entkoppelt, d.h. $\varepsilon_\mu^{(1,2)} \varepsilon^{\mu,(0,3)} = 0$.

Unter Zusammenstellung der Ergebnisse (8.37), (8.38) und (8.39), lautet die Lösung der Bewegungsgleichungen (8.26) und (8.27)

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_{\lambda=0}^3 A_\mu^{(\lambda)}(x) \\ &= \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^2 2\omega(\lambda)}} \left\{ \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a_{k(\lambda)} e^{-iK^{(\lambda)} x} + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\varepsilon^{(0),\mu} = -\frac{iN_0N_B}{n-1}(n, \vec{k}/k) \quad (8.41a)$$

$$N_0 a_{k(0)} = b_k, \quad n \neq 1$$

$$\varepsilon^{(1,2),\mu} = (0, \vec{e}_{1,2}(\vec{k})) \quad ; \quad \vec{e}_{1,2} \cdot \vec{k} = 0 \quad \vec{e}_{1,2}^2 = 1 \quad (8.41b)$$

$$\varepsilon^{(3),\mu} = N_3 (1, \omega_\ell \vec{k}/k^2) \quad (8.41c)$$

mit $\omega_{(\lambda)} = \sqrt{k^2 + m_{(\lambda)}^2}$, $K^{(\lambda),\mu} = (\omega_{(\lambda)}, \vec{k})$ sowie den Massen $m_{(0)} = 0$, $m_{(1,2)} = m_t$, $m_{(3)} = m_\ell$. Es ist an dieser Stelle beruhigend, die oben angegebenen Polarisationsvektoren mit den in der Literatur aufgeführten zu vergleichen. Dies wird durch die von mir eingeführten Konstanten n und $N_{0,3,B}$ ermöglicht:

– Manka [24] wählt (bei vertauschtem $0 \leftrightarrow 3$ -Sektor)²

$$m_\ell \neq 0 \quad : \quad N_3 = \frac{ik}{m_\ell}, \quad n = \frac{\omega_{(3)}}{k}, \quad N_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_B = \sqrt{2} \quad .$$

$$m_\ell = 0 \quad : \quad N_3 = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \quad n = -1, \quad N_0 = 1, \quad N_B = \sqrt{2} \quad .$$

– Kugo und Ojima ([29], Gl. (D 14)) sowie Nakanishi und Ojima ([13], Gl. (A.5)–(A.18)) behandeln nur den masselosen Fall. Sie benutzen ($\varepsilon^{(0)} \rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon^L$, $\varepsilon^{(3)} \rightarrow \varepsilon_L = \varepsilon^S$)

$$m_\ell = 0 \quad : \quad N_3 = -ik, \quad n = -1, \quad N_0 N_B = \frac{1}{k} \quad .$$

Jetzt sind alle Vorbereitungen getroffen, um die Quantisierungsregeln (8.23) zu bearbeiten. Sie lauten explizit

$$[II_B(x), B(y)]_0 = -i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (8.42a)$$

$$[II^i(x), A_j(y)]_0 = -i \delta^i_j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (8.42b)$$

und alle anderen Kommutatoren verschwinden, also

$$[A_i, A_j] = [II_i, II_j] = 0 \quad , \quad (8.42c)$$

$$[B, B] = [II_B, II_B] = 0 \quad , \quad (8.42d)$$

$$[A_i, B] = [II_i, II_B] = [II_i, B] = [A_i, II_B] = 0 \quad . \quad (8.42e)$$

Die Impulse $II_\Phi^I = \partial_{\Phi_I} \mathcal{L}$ lauten bei „algebraischer Lesart“ der Massenmatrix, d.h. unter der Annahme, der Massenterm in der Lagrangedichte enthalte keine zeitabgeleiteten

²nach Berichtigung des Vorzeichens seiner Gleichung (3.11a)

Felder \dot{A}_μ und gebe somit keinen Beitrag zu den Impulsen,

$$\Pi_j = F_{j0} = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^2 2\omega^{(\lambda)}}} \left\{ i\chi_j^{(\lambda)} a_{k^{(\lambda)}} e^{-iK^{(\lambda)}x} + h.c. \right\} \quad (8.43a)$$

$$\text{mit } \chi_j^{(\lambda)} \equiv \omega^{(\lambda)} \varepsilon_j^{(\lambda)} - \varepsilon_0^{(\lambda)} K_j \quad ,$$

$$\Pi_B = -A^0 \quad , \quad (8.43b)$$

$$\Pi_c = i\xi\dot{\bar{c}} \quad , \quad \Pi_{\xi\bar{c}} = -i\dot{c} \quad . \quad (8.43c)$$

Mit den Annahmen

$$\left[a_{k^{(\lambda)}}, a_{k'^{(\lambda')}}^\dagger \right] = \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad , \quad (8.44a)$$

$$\tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} \neq 0 \Leftrightarrow m_\lambda = m_{\lambda'} \quad (\text{Blockorthogonalitat}) \quad , \quad (8.44b)$$

woraus sofort $\tilde{\eta}_{\lambda\lambda'}^* = \tilde{\eta}_{\lambda'\lambda}$ folgt, lassen sich die Quantisierungsregeln in Relationen für die Matrix $\tilde{\eta}$ umschreiben. Berackert man alle 36 Kommutatoren, so ergibt sich eine Lösung nur im Fall $m_\ell = 0$ (die Rechnung ist im Anhang D aufgeführt). Eine „schöne“ Wahl der noch nicht festgelegten Konstanten n und $N_{0,3,B}$ (im Hinblick auf einfache Vertauschungsrelationen) ist die von Manka und NO, so daß sich (s. (D.27))

$$m_\ell = 0 \quad : \quad n = -1 \quad , \quad N_B N_0 N_3^* = i \quad , \quad \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

ergibt. Weshalb Manka die Matrix $\tilde{\eta}$ auch für den Fall einer nichtverschwindenden longitudinalen Masse m_ℓ angibt, konnte nicht nachvollzogen werden.

8.4 Hamiltonian, Zustandssumme und Propagator

Leider ist die Quantisierung nur im Fall $m_\ell = 0$ und für $\alpha = 1$ gelungen. Wenigstens für diese Einschränkung auf nur einen verbleibenden Variationsparameter m_t soll das Variationsfunktional (8.5) hier aufgestellt und diskutiert werden. Dazu ist zunächst der *Trial*-Hamiltonian zu bilden. Mit den Impulsen (8.43) lautet seine Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{A}_j \Pi^j + \dot{B} \Pi_B + \dot{c} \Pi_c + \xi \dot{\bar{c}} \Pi_{\xi\bar{c}} - \mathcal{L} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4} F_{ab}^2 + \dot{A}_j F^{j0}}_{\mathcal{H}_{AA}} - \frac{1}{2} A(MA) + \underbrace{(\partial_j B) A^j}_{\mathcal{H}_{AB}} - \underbrace{\frac{1}{2} B^2}_{\mathcal{H}_{BB}} + \text{ghost} \quad . \end{aligned} \quad (8.46)$$

Benutzt man nun die Erzeuger/Vernichter-Darstellung der Felder A_μ und B , so ergeben sich für die drei Anteile des Hamiltonians $H = \int d^3x \mathcal{H}$ nach einer einfachen, aber platzverbrauchenden und deshalb hier nicht wiedergegebenen Rechnung die Ausdrücke

($i = AA, AB, BB$)

$$\begin{aligned}
 H_i &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3k R_i^{\lambda\lambda'} \left\{ \frac{V}{(2\pi)^3} \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} + (a_{\lambda'}^\dagger a_\lambda + \text{h.c.}) \right\} \\
 \text{mit} \quad R_{AA}^{30} &= -k, \quad R_{AA}^{11} = R_{AA}^{22} = \omega_t \\
 R_{AB}^{00} &= -\frac{|N_0 N_B|^2}{n-1} k, \quad R_{AB}^{03} = -k \\
 R_{BB}^{00} &= -\frac{1}{2} |N_0 N_B|^2 k \quad .
 \end{aligned} \tag{8.47}$$

Alle nicht angegebenen Elemente der drei Matrizen R verschwinden. Insgesamt folgt mit der Wahl $n = -1$

$$\begin{aligned}
 H &= H_{AA} + H_{AB} + H_{BB} + \text{ghost} \\
 &= \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \int d^3k \frac{1}{2} \omega_\lambda - \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3k \omega_\lambda \eta^{\lambda\lambda'} a_{\lambda'}^\dagger a_\lambda + \text{ghost} \\
 &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k (k + \omega_t) + \int d^3k \omega_t (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) \\
 &\quad - \int d^3k k (a_0^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_0) + \text{ghost} \quad .
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

Jetzt ist der im physikalischen Sektor des Hilbertraumes wirkende Anteil des Hamiltonoperators leicht zu identifizieren. Aus der Bedingung (8.33) folgt aufgrund der oben vorgenommenen Identifikation $b_k \propto a_{k(0)}$ sofort, daß skalare Gluon-Anregungen unphysikalisch sind: $a_{k,(0)} |\text{phys}\rangle = 0$. Ferner müssen auch die longitudinalen Anregungen ausgeschlossen werden, denn die Sektoren 0 und 3 kommutieren nicht (s. (8.44,8.45)):

$$\begin{aligned}
 [a_{k(0)}, a_{q(3)}^\dagger] &= -\delta(\vec{k} - \vec{q}) \rightsquigarrow a_{k(0)} a_{q(3)}^\dagger |0\rangle = -\delta(\vec{k} - \vec{q}) |0\rangle \neq 0 \\
 &\rightsquigarrow a_{q(3)}^\dagger |0\rangle \notin \{|\text{phys}\rangle\} \quad .
 \end{aligned}$$

Somit ist insgesamt

$$a_{k(0)} |\text{phys}\rangle = a_{k(3)} |\text{phys}\rangle = c_k |\text{phys}\rangle = 0 \quad , \tag{8.49}$$

so daß die gesamte letzte Zeile von (8.48) dem unphysikalischen Sektor zugeschrieben werden muß, während der physikalische Anteil von H

$$H_{\text{ph}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \omega_t + \int d^3k \omega_t (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) =: H_0 + \hat{H}_{\text{ph}} \tag{8.50}$$

lautet. H_0 bezeichnet den konstanten Anteil des *Trial*-Hamiltonians.

Mit (8.50) läßt sich die Zustandssumme der *Trial*-Theorie

$$\begin{aligned}
 Z &= \text{Sp}_{\text{ph}} (e^{-\beta H}) = \sum_{\text{ph}} \langle \text{ph} | e^{-\beta H} | \text{ph} \rangle \\
 &= e^{-\beta H_0} \sum \langle \text{ph} | e^{-\beta \hat{H}_{\text{ph}}} | \text{ph} \rangle
 \end{aligned} \tag{8.51}$$

berechnen. Da H_{ph} dem Hamiltonoperator von zwei klassischen harmonischen Oszillatoren entspricht, kann die Spur z.B. in Besetzungszahldarstellung

$$|\text{ph}\rangle = \left\{ |n_1, n_2; \vec{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \left(a_1^\dagger(\vec{q}) \right)^{n_1} \left(a_2^\dagger(\vec{q}) \right)^{n_2} |0\rangle \right\} \quad (8.52)$$

ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\beta H_0} \prod_{\vec{q}} \sum_{n_1, n_2} \langle n_1, n_2; \vec{q} | e^{-\beta \hat{H}_{\text{ph}}} | n_1, n_2; \vec{q} \rangle \\ &= e^{-\beta H_0} \prod \left(\sum_n e^{-\beta \omega_t n} \right)^2 = e^{-\beta H_0} \prod \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_t}} \right)^2 . \end{aligned} \quad (8.53)$$

Hier wurde in der letzten Zeile Gebrauch von der geometrischen Reihe gemacht.

Damit lautet die Freie Energie der *Trial*-Theorie

$$F = -T \ln(Z) = H_0 + 2VT \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta \omega_t}) = -2VT^4 I_t \quad , \quad (8.54)$$

womit bereits der erste Beitrag zum Variationsfunktional (8.5) ausgewertet ist. In (8.54) ist die Definition des Integrals I_t aus (A.11a) benutzt worden. Mit Hilfe der in diesem Abschnitt vorgenommenen Quantisierung der *Trial*-Theorie können nun die weiteren Terme von \mathcal{U} ausgewertet werden.

8.5 \mathcal{U} -Auswertung und Minimierung

Wie auch in der Pfadintegralformulierung des Variationsfunktionals ist das wichtigste thermische Mittel, das zu dessen Auswertung benötigt wird, jenes von zwei Feldern A_μ

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle_{\text{ph}} \Big|_{x^0=y^0} = \frac{1}{Z} \text{Sp}_{\text{ph}} \left(e^{-\beta H_{\text{ph}}} A_\mu(x) A_\nu(y) \right) \Big|_{x^0=y^0} . \quad (8.55)$$

Zur Auswertung der Spur stellt man die Felder in der Erzeuger/Vernichter Schreibweise (8.40) dar und benutzt die Vertauschungsrelationen, um eine Normalordnung zu erreichen. Da die Spur nur über physikalische Zustände genommen wird, gilt

$$\langle a_{\vec{k}(\lambda)}^\dagger a_{\vec{k}'(\lambda')} \rangle_{\text{ph}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\lambda\lambda'} \frac{1}{e^{\beta \omega_t} - 1} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \quad (8.56)$$

mit $\omega_t = \sqrt{k^2 + m_t^2}$. Die unphysikalischen Moden tragen also nicht zum thermischen Mittel bei. Mit $\langle aa \rangle = \langle a^\dagger a^\dagger \rangle = 0$ ergibt sich damit

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle_{\text{ph}} \Big|_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left[\sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \frac{\tilde{\eta}_{\lambda\lambda'}}{\omega_\lambda} \varepsilon_\nu^{(\lambda')*} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\omega_t} \frac{1}{e^{\beta\omega_t} - 1} \sum_{\lambda=1,2} \left\{ \left(\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda')*} \right)_{\vec{k}} + \left(\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda')*} \right)_{-\vec{k}}^* \right\} \Bigg] \\
 & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_t} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \mathbf{A}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\omega_t} - 1} \right] \quad . \quad (8.57)
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde die Kenntnis der Polarisationsvektoren $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$ und die Darstellung der Matrix \mathbf{A} (C.5) mit Hilfe der beiden zu \vec{k} orthogonalen Dreiervektoren $\vec{e}_{1,2}$ ausgenutzt. Außerdem ist der Normalordnungsterm des nichtphysikalischen Sektors weggelassen worden, da er keinen Variationsparameter enthält. Bei gleichem Argument $\vec{x} = \vec{y}$ ist im Integranden von (8.57) nur noch die Matrix \mathbf{A} von der Richtung von \vec{k} abhängig, so daß die Tensorstruktur genau wie in (5.19) aus dem Integral gezogen werden kann. Wegen

$$\mathbf{A}_{\mu\nu} = -u_{\mu\nu} + \frac{\overline{K}_\mu \overline{K}_\nu}{k^2} \rightarrow -u_{\mu\nu} + \frac{u_{\mu\nu}}{3} \quad , \quad \text{mit} \quad u_{\mu\nu} = U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} \quad , \quad \overline{K}^\mu = (0, \vec{k})$$

ist schließlich (vgl. Mankas Gl. (3.14))

$$\left\langle A_\mu(x) A_\nu(x) \right\rangle_{\text{ph}} = -\frac{2}{3} u_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_t} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\omega_t} - 1} \right] \quad (8.58)$$

$$\approx -\frac{2}{3} u_{\mu\nu} J_t \quad . \quad (8.59)$$

In der letzten Zeile wurde benutzt, daß das verbliebene Integral genau die Form der bisher immer verwendeten „Summe“ J hat, und zwar nach deren Frequenzsummation (s. (A.11b)). Das geschwungene Gleichheitszeichen erinnert an die Vernachlässigung des Terms ohne Bosefunktion und ist nur im unten behandelten Hoch- T -Limes gültig.

Das thermische Mittel des Hamiltonians der vollen Theorie ergibt sich per Felder-Identifizierung $A_{\text{YM}} = A$ und $B_{\text{YM}} = B$ zu

$$\begin{aligned}
 \left\langle H_{\text{GF}} \right\rangle_{\text{ph}} &= \int_x^3 \left\langle \dot{A}_{j,\text{YM}} F_{\text{YM}}^{j0} + \dot{B}_{\text{YM}} (-A_{\text{YM}}^0) + \frac{1}{4} F_{\text{YM}}^2 + (\partial_\mu B_{\text{YM}}) A_{\text{YM}}^\mu - \frac{\alpha_{\text{YM}}}{2} B_{\text{YM}}^2 + \text{gh.} \right\rangle_{\text{ph}} \\
 &= \left\langle \delta^{aa} H \right\rangle_{\text{ph}} + \frac{1}{4} g^2 \int d^3x \left\langle f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d} A^{\nu,e} \right\rangle_{\text{ph}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - \alpha_{\text{YM}}) \int d^3x \left\langle B^2 \right\rangle_{\text{ph}} + \int d^3x \left\langle \frac{1}{2} A(MA) \right\rangle_{\text{ph}} + \text{gh.} \\
 &= \left\langle nH \right\rangle_{\text{ph}} + \frac{1}{4} g^2 N n (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \int d^3x \left\langle A_\mu A_\nu \right\rangle_{\text{ph}} \left\langle A_\rho A_\sigma \right\rangle_{\text{ph}} \\
 &\quad + \int d^3x \left\langle \frac{1}{2} A(MA) \right\rangle_{\text{ph}} \\
 &= \left\langle nH \right\rangle_{\text{ph}} + \frac{2}{3} g^2 N n V J_t^2 - m_t^2 J_t \quad . \quad (8.60)
 \end{aligned}$$

Dabei ist H der Hamiltonian der *Trial*-Theorie. Bei den obigen Umformungen wurde ausgenutzt, daß thermische Mittel sowohl von einer ungeraden Anzahl von Feldern als auch von unphysikalischen Freiheitsgraden (Hilfsfeld B und Geistfelder) verschwinden. Ferner

erlaubte die Farb–Diagonalität des Mittels eine Summation über die Strukturkonstanten vor dem in A_μ quartischen Term: $f^{abc} f^{abc} = Nn$. In der letzten Zeile schließlich ist (8.58) zur Anwendung gekommen.

Die Abspaltung des thermischen Mittels des *Trial*–Hamiltonians in (8.60) erspart dessen Auswertung, da in \mathcal{U} nur die Differenz $H_{\text{GP}} - H$ beiträgt. Mit n –fach genommener *Trial*–Theorie lautet das Variationsfunktional (8.5) unter Verwendung der Ergebnisse (8.54) und (8.60) insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= nF + \langle H_{\text{GP}} - nH \rangle_{\text{ph}} \\ &= nVT^4 \left(-2I_t - \varepsilon_t^2 J_t + \frac{2}{3} g^2 N J_t^2 \right) . \end{aligned} \quad (8.61)$$

Dabei ist wieder $\varepsilon_t = \beta m_t$ als dimensionsloser Massenparameter eingeführt worden. Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen (B.9, B.11) der Integrale I_t und J_t lauten die für $\varepsilon_t \ll 1$ führenden Terme des Variationsfunktionals

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[\varepsilon_t] &\approx nVT^4 \left(-2 \left[\frac{\pi^2}{90} - \frac{\varepsilon_t^2}{24} + \frac{\varepsilon_t^3}{12\pi} \right] - \varepsilon_t^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{\varepsilon_t}{4\pi} \right] + \frac{2}{3} g^2 N \left[\frac{1}{144} - \frac{\varepsilon_t}{24\pi} \right] \right) \\ &= nVT^4 \left(\frac{\varepsilon_t^3}{12\pi} - g^2 N \frac{\varepsilon_t}{36\pi} + \dots \right) + \text{const}_{\varepsilon_t} . \end{aligned} \quad (8.62)$$

Eine Minimierung bezüglich des einzigen Variationsparameters ε_t ergibt demzufolge

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \partial_{\varepsilon_t} \mathcal{U} = nVT^4 \left(\frac{\varepsilon_t^2}{4\pi} - g^2 N \frac{1}{36\pi} \right) \\ &\rightsquigarrow \varepsilon_t^2 = \frac{g^2 N}{9} \quad \rightsquigarrow m_t^2 = \frac{g^2 N T^2}{9} . \end{aligned} \quad (8.63)$$

In schöner Analogie zum Resultat des Funktionalintegral–Weges in Coulomb–Eichung (6.41) nimmt hier die transversale Masse den beim Aufstellen der *Trial*–Theorie antizipierten Wert $m_t = g\sqrt{N}T/3$ an.

An dieser Stelle sei eine historische Bemerkung gestattet. Ursprünglich hatte Manikas Arbeit dazu geführt, das Variationsverfahren auf dem in diesem Kapitel dargestellten „BRS–Weg“ zu formulieren. Da jedoch der Einbau einer longitudinalen *Trial*–Masse an den Quantisierbarkeitsbedingungen gescheitert ist (s. Abschnitt 8.3), hat das schon sehr vielversprechende Resultat (8.63) zum Umstieg auf die Feynman’sche Funktionalintegralformulierung geführt. Auf diese Weise ist es zwar gelungen, den Engpaß der Quantisierung zu umgehen, gleichzeitig ist aber das Problem der Eichabhängigkeit aller Resultate aufgetaucht und konnte seinerseits nicht gelöst werden.

Es ergibt sich allerdings eine verblüffende Beziehung zwischen dem hier erhaltenen Ergebnis (8.61) für $\mathcal{U}[m_t]$ und der vorher hergeleiteten Form des Variationsfunktionals in Coulomb–Eichung (6.33), welches beide Variationsparameter enthält. Einerseits sind beide Ergebnisse unabhängig vom Eichparameter der vollen Theorie, wenn auch aufgrund völlig verschiedener Mechanismen. Während hier die Beschränkung auf physikalische Zustände

den Parameter α_{YM} herausfallen ließ, hatten im Coulomb–Fall alle eichparameterabhängigen Größen keine führende T –Abhängigkeit und konnten so im Sinne des Hoch– T –Limes vernachlässigt werden. Andererseits, und das ist um so erstaunlicher, zeigen beide Resultate dieselbe Abhängigkeit von der transversalen Masse (beachte $\varepsilon^2 J = L$ im Fall konstanter Massen, s. (B.8)):

$$\mathcal{U}_{\text{Fock}}[m_t] = \mathcal{U}_{\text{Coul}}[m_t, m_\ell = 0] = nVT^4 \left\{ -(2I_t + L_t) + \frac{2}{3} g^2 N J_t^2 \right\} . \quad (8.64)$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt genau bis auf eine Konstante.

Bevor man trotz dieser Übereinstimmung aber die m_ℓ –Abhängigkeit von $\mathcal{U}_{\text{Coul}}$ ernstnehmen darf, ist die aufgezeigte Instabilität des Variationsverfahrens gegenüber Variationen der Eichung (vgl. die Diskussion in „Mischeichung“, Abschnitt 6.1.2) zu beheben. Dies kann Ziel einer weiteren Bearbeitung der Thematik sein³. Eventuell sollte bei einer Neuformulierung des Variationsverfahrens als erste Anwendung an die Skalare Elektrodynamik [31] als *toy model* des Gluon–Plasmas gedacht werden, um die Eichunabhängigkeit des Variationsfunktionals zunächst mit Hilfe einer abelschen (vollen) Theorie zu testen.

³Auch ein Jahr Diplomarbeit geht einmal zuende ...

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das Gluon-Plasma, der Eichbosonensektor des Hoch- T -Limes der QCD, untersucht. Dabei ist einerseits eine Herleitung der bekannten thermischen Ward-Identitäten für Gluon- n -Punkt Funktionen ($n = 2 \dots 4$) gegeben worden, während andererseits ein Variationsverfahren bereitgestellt und einer ersten Anwendung zugeführt wurde.

Ausgehend von der Eichinvarianz der effektiven Wirkung des Quark-Gluon-Plasmas konnten im ersten Teil der Arbeit die von Braaten und Pisarski aufgeschriebenen Relationen für die HTL-Zusätze zu den nackten Greensfunktionen als „echte“ Ward-Identitäten identifiziert werden. Die Rechnung bestand aus einer konkreten Auswertung der aus der BRS-Invarianz des erzeugenden Funktional hergeleiteten „allgemeinen Ward-Identität“ in der jeweils tiefsten Ordnung unter Berücksichtigung der BP-resummierten Diagramme. Da es nur wenig weitere Mühe bereitete, konnte auch die Herleitung der exakten 2-Punkt-Identität mit angegeben werden. Möglichkeiten der Gewinnung weiterer Identitäten auf dem beschrifteten Weg – wie beispielsweise die Behandlung mehrbeiniger Greensfunktionen, aber auch höherer Ordnungen – sind aufgezeigt, aber mangels konkreter Anwendungsmöglichkeiten nicht durchgeführt worden.

Die Variationsmethode steckt noch in den „Kinderschuhen“. Als eine erste Anwendung ist im zweiten Teil der Arbeit versucht worden, das Entwickeln der thermischen Gluonmasse außerhalb eines störungstheoretischen Rahmens zu bestätigen. Ausgehend von der einzigen einschlägigen Arbeit (Manka 1986) und unter Beseitigung einiger ihrer Mängel habe ich meine bisher in dieser Richtung geleistete Arbeit dargestellt. Die Rechnung leidet unter einer bislang nicht zu behebbenden Krankheit: alle Resultate sind eichabhängig. Die bei der Herleitung des Funktional verwendete Abschätzung der Freien Energie scheint zu grob gewesen zu sein, um der Theorie zu gestatten, ihre Eichunabhängigkeit zu behalten. Es konnten allerdings neben der Formulierung des Variationsproblems für eine (Eich-) Feldtheorie wichtige technische Schritte, wie die eichinvariante Einbringung von Massentermen in die *Trial*-Theorie und die asymptotische Entwicklung vieler K -Summen, geleistet werden. Mehrere Eichungen wurden in diesem Zusammenhang untersucht.

Erste Hürden sind zwar genommen, doch die Hoffnungen, die störungstheoretische Grenze zu überschreiten, haben sich vorerst nicht erfüllt. Vermutlich wird der feldtheoretische Funktionenraum nur unzureichend von der *Trial*-Theorie erfaßt. Weitere Bemühungen könnten sich deshalb auf eine von vornherein störungstheoretische Formulierung des Variationsfunktional konzentrieren, um Ordnung für Ordnung dessen Eichunabhängigkeit zu bewahren.

Anhang A

Frequenzsummen

Hier werden die im Teil II der Arbeit definierten Größen I, J, L und Y (5.27) der Frequenzsummation unterzogen. Dazu werde ich im ersten Abschnitt kurz die Standardmethode zur Auswertung von Frequenzsummen [7, 6] skizzieren, um dann eine Integraldarstellung der betreffenden Größen zu erhalten.

A.1 Methode

Eine Summe über Matsubara-Frequenzen $K_0 = i\omega_n$ mit $\omega_n = 2\pi nT$ lässt sich geschickt als Konturintegral in der komplexen Ω -Ebene schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{K_0} F(K_0) = T \sum_n F(i\omega_n) &\rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \oint d\Omega \{n(\Omega)F(\Omega) + n(-\Omega)F(-\Omega)\} \\ \text{für gerade } F : &= -\frac{1}{2\pi i} \oint d\Omega 2\tilde{n}(\Omega)F(\Omega) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Hierbei umschließt der Integrationsweg die rechte Halbebene¹ gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Mit der inversen Temperatur $\beta = 1/T$ ist $n(\Omega) = 1/(e^{\beta\Omega} - 1)$ die Bosefunktion und

$$\tilde{n}(\Omega) := \frac{1}{2} (n(x) - n(-x)) = \frac{1}{2} + n(x) \quad (\text{A.2})$$

deren ungerader Anteil. Mit Hilfe der Cauchyschen Integrationsformel²

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\Omega \frac{f(\Omega)}{(\Omega - z)^{n+1}} \quad (\text{A.3})$$

ist auch klar, wie bei der Frequenzsummation mit Mehrfachpolen umzugehen ist.

¹Das gilt nur, wenn der Integrand für grosse Ω verschwindet, also F schwächer als $\exp(-\beta\Omega)$ abfällt. Ansonsten verläuft der Integrationsweg nur neben der imaginären Achse herunter.

²s. z.B. Bronstein; gültig für analytisches f , das innerhalb des Integrationsweges keine Pole hat.

Es folgen einige ausgewertete Frequenzsummen, welche im nächsten Abschnitt benötigt werden:

$$\sum_{K_0} \frac{1}{K^2} = -\frac{1}{k} \tilde{n}(k) \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{K_0} \frac{1}{K^4} = \frac{1}{2k^3} [1 - \beta \partial_\beta] \tilde{n}(k) = -\frac{1}{2k} \partial_k \frac{\tilde{n}(k)}{k} \quad (\text{A.5})$$

$$\sum_{K_0} \frac{1}{K^2 K_x^2} = \frac{1}{x^2 - k^2} \left(\frac{\tilde{n}(k)}{k} - \frac{\tilde{n}(x)}{x} \right), \quad K_x := (K_0, \bar{x}) \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{K_0} \frac{1}{K^6} = -\frac{1}{8k^5} [\beta^2 \partial_\beta^2 - 3\beta \partial_\beta + 3] \tilde{n}(k) = -\frac{1}{8k^2} \partial_k^2 \frac{\tilde{n}(k)}{k} \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{K_0} \frac{1}{K^4 K_x^2} = -\frac{1}{2(x^2 - k^2)} \left(\frac{2\tilde{n}(x)}{x(x^2 - k^2)} + \left[\frac{1}{k^2} - \frac{2}{x^2 - k^2} - \frac{\beta \partial_\beta}{k^2} \right] \frac{\tilde{n}(k)}{k} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{K_0} \frac{1}{K^2 K_x^2 K_y^2} = \frac{\tilde{n}(k)}{k(x^2 - k^2)(k^2 - y^2)} + \frac{\tilde{n}(x)}{x(k^2 - x^2)(x^2 - y^2)} + \frac{\tilde{n}(y)}{y(k^2 - y^2)(y^2 - x^2)} \quad (\text{A.9})$$

Wie zu erwarten ist, gehen die Ergebnisse (A.6,A.8,A.9) in den Limes $x, y \rightarrow k$ in die entsprechenden Summen (A.5,A.7) über.

Frequenzsummen über Pole in K_0 geben den Termen also über die Bosefunktion eine Temperaturabhängigkeit. Wenn (wie im in dieser Arbeit behandelten Hoch- T -Limes) nur Terme mit führender T -Potenz wichtig sind, kann die Ersetzung $\tilde{n}(k) \rightarrow n(k)$ in der Bosefunktion vorgenommen werden, wie es auch in der Störungstheorie gemacht wird. Um diesen Schritt jeweils zu markieren, wird im folgenden anstelle eines Gleichheitszeichens die Notation „ \approx “ verwendet werden.

A.2 Konstante Massen

Die Summe I (5.27a) hat, verglichen mit den anderen, durch den Logarithmus eine besondere Struktur. Da sie jedoch für ein ideales Gas aus massiven Bosonen typisch ist, findet man die Auswertung der Frequenzsumme von I in der Literatur wieder, wie z.B. in [6, 8]. Benutzt man zu ihrer Auswertung die Beziehung [6]

$$\sum_n \ln \left((2\pi n)^2 + x^2 \right) = x + 2 \ln \left(1 - e^{-x} \right) + \text{const}_x, \quad (\text{A.10})$$

so folgt bis auf eine Konstante, welche unabhängig von $\omega_{t,\ell} = \sqrt{k^2 + m_{t,\ell}^2}$ ist, also keinen Variationsparameter enthält,

$$\begin{aligned} I_{t,\ell} &= -\frac{1}{2} \beta^4 \int_k^3 \sum_{K_0} \ln \left(\beta^2 (\omega_n^2 + \omega_{t,\ell}^2) \right) = -\beta^3 \int_k^3 \left\{ \frac{1}{2} \beta \omega_{t,\ell} + \ln \left(1 - e^{-\beta \omega_{t,\ell}} \right) \right\} \\ &\approx -\beta^3 \int_k^3 \ln \left(1 - e^{-\beta \omega_{t,\ell}} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.11a})$$

Der Beitrag vom ersten Term in (A.10) wird in der letzten Zeile als $T = 0$ -Term unterdrückt [6, 32]. Er würde (da I ausschließlich als Beitrag zur freien Energie benötigt wird) lediglich eine Verschiebung der Energieskala bewirken.

Die Frequenzsummen der Größen (5.27b)–(5.27d) sind direkt ausführbar und überführen sie in die folgenden Integrale:

$$J_{t,\ell} \approx \beta^2 \int_k^3 \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \quad (\text{A.11b})$$

$$L_{t,\ell} \approx \beta^4 m_{t,\ell}^2 \int_k^3 \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \quad (\text{A.11c})$$

$$Y_{t,\ell} \approx \frac{\beta^2}{m_{t,\ell}^2} \int_k^3 k^2 \left(\frac{n(k)}{k} - \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \right) . \quad (\text{A.11d})$$

Der erste Beitrag zu Y kann direkt aufintegriert werden:

$$\beta^4 \int_k^3 kn(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{30} . \quad (\text{A.12})$$

Die hier gewonnenen Integraldarstellungen werden im Kapitel 5.2 einer numerischen Auswertung zugeführt. Ferner finden die Frequenzsummen (A.4)–(A.9) im Anhang B weitere Verwendung.

Anhang B

Hoch- T -Näherungen

In diesem Anhang werden die in Hoch- T -Limes asymptotisch führenden Terme der im Haupttext auftretenden Summen herausgearbeitet. Diese sind definiert als (die nackten Summationszeichen symbolisieren hier volle K -Summen)

$$I_{t,\ell} = \frac{1}{2}\beta^4 \sum \ln(-T^2 \Delta_{t,\ell}) \quad , \quad (\text{B.1a})$$

$$J_{t,\ell} = -\beta^2 \sum \Delta_{t,\ell} \quad , \quad (\text{B.1b})$$

$$L_{t,\ell} = -\beta^4 \sum K^2 (\Delta_{t,\ell} - \Delta_0) \quad , \quad (\text{B.1c})$$

$$Y_{t,\ell} = \beta^2 \sum \frac{k^2}{K^2} \Delta_{t,\ell} \quad , \quad (\text{B.1d})$$

$$X_{t,\ell} = -\beta^2 \sum \frac{K^2}{k^2} (\Delta_{t,\ell} - \Delta_0) \quad (\text{B.1e})$$

und enthalten die *Trial*-Propagatoranteile

$$\Delta_{t,\ell} = \frac{1}{K^2 - M_{t,\ell}(K)} \quad , \quad \Delta_0 = \frac{1}{K^2} \quad . \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist der $M_{t,\ell}$ von der jeweils benutzten Version des Massenterms der *Trial*-Theorie abhängig und muß vor Ausführung der Summation spezifiziert werden.

In den zwei folgenden Abschnitten wird einerseits mit $M_{t,\ell} = m_{t,\ell}$ der Fall konstanter *Trial*-Massen behandelt (vgl. Kapitel 4–6), während andererseits mit $M_{t,\ell} = \lambda_{t,\ell}^2 \Pi_{t,\ell}(K)$ der technisch schwierigere „ λ -Fall“ für Kapitel 7 bearbeitet wird.

Volle K -Summen führen zumeist auf elementare Integrale wie

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Beispielsweise ist

$$-\beta^2 \sum_K \frac{1}{K^2} = \beta^2 \int_k^3 \frac{\tilde{n}(k)}{k} \approx \beta^2 \int_k^3 \frac{n(k)}{k} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{12} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Dabei wurde neben der Frequenzsumme (A.4) die dort eingeführte Notation „ \approx “ verwendet. Damit wird hier ein Term proportional zu $\int_k^3 1/k$, einem typischen UV-divergenten und temperaturunabhängigen Integral, unterdrückt. Allgemein werden solche Beiträge von einer Renormierung bei $T = 0$ beseitigt bzw. machen höchstens einen Beitrag der relativen Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ aus [2, 7]. Analog zu (B.4) ergeben sich unter Benutzung von (A.5) und (A.7) die temperaturabhängigen Anteile der folgenden Summen:

$$\beta^2 \sum_K \frac{k^2}{K^4} \approx \frac{\beta^2}{2} (1 - \beta \partial_\beta) \frac{1}{12\beta^2} = \frac{1}{8} \quad (\text{B.5})$$

$$-\beta^2 \sum_K \frac{k^4}{K^6} \approx \frac{\beta^2}{8} (3 - 3\beta \partial_\beta + \beta^2 \partial_\beta^2) \frac{1}{12\beta^2} = \frac{5}{32} \quad (\text{B.6})$$

B.1 Konstante Massen

In diesem Fall lauten die Propagatoren (B.2)

$$\Delta_{t,\ell}(K) = \frac{1}{K^2 - m_{t,\ell}^2} \quad (\text{B.7})$$

d.h., mit $M_{t,\ell}(K) \rightarrow m_{t,\ell}^2 = \text{const.}$ wird der technisch einfachste Fall behandelt. Es ergeben sich sofort Relationen zwischen einigen der Summen (B.1):

$$-\partial_{\varepsilon_{t,\ell}} I_{t,\ell} = \varepsilon_{t,\ell} J_{t,\ell} \quad , \quad \varepsilon_{t,\ell}^2 J_{t,\ell} = L_{t,\ell} \quad (\text{B.8})$$

Hier bezeichnet $\varepsilon_{t,\ell} \equiv \beta m_{t,\ell}$ wieder die dimensionslosen *Trial*-Massen.

Dolan und Jackiw geben für I in [32] eine asymptotische Reihe bis einschließlich Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ an:

$$I_{t,\ell} \simeq \frac{\pi^2}{90} - \frac{1}{24} \varepsilon_{t,\ell}^2 + \frac{1}{12\pi} \varepsilon_{t,\ell}^3 + \frac{1}{64\pi^2} \varepsilon_{t,\ell}^2 \ln(\varepsilon_{t,\ell}^2) - \frac{c}{64\pi^2} \varepsilon_{t,\ell}^4 + \mathcal{O}(\varepsilon_{t,\ell}^6) \quad (\text{B.9})$$

Dabei enthält die Konstante $c = \frac{3}{2} + 2 \ln(4\pi) - 2\gamma \approx 5.41$ die Eulersche Zahl $\gamma \approx 0.577$.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses könnte man sich nun wegen (B.8) die beiden Summen J und L verschaffen. Diese sollen hier jedoch auf der gleichen Ebene wie Y und X behandelt werden, um die erste Relation in (B.8) als einen Test auf Richtigkeit der verwendeten Näherungen aufzubewahren.

Die sich von nun an wiederholende Strategie bei der Auswertung der Summen (B.1) lautet wie folgt:

- Da das verbliebene Impulsintegral im allgemeinen nicht exakt lösbar sein wird, liegt es nahe, die Terme einer asymptotischen Entwicklung nach kleinen Massen ($m_{t,\ell} \ll T$ bzw. $\varepsilon_{t,\ell} \ll 1$) zu bestimmen. Dazu wendet man sich am besten wieder der Form der jeweiligen Summe *vor* Ausführung der Frequenzsummation zu. Zunächst wird der führende Term durch Nullsetzen aller Massen $m_{t,\ell}$ extrahiert und das verbleibende Integral ausgewertet.

- Um die erste Korrektur zu erhalten, findet die in der Störungstheorie verwendete *soft*-Näherung der Bosefunktionen des Integranden Verwendung. Dabei kann man ausnutzen, daß der Hauptbeitrag bei der Integration einer mit der Bosefunktion $n(x)$ gewichteten Funktion aus dem Bereich kleiner Argumente x kommt, so daß näherungsweise $n(x) \rightarrow 1/\beta x$ gesetzt werden kann. Die Stellen, an denen diese *soft*-Näherung benutzt wird, werde ich mit „ \simeq “ markieren.

Einen führenden konstanten Anteil haben nur J und Y . Die Auswertung findet sich oben in den Gleichungen (B.4) und (B.5). Mit der obigen Strategie sowie unter Benutzung des Integrals

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} = \arctan(x) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\text{B.10})$$

ergeben sich als (für kleine ε) führende Terme:

$$\begin{aligned} J_{t,\ell} &= -\beta^2 \sum \Delta_0 - \beta^2 \sum (\Delta_{t,\ell} - \Delta_0) \approx \frac{1}{12} + \beta^2 \int_k^3 \left(\frac{\tilde{n}(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} - \frac{\tilde{n}(k)}{k} \right) \\ &\simeq \frac{1}{12} + \beta \int_k^3 \left(\frac{1}{\omega_{t,\ell}^2} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{12} - \beta m_{t,\ell}^2 \int_k^3 \frac{1}{\omega_{t,\ell}^2 k^2} \\ &= \frac{1}{12} - \beta m_{t,\ell} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{12} - \frac{\varepsilon_{t,\ell}}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$L_{t,\ell} = \varepsilon_{t,\ell}^2 J_{t,\ell} \simeq \frac{1}{12} \varepsilon_{t,\ell}^2 - \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{t,\ell}^3 \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} Y_{t,\ell} &= \beta^2 \sum \frac{k^2}{K^4} - \beta^2 \sum (\Delta_{t,\ell} - \Delta_0) \\ &\approx \frac{1}{8} + \beta^2 \int_k^3 \left\{ \frac{k^2}{m_{t,\ell}^2} \left(\frac{\tilde{n}(k)}{k} - \frac{\tilde{n}(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \right) - \frac{1}{2} (1 - \beta \partial_\beta) \frac{\tilde{n}(k)}{k} \right\} \\ &\simeq \frac{1}{8} + \beta \int_k^3 \left(\frac{1}{\omega_{t,\ell}^2} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{8} - \frac{\varepsilon_{t,\ell}}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} X_{t,\ell} &\approx \beta^2 m_{t,\ell}^2 \int_k^3 \frac{1}{k^2} \frac{n(\omega_{t,\ell})}{\omega_{t,\ell}} \\ &\simeq \beta m_{t,\ell}^2 \int_k^3 \frac{1}{\omega_{t,\ell}^2 k^2} = \frac{\varepsilon_{t,\ell}}{4\pi} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Die beiden führenden Terme der so gewonnenen J -Entwicklung (B.11) lassen sich nun anhand der Relation (B.8) mit der von Dolan und Jackiw angegebenen Entwicklung (B.9) für I vergleichen:

$$-\partial_\varepsilon I = \frac{1}{12} \varepsilon - \frac{1}{4\pi} \varepsilon^2 + \dots = \varepsilon \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi} \varepsilon \right) = \varepsilon J \quad .$$

Die *soft*-Näherung war also konsistent.

B.2 „ λ -Fall“

Im „ λ -Fall“ lauten die Anteile des *Trial*-Propagators

$$\Delta_{t,\ell}(K) = \frac{1}{K^2 - \lambda_{t,\ell}^2 \Pi_{t,\ell}(K)} \quad , \quad (\text{B.15})$$

wobei die Funktionen $\Pi_{t,\ell}(K)$ genau die Gluon-Selbstenergiebeiträge in führender Ordnung (1.29) sind. Zunächst gilt die folgende Relation zwischen den Summen (B.1):

$$-\lambda_{t,\ell} \partial_{\lambda_{t,\ell}} I_{t,\ell} = L_{t,\ell} \quad . \quad (\text{B.16})$$

Um die Summen (B.1) auszuwerten, gehe ich zur Spektraldarstellung (7.10,7.12) des *Trial*-Propagators über:

$$\Delta_{t,\ell}(K) =: \int dx x \frac{\rho_{t,\ell}^{(\lambda)}(x, k)}{K_0^2 - x^2} = \int dx x \frac{1}{\lambda^2} \frac{\rho_{t,\ell}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda}\right)}{K_0^2 - x^2} \quad . \quad (\text{B.17})$$

Damit hat sich die K_0 -Polstruktur des Propagators wesentlich vereinfacht, so daß die Formeln (A.4)–(A.9) zur Frequenzsummation auch hier anwendbar sind. Wendet man nun die im vorigen Abschnitt beschriebene Strategie an, um jeweils die ersten beiden Terme der Summen zu erhalten, und benutzt man für die x -Integration die Summenregeln der spektralen Dichten (7.13), so entwickelt sich die Berechnung der Hoch- T -Näherungen entlang der folgenden Zeilen:

$$J_{t,\ell} = -\beta^2 \sum \Delta_{t,\ell} \equiv J^{\text{lead}} + J_{t,\ell}^{\text{soft}} \quad (\text{B.18})$$

$$J^{\text{lead}} = -\beta^2 \sum \Delta_0 \approx \frac{1}{12} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} J_{\ell}^{\text{soft}} &= -\beta^2 \sum (\Delta_{\ell} - \Delta_0) = -\beta^2 \sum \left[\int_x \frac{x}{\lambda^2} \frac{\rho_{\ell}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda}\right)}{K_0^2 - x^2} - \frac{1}{K^2} \right] \\ &= \beta^2 \int_k^3 \left[\int_x \frac{\rho_{\ell}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda}\right)}{\lambda^2} \tilde{n}(x) - \frac{\tilde{n}(k)}{k} \right] \\ &\simeq \beta^2 \int_k^3 \left[\int_x \frac{1}{\lambda^2} \frac{\rho_{\ell}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda}\right)}{\beta x} - \frac{1}{\beta k^2} \right] = \beta \int_k^3 \left[\frac{1}{3\lambda^2 m^2 + k^2} - \frac{1}{k^2} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{3} \beta \lambda m}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\zeta}{4\pi} \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

$$J_t^{\text{soft}} \simeq \beta^2 \int_k^3 \left[\int_x \frac{1}{\lambda^2} \frac{\rho_t\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda}\right)}{\beta x} - \frac{1}{\beta k^2} \right] = \beta \int_k^3 \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right] = 0 \quad (\text{B.21})$$

In der Notation von [1] ergibt sich (mit $m \rightarrow \lambda m$) unter Verwendung der dortigen Gleichungen (5.9,D.3) für die *soft*-Anteile ebenfalls

$$\begin{aligned} J_{\ell}^{\text{soft}} &= -\beta^2 \sum \Delta_{\ell 0} \simeq -3\beta^2 \mathcal{K} = -\frac{\zeta}{4\pi} \quad , \\ J_t^{\text{soft}} &= -\beta^2 \sum \Delta_{t 0} \simeq 0 \quad . \end{aligned}$$

Weiter ist

$$L_\ell = -\beta^4 \sum K^2 (\Delta_\ell - \Delta_0) \equiv L_\ell^{\text{lead}} + L_\ell^{\text{soft}} \quad (\text{B.22})$$

$$L_\ell^{\text{lead}} = -3\lambda^2 m^2 \beta^4 \sum \Delta_0 = -\zeta^2 \beta^2 \sum \Delta_0 \approx \frac{\zeta^2}{12} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} L_\ell^{\text{soft}} &= -\beta^4 \sum \left[K^2 \Delta_\ell - 1 - 3\lambda^2 m^2 \Delta_0 \right] \\ &= -\beta^4 \sum \left[\int_x \left(1 + \frac{x^2 - k^2}{K_0^2 - x^2} \right) x \frac{\rho_\ell \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{\lambda^2} - 1 - 3\lambda^2 m^2 \Delta_0 \right] \\ &= -\beta^4 \sum \left[\int_x \frac{x^2 - k^2}{K_0^2 - x^2} x \frac{\rho_\ell \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{\lambda^2} - 3\lambda^2 m^2 \Delta_0 \right] \\ &= \beta^4 \int_k^3 \left[\int_x (x^2 - k^2) \frac{\rho_\ell \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{\lambda^2} \tilde{n}(x) - 3\lambda^2 m^2 \frac{\tilde{n}(k)}{k} \right] \\ &\simeq \beta^3 \int_k^3 \left[\int_x \frac{x^2 - k^2}{x} \frac{\rho_\ell \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{\lambda^2} - \frac{3\lambda^2 m^2}{k^2} \right] \\ &= \beta^3 \int_k^3 \left[\frac{3\lambda^2 m^2}{3\lambda^2 m^2 + k^2} - \frac{3\lambda^2 m^2}{k^2} \right] \\ &= -\frac{\zeta^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\zeta^3}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} L_t &= -\beta^4 \sum K^2 (\Delta_t - \Delta_0) = -\beta^4 \sum \int_x \frac{x^2 - k^2}{K_0^2 - x^2} x \frac{\rho_t \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{\lambda^2} \\ &\simeq \beta^3 \int_k^3 \int_x \frac{x^2 - k^2}{x} \frac{\rho_t \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{\lambda^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Oder, in [1]-Notation mit den dortigen (table 1), (D.9) und (5.9):

$$\begin{aligned} L_\ell^{\text{soft}} &= -\beta^4 \sum (\Omega_\ell - \zeta^2 T^2 \Delta_0) \simeq -3\zeta^2 \beta^2 \mathcal{K} = -\frac{\zeta^3}{4\pi} \\ L_t &= -\beta^4 \sum \Omega_t \simeq 0 \end{aligned}$$

Von Y wird nur der longitudinale Anteil benötigt:

$$Y_\ell = \beta^2 \sum \frac{k^2}{K^2} \Delta_\ell \equiv Y_\ell^{\text{lead}} + Y_\ell^{\text{soft}} \quad (\text{B.26})$$

$$Y_\ell^{\text{lead}} = \beta^2 \sum \frac{k^2}{K^4} \approx \frac{1}{8} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} Y_\ell^{\text{soft}} &= \beta^2 \int_k^3 \left[k^2 \int_x \frac{x}{\lambda^2} \frac{\rho_\ell \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{x^2 - k^2} \left(\frac{\tilde{n}(k)}{k} - \frac{\tilde{n}(x)}{x} \right) - (1 - \beta \partial_\beta) \frac{\tilde{n}(k)}{2k} \right] \\ &\simeq \beta^2 \int_k^3 \left[\frac{1}{\beta \lambda^2} \int_x \frac{\rho_\ell \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda} \right)}{x} - \frac{1}{\beta k^2} \right] = \beta \int_k^3 \left[\frac{1}{3\lambda^2 m^2 + k^2} - \frac{1}{k^2} \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\lambda\beta m}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\zeta}{4\pi} \quad (\text{B.28})$$

Zur Auswertung der führenden Terme der Summe I ist die Relation (B.16) nützlich. Mit dem konstanten Anteil

$$I^{\text{lead}} = \frac{1}{2}\beta^4 \sum \ln(-T^2\Delta_0) \approx \frac{\pi^2}{90} \quad ,$$

welcher sich mit Blick auf (B.9) ergibt, folgt

$$I_\ell \simeq I^{\text{lead}} - \frac{\zeta^2}{24} + \frac{\zeta^3}{12\pi} \quad , \quad (\text{B.29})$$

$$I_t \simeq I^{\text{lead}} + 0 \quad . \quad (\text{B.30})$$

Abschließend seien die in diesem Abschnitt erhaltenen Reihenanfänge der Übersicht halber hier gesammelt:

$$I_t = \frac{\pi^2}{90} + 0 + 0 + \dots \quad , \quad I_\ell = \frac{\pi^2}{90} - \frac{1}{24}\zeta^2 + \frac{1}{12\pi}\zeta^3 + \dots \quad (\text{B.31a})$$

$$J_t = \frac{1}{12} + 0 + \dots \quad , \quad J_\ell = \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi}\zeta + \dots \quad (\text{B.31b})$$

$$L_t = 0 + 0 + \dots \quad , \quad L_\ell = \frac{1}{12}\zeta^2 - \frac{1}{4\pi}\zeta^3 + \dots \quad (\text{B.31c})$$

$$Y_\ell = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\zeta + \dots \quad (\text{B.31d})$$

Dabei bezeichnet $\zeta = \sqrt{3}\lambda_\ell\beta m$.

Anhang C

Matrix–Darstellungen

Aus der Definition (1.28) der Matrix \mathfrak{A} ,

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \mathfrak{B}^{\mu\nu} - \mathfrak{D}^{\mu\nu} \quad , \quad (\text{C.1})$$

läßt sich mittels

$$\begin{aligned} -\mathfrak{B}^{\mu\nu} - \mathfrak{D}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{V^2}V^\mu V^\nu - \frac{1}{K^2}K^\mu K^\nu \\ &= \frac{K^2}{k^2}U^\mu U^\nu - \frac{(UK)}{k^2}(UK + KU)^{\mu\nu} + \frac{(UK)^2}{K^2 k^2}K^\mu K^\nu - \frac{1}{K^2}K^\mu K^\nu \\ &= -U^\mu U^\nu + \frac{1}{k^2} \left\{ K^\mu K^\nu - (UK)(UK + KU)^{\mu\nu} + (UK)^2 U^\mu U^\nu \right\} \\ &= -U^\mu U^\nu + \frac{1}{k^2} \bar{K}^\mu \bar{K}^\nu \end{aligned}$$

(hier wurde nacheinander $V = K^2 U - (UK)K$, $K^2 = (UK)^2 - k^2$ und

$$\bar{K}^\mu := K^\mu - (UK)U^\mu = (0, \vec{k}) \quad (\text{C.2})$$

benutzt) eine äquivalente Darstellung finden:

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu + \frac{1}{k^2} \bar{K}^\mu \bar{K}^\nu \quad (\text{C.3})$$

Als eine dritte Variante ergibt sich übrigens wegen

$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 + \frac{\vec{k} \circ \vec{k}}{k^2} = 1 \quad (\text{C.4})$$

mit den zwei zu \vec{k} orthogonalen Vektoren $\vec{e}_{1,2} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, durch Vergleich mit (C.3) die Darstellung

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu} = -E_1^\mu E_1^\nu - E_2^\mu E_2^\nu \quad . \quad (\text{C.5})$$

Dabei haben die Vierervektoren $E_{1,2}^\mu = (0, \vec{e}_{1,2})$ nur Einträge im „räumlichen“ Anteil ($\mu = 1, 2, 3$).

Mit Hilfe von $\bar{K} = (0, \vec{k})$ kann man die Tensoren B und D in ihre geraden und ungeraden Anteile (bezüglich $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$) zerlegen:

$$K = K_0 U + \bar{K} \rightsquigarrow D^{\mu\nu} = \frac{K_0^2 U^\mu U^\nu + \bar{K}^\mu \bar{K}^\nu}{K^2} + \frac{K_0 (U\bar{K} + \bar{K}U)^{\mu\nu}}{K^2} \quad (\text{C.6a})$$

$$V = -k^2 U - K_0 \bar{K} \rightsquigarrow B = \frac{k^4 U^\mu U^\nu + K_0^2 \bar{K}^\mu \bar{K}^\nu}{V^2} + \frac{K_0 k^2 (U\bar{K} + \bar{K}U)^{\mu\nu}}{V^2} \quad (\text{C.6b})$$

Demgegenüber hat die Matrix \mathbf{A} keinen ungeraden Anteil, wie aus der Darstellung (C.3) direkt ersichtlich ist. Um (C.6) zu testen, kann man sich per $g-B-D = g-UU-KK/k^2 = \mathbf{A}$ von der Konsistenz mit Gleichung (C.3) überzeugen.

Anhang D

Auswertung der Quantisierungsregeln

In diesem Anhang werden die Quantisierungskommutatoren aus Kapitel 8 explizit ausgewertet. Die in den Vertauschungsregeln (8.44) eingeführte Matrix $\tilde{\eta}_{\lambda\lambda'}$ soll hier bestimmt werden.

Bestückt man die Quantisierungsregeln (8.42) mit den Darstellungen der Felder und Impulse (8.30,8.40,8.43) in Erzeugern und Vernichtern und benutzt die Annahmen (8.44), so ergeben sich Relationen für die zu bestimmende Matrix $\tilde{\eta}$. Im folgenden ist stets eine Summation über Moden-Indizes λ impliziert, auch wenn diese nicht angegeben sind. Es gelten dann die Regeln der Matrixmultiplikation. Lorentzindizes werden außerhalb der Klammern angegeben.

$$2 \stackrel{!}{=} \left(-i\varepsilon^{(\lambda)} N_{\mathbf{B}}^* N_0^* \tilde{\eta}_{\lambda 0} \right)_{\vec{k}}^0 + (\text{dito})_{-\vec{k}}^0 \quad (D.1)$$

$$-2g^{ij} \stackrel{!}{=} \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \chi^* \right)_{\vec{k}}^{ij} + \left(\chi \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{-\vec{k}}^{ji} \quad (D.2)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{\vec{k}}^{ij} - (\text{dito})_{-\vec{k}}^{ji} \quad (D.3)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\chi \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \chi^* \right)_{\vec{k}}^{ij} - (\text{dito})_{-\vec{k}}^{ji} \quad (D.4)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \tilde{\eta}_{00}(\vec{k}) - \tilde{\eta}_{00}(-\vec{k}) \quad (D.5)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{\vec{k}}^{00} - \text{dito}_{-\vec{k}}^{00} \quad (D.6)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(N_{\mathbf{B}} N_0 \tilde{\eta}_{0\lambda} \varepsilon^{\lambda*} \right)_{\vec{k}}^j - \left(N_{\mathbf{B}}^* N_0^* \tilde{\eta}_{\lambda 0} \varepsilon^\lambda \right)_{-\vec{k}}^j \quad (D.7)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} (i\chi)^* \right)_{\vec{k}}^{0j} - \left(i\chi \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{-\vec{k}}^{j0} \quad (D.8)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(N_{\mathbf{B}} N_0 \tilde{\eta}_{0\lambda} (i\chi^\lambda)^* \right)_{\vec{k}}^j - \left(N_{\mathbf{B}}^* N_0^* \tilde{\eta}_{\lambda 0} i\chi^\lambda \right)_{-\vec{k}}^j \quad (D.9)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{\vec{k}}^{0j} - \left(\text{dito} \right)_{-\vec{k}}^{j0} \quad (\text{D.10})$$

Die hier gewählte Reihenfolge deckt sich übrigens genau mit der Reihenfolge der Kommutatoren im Haupttext (8.42).

Da bekannt ist, wie sich die Polarisationsvektoren ε_μ und χ_μ unter $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ verhalten, können diese Relationen mit Hilfe der Annahme $\tilde{\eta}(\vec{k}) = \tilde{\eta}(-\vec{k})$ und unter Benutzung von $\tilde{\eta}^T = \tilde{\eta}^*$ (was direkt aus der Definition von $\tilde{\eta}$ folgt) umgeformt werden in

$$1 = \Re \left(\frac{1-n}{n} \varepsilon^{(0)} \tilde{\eta}_{0\lambda} \varepsilon^{(\lambda)*} \right)_{\vec{k}}^{00} \quad (\text{D.11})$$

$$-g^{ij} = \Re \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \chi^* \right)_{\vec{k}}^{ij} \quad (\text{D.12})$$

$$0 = \Im \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{\vec{k}}^{ij} \quad (\text{D.13})$$

$$0 = \Im \left(\chi \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \chi^* \right)_{\vec{k}}^{ij} \quad (\text{D.14})$$

$$0 = 0 \quad (\text{D.15})$$

$$0 = \Im \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{\vec{k}}^{00} \quad (\text{D.16})$$

$$0 = \Re \left(N_B N_0 \tilde{\eta}_{0\lambda} \varepsilon^{\lambda*} \right)_{\vec{k}}^j \quad (\text{D.17})$$

$$0 = \Im \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \chi^* \right)_{\vec{k}}^{0j} \quad (\text{D.18})$$

$$0 = \Im \left(N_B N_0 \tilde{\eta}_{0\lambda} \chi^{\lambda*} \right)_{\vec{k}}^j \quad (\text{D.19})$$

$$0 = \Re \left(\varepsilon \frac{\tilde{\eta}}{\omega} \varepsilon^* \right)_{\vec{k}}^{0j} \quad (\text{D.20})$$

Dabei bezeichnen \Re den Realteil und \Im den Imaginärteil der entsprechenden Größe.

Es ist nun die Matrix $\tilde{\eta}$ so zu bestimmen, daß alle Relationen erfüllt werden. Weitere bisher unbestimmte Parameter sind n und $N_{0,3,B}$. Zunächst ist erkennbar, daß (D.15) und (D.16) unabhängig von $\tilde{\eta}$ identisch erfüllt sind. Ferner liefern (D.13) und (D.14) die Bedingungen

$$\tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} \stackrel{!}{=} \text{reell} \quad , \quad N_0 N_B N_3^* \stackrel{!}{=} \text{imag.} \quad . \quad (\text{D.21})$$

Mit (D.21) sind auch die Gleichungen (D.17) und (D.18) identisch erfüllt. Zur Behandlung der verbleibenden vier Gleichungen ist es sinnvoll, zwei Fälle zu unterscheiden, denn die Blockdiagonalität von $\tilde{\eta}$ erzwingt $\tilde{\eta}_{03} = \tilde{\eta}_{30} = 0$ für ungleiche *Trial*-Massen, also für $m_\ell = 0$. In beiden Fällen sei n reell. Dann reduzieren sich (D.11), (D.12) und (D.20), (D.18) mit Hilfe der Ansätze

$$m_\ell \neq 0 : \quad \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \tilde{\eta}_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad m_\ell = 0 : \quad \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{00} & 0 & 0 & \tilde{\eta}_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{\eta}_{30} & 0 & 0 & \tilde{\eta}_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{D.22})$$

auf folgende Bedingungen (rechts der Fall $m_\ell = 0$):

$$\tilde{\eta}_{00} = \frac{1-n}{n|N_0 N_B|^2} \quad \tilde{\eta}_{00} = 0 \quad (\text{D.23})$$

$$\tilde{\eta}_{00} = (n-1) \frac{m_\ell^2}{k^2} \left| \frac{N_3}{N_0 N_B} \right|^2 \tilde{\eta}_{33} \quad 1 = \frac{|N_0 N_B|^2}{1-n} \tilde{\eta}_{00} + i N_0 N_B N_3^* \tilde{\eta}_{03} \quad (\text{D.24})$$

$$0 = \tilde{\eta}_{00} K_j |N_0 N_B|^2 \quad \tilde{\eta}_{00} = 0 \quad (\text{D.25})$$

$$0 = |N_0 N_B|^2 \frac{n}{(n-1)^2} \tilde{\eta}_{00} + |N_3|^2 \tilde{\eta}_{33} \quad \tilde{\eta}_{33} = \frac{n+1}{n-1} \frac{i N_0 N_B}{N_3} \tilde{\eta}_{03} \quad (\text{D.26})$$

Im Fall $m_\ell \neq 0$ ergibt sich nur die triviale Lösung $\tilde{\eta}_{00} = \tilde{\eta}_{33} = 0$, die Quantisierung scheitert hier also. Demgegenüber bietet sich im Fall $m_\ell = 0$ die Wahl $n = -1$ an, da damit neben $\tilde{\eta}_{00}$ auch $\tilde{\eta}_{33}$ verschwindet. Ferner wähle ich noch $N_0 N_B N_3^* = i$ (genau wie Manka [24] und NO [13] dies tun), so daß die Lösung insgesamt

$$m_\ell = 0 : \quad n = -1, \quad N_0 N_B N_3^* = i, \quad \tilde{\eta}_{\lambda\lambda'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.27})$$

lautet.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Schulz, Nucl. Phys. B413 (1994) 353
- [2] E. Braaten/ R.D. Pisarski, Nucl. Phys. B337 (1990) 569
- [3] E. Braaten/ R.D. Pisarski, Phys. Rev. D42 (1990) 2156
- [4] A.K. Rebhan, Phys. Rev. D48 (1993) 3967; preprint DESY 94-132
- [5] F. Flechsig/ H. Schulz, Phys. Lett. B349 (1995) 504
- [6] J.I. Kapusta, Finite-temperature field theory, Cambridge University Press (1989)
- [7] N.P. Landsmann/C.G. van Weert, Phys. Reports 145 (1987) 141
- [8] C.W. Bernard, Phys. Rev. D9 (1974) 3312
- [9] D.J. Gross/ R.D. Pisarski/ L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 43
- [10] H. Schulz, Sonderblätter F1-F5 der Vorlesung „QCD bei hoher Temperatur“, Universität Hannover (1993)
- [11] C. Itzykson/ J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, Mc Graw Hill (1980)
- [12] T.-P. Cheng/ L.-F. Li, Gauge theory of elementary particle physics, Oxford University Press (1992)
- [13] N. Nakanishi/ I. Ojima, Covariant Operator Formalism of gauge theories and quantum gravity, World Scientific (1990)
- [14] C. Becchi/ A. Rouet/ R. Stora, Phys. Lett. 52B (1974) 344
I.V. Tyutin, Lebedev preprint FIAN 39 (1975)
- [15] H. Schulz, Phys. Lett. B291 (1992) 448
- [16] J.C. Taylor/ S.M. Wong, Nucl. Phys. B346 (1990) 115
J. Frenkel/ J.C. Taylor, Nucl. Phys. B374 (1992) 156
- [17] E. Braaten/ R.D. Pisarski, Nucl. Phys. B339 (1990) 310
- [18] R. Kobes/ G. Kunstatter/ A. Rebhan, Nucl. Phys. B355 (1991) 1

- [19] P. Becher/ M. Böhm/ H. Joos: Eichtheorien, Teubner (1983)
- [20] G. Kunstatter, Can. J. Phys. 71 (1993) 256
- [21] J. Frenkel/ J.C. Taylor, Nucl. Phys. B334 (1990) 199
- [22] L. Polley/ D.E.L. Pottinger (eds.), Variational Calculations in Quantum Field Theory, World Scientific (1988)
- [23] R.P. Feynman, Statistical Mechanics, W.A. Benjamin, Inc. (1972)
- [24] R. Manka, Ann. Phys. 171 (1986) 1
- [25] K. Kajantje/ J.I. Kapusta, Ann. Phys. 160 (1985) 477
U. Heinz/ K. Kajantje/ T. Toimela, Ann. Phys. 176 (1987) 218
- [26] O.K. Kalashnikov, preprint hep-ph 9502354
- [27] R.D. Pisarski, Physica A158 (1989) 146
- [28] E. Braaten/ T.C. Yuan, Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2183
- [29] T. Kugo/ I. Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. 66 (1979) 1
- [30] K. Huang, Statistical Mechanics, Wiley 1987
- [31] U. Kraemmer/ A.K. Rebhan/ H. Schulz, Ann. Phys. 238 (1995) 286
- [32] L. Dolan/ R. Jackiw, Phys. Rev. D9 (1974) 3320

Danksagung

Ich danke Hermann Schulz für das Thema dieser Arbeit, für seine intensive Betreuung und dafür, daß er es nicht gescheut hat, sich mit mir durch die endlosen Sümpfe des Variationsverfahrens zu quälen. Dank gebührt auch Martin Reuter und Anton Rebhan für Hamburger Diskussionen, Ideen und gute Ratschläge. Weiterhin sei Norbert Dragon für sein offenes Ohr und den schnellen Sprung zur Tafel in BRS-Angelegenheiten gedankt.

Natürlich darf an dieser Stelle auch nicht der Dank an die „Gilde“ (eine Gruppe von Kommilitonen) für eine nette Studienzeit fehlen. Allen voran Fritjof Flechsig, der auch die fachliche Seite des Korrekturlesens übernommen hat. Meinen Eltern sei für Unterstützung sowie germanistisches Fachwissen gedankt. Bei meinem Bruder Timo bedanke ich mich einfach nur so.

Schließlich möchte ich Sanne (sie starb Ende 1994 an Krebs) dafür danken, daß sie, solange sie konnte, mir mit einer Engelsgeduld den Freiraum gelassen hat, den ich hierfür brauchte.