

**Aufgabe 49:**

Finden Sie die Lösungen  $x, y \in \mathbb{C}$  des Gleichungssystems  $ix + 3y = 1$ ,  $2x + iy = 2i$ .

**Aufgabe 50:**

Zeigen Sie für beliebige  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , dass

- (a)  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- (b)  $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$
- (c)  $(z^*)^* = z$
- (d)  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^* = z$
- (e)  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix}$  für  $z_2 \neq 0$

**Aufgabe 51:** [Teile (f,g,h) sind (\*)]

Die Betragsfunktion ist definiert als  $|z| := \sqrt{z z^*} = \sqrt{[\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2}$ . Zeigen Sie

- (a)  $|-z| = |z|$
- (b)  $|z^*| = |z|$
- (c)  $|z| \geq 0$
- (d)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (e)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- (f)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecks-Ungleichung)
- (g)  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
- (h) Falls  $z \in \mathbb{R}$ , dann  $|z| = \begin{cases} z & \text{falls } z \geq 0 \\ -z & \text{falls } z < 0 \end{cases}$

**Aufgabe 52:**

Betrachten Sie das komplexe Polynom zweiten Grades  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto P(z) := a z^2 + b z + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$ . Zeigen Sie, dass

- (a)  $z_{\pm} := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$ . [Hinweis: Ü48b3.]
- (b)  $z_{\pm}$  sind Nullstellen von  $P(z)$
- (c)  $z_+ z_- = \frac{c}{a}$  und  $z_+ + z_- = -\frac{b}{a}$
- (d)  $P(z) = a(z - z_+)(z - z_-)$