Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 14**	29.9.2011

Aufgabe 53:

Betrachten Sie das komplexe Polynom dritten Grades $P(z) = -\frac{1}{2}\,z^3 - 2\,z^2 + \frac{1}{2}\,z + 11$.

(a) Können Sie eine Nullstelle z_1 von $P(z)$ erraten?

(b) Begründen Sie (mit dem Fundamentalsatz der Algebra), dass es Zahlen $b, c \in \mathbb{C}$ gibt mit
$P(z) = -\frac{1}{2}(z - z_1)(z^2 + b\,z + c)$.

(c) Bestimmen Sie b und c aus (b).

[Geht per Polynomdivision; oder durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich.]

(d) Berechnen Sie die restlichen Nullstellen z_2, z_3.

Aufgabe 54: [Teil (c) ist (*)]

(a) Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-|x|}\, \exp(i\,k\,x)$

[Hinweis: $e^{-x}\,\exp(ikx) \overset{x\to\infty}{\to} 0$.]

(b) Die Funktion $\tilde{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \exp(-ikx)$ heisst *Fourier-Transformierte* von $f(x)$.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ von $f(x) = e^{-|x|}$.

(c) Zeigen Sie:

$f(-x) = [f(x)]^*$ impliziert $[\tilde{f}(k)]^* = \tilde{f}(k)$ bzw. Im $\tilde{f}(k) = 0$

$f(-x) = [-f(x)]^*$ impliziert $[\tilde{f}(k)]^* = -\tilde{f}(k)$ bzw. Re $\tilde{f}(k) = 0$

Aufgabe 55:

Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:

(a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

(b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

(c) $[\cos(z) + i\sin(z)]^n = \cos(nz) + i\sin(nz)$

Aufgabe 56: [Teil (e) ist (*)]

Wir haben 'Nachholbedarf' bei den trigonometrischen Funktionen; Hier Gymnastik für $x \in \mathbb{R}$:

(a) Skizzieren Sie $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(b) Bestimmen Sie $[\tan(x)]'$

(c) Schränken Sie den Definitionsbereich von $\tan(x)$ so ein, dass die Funktion eineindeutig ist, und skizzieren Sie die Umkehrfunktion $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$

(d) Bestimmen Sie $[\arctan(x)]'$

(e) Zeigen Sie für $z = a + ib \neq 0$: $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) + n(z)\,\pi$, mit $n(z) = \begin{cases} n(z) = 0 \text{ für } a, b \geq 0 \\ n(z) = 1 \text{ für } a < 0 \\ n(z) = 2 \text{ für } a \geq 0\,,\ b < 0 \end{cases}$